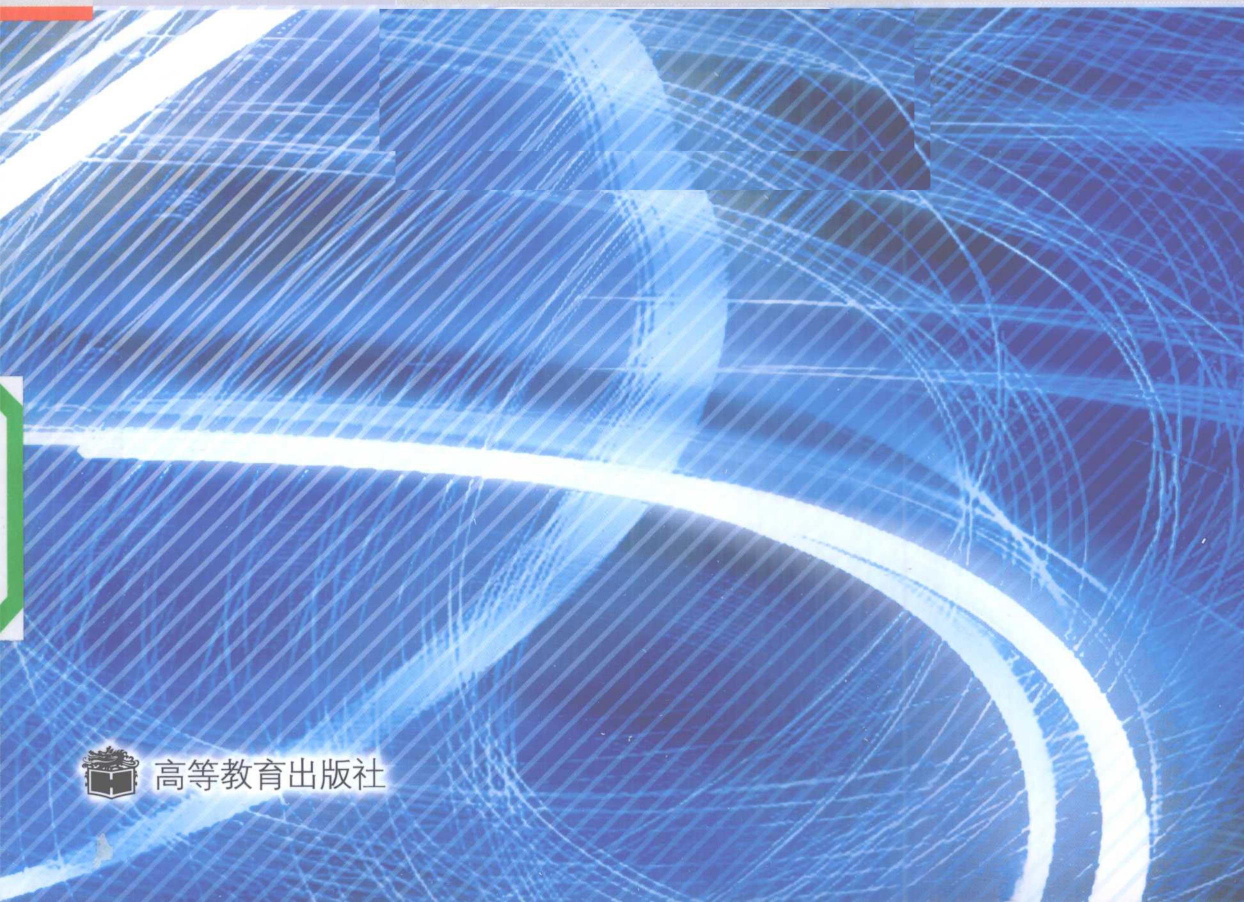
高等学校经济管理学科数学基础系列教材

总主编 刘贵基 赵 凯

概率论与数理统计

◎ 主编 许 成 周玉珠



高等教育出版社

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

总主编　刘贵基　赵　凯

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是应用型本科院校“十一五”国家课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题——“经管类专业应用型人才培养数学基础课程教学内容改革研究”的研究成果之一，是作者依据多年的教学实践经验和对高等学校经济管理类专业培养应用型人才的教学改革的认识，并根据最新的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写的。

本书结构严谨，注重应用，概念阐述简明、通俗化，举例贴近生活，贴近教学实际，便于教与学。本书的主要内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析。书末附有习题参考答案与提示。

本书可作为高等学校经济管理类专业概率论与数理统计课程的教材，也可供报考经济学和管理学类硕士研究生的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/许成，周玉珠主编. —北京：高等教育出版社，2010.1

ISBN 978-7-04-028566-6

Ⅰ.概… Ⅱ.①许…②周… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第223390号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 张申申
责任绘图 尹 莉 **版式设计** 余 杨 **责任校对** 俞声佳
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京铭成印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2010年1月第1版
印　　张	16.5	印　　次	2010年1月第1次印刷
字　　数	310 000	定　　价	19.80元

物料号　28566-00

前　　言

本套教材是应用型本科院校“十一五”国家课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题——“经管类专业应用型人才培养数学基础课程教学内容改革研究”的研究成果之一，作者依据多年丰富的教学实践经验和对高等学校经济管理类专业培养应用型人才的教学改革的认识，并根据最新的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写的。本套教材包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》，编写中特别注重以下几点：

1. 在内容安排上由浅入深，符合认知规律，既考虑了数学的科学性、系统性与逻辑性，又汲取了国内外一些优秀教材的优点，对传统的教学内容和结构作了适当的调整，增加了与经济、管理密切相关的数学理论和方法。

2. 在教学内容上实现了与经济管理类专业课程内容的整体化，能够更好地为后续课程服务，并满足报考经济学和管理学类硕士研究生和将来从事实际工作的需要。

3. 贯彻问题教学法的基本思路，对重要的概念、定理、方法，尽量先从解决经济管理领域中的实际问题入手，再引入数学概念，介绍数学定理、方法，最后解决所提出的问题，使学生能够了解实际背景，提高学习兴趣，同时增强应用数学知识解决实际问题的意识和能力。

4. 例题和习题的选配层次分明，难易适度，并恰当选用经济管理中的应用案例。教材在每节后面都配置基本题，尽量使读者在做完本节习题后能够较好地理解和掌握本节的基本内容、基本理论和基本方法；在每章后面配置总习题，总习题均分为(A)，(B)两组，其中(A)组习题反映了本科经济管理类专业数学基础课程的基本要求，(B)组习题综合性较强，可供学有余力或有志报考硕士研究生的读者使用。

5. 行文追求简洁流畅，重点、难点阐述详细，逻辑性强，既富有启发性又通俗易懂。针对经管类专业教学的目标与特点，有些定理仅给出结论而略去了推证过程，突出理论的应用和方法的介绍，内容深广度适当，贴近教学实际，便于教与学。

本书适合作为高等学校经济管理类专业概率论与数理统计课程的教材，也适合报考经济学和管理学类硕士研究生的读者参考。

本套教材由山东经济学院刘贵基、青岛大学赵凯任总主编，《概率论与数理统计》由许成、周玉珠、刘贵基执笔编写。在编写过程中，参考和借鉴了国内外有关资料，并得到了许多同行的帮助、指导和高等教育出版社的大力支持，在此谨致以诚挚的谢意。

限于编者水平，书中难免有错误和不足之处，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

2009 年 9 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

观察自然现象和社会现象，会发现有一些现象在一定条件下必然发生. 例如向空中抛一石子必然下落；在一个标准大气压下，水加热到 100 ℃会沸腾等，这类现象我们称为**确定性现象**. 还有一类现象，在一定的条件下，可能出现这样或那样的结果，例如向空中抛一枚均匀的硬币，落地后正面可能朝上也可能朝下，具有不确定性，但是如果我们反复进行投掷，会发现正面朝上的次数大致有一半，有一定的规律性. 这种在个别试验中结果具有不确定性，在大量重复试验中试验结果又具有某种统计规律性的现象，称之为**随机现象**. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科.

第一节　随　机　事　件

1.1　随机试验与样本空间

为了研究随机现象，需要对客观事物进行观察、测量或做各种科学实验. 这种观察、测量或实验的过程统称为**试验**. 如果试验具有以下特点：

（1）试验可在相同的条件下重复进行；

（2）试验结果不止一个，但事先能明确知道试验的所有结果；

（3）试验前不能预知出现哪种结果，

则称此试验为随机试验，也简称为试验，用 E 表示. 以后所提到的试验都是指随机试验.

进行一次试验，总要有一个观测的目的，试验的可能结果是与试验的目的相应的. 请在下面给出的试验中，讨论试验的结果.

E_1：投掷一枚硬币，观察出现正面 H 和反面 T 的情况；

E_2：投掷一枚硬币 3 次，观察出现正反面的情况；

E_3：投掷一枚硬币 3 次，观察出现正面的次数；

E_4：观察一个手机用户一天接到的短信次数；

E_5：观察某地区某天的最高温度与最低温度；

E_6：观察某一电子元件的寿命.

对于试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果却是已知的. 称试验 E 的所有不可再分的可能结果组成的集合为试验 E 的**样本空间**，记为 Ω.

在上述的6个试验中，若以 Ω_i 表示试验 E_i 的样本空间，$i=1,2,\cdots,6$，则

$\Omega_1=\{H,T\}$，其中 H 表示正面，T 表示反面；

$\Omega_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$；

$\Omega_3=\{0,1,2,3\}$，其中的数字表示出现正面的次数；

$\Omega_4=\{0,1,2,\cdots\}$，其中的数字表示用户一天接到短信的次数；

$\Omega_5=\{(x,y)\,|\,T_1\leqslant x\leqslant y\leqslant T_2\}$，其中 x，y 分别是某天的最低温度和最高温度，T_1，T_2 分别是该地区的最低与最高温度；

$\Omega_6=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$，其中 t 表示"电子元件的寿命是 t 小时".

样本空间是概率论中的一个基本概念，样本空间的结构随着试验的目的不同而有所不同，正确地确定不同试验的样本空间是极为重要的.

1.2　随机事件

样本空间 Ω 的元素，称为样本点，记为 ω. Ω 的子集称为试验 E 的**随机事件**，简称**事件**. 常用大写字母 A，B，C 等表示事件，它是满足某些条件的样本点所组成的集合. 由一个样本点构成的单点集，称为**基本事件**，由一个以上样本点构成的 Ω 的子集称为复合事件. 复合事件是由基本事件组成的.

例1　在 E_2 中，基本事件为 $\{HHH\}$，$\{HHT\}$，$\{HTH\}$，$\{THH\}$，$\{HTT\}$，$\{THT\}$，$\{TTH\}$，$\{TTT\}$. 若以事件 A_1 表示"至少出现一次正面"，则

$$A_1=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH\};$$

若以事件 A_2 表示"三次出现同一面"，则 $A_2=\{HHH,TTT\}$；

若以事件 A_3 表示"三次出现都是反面"，则 $A_3=\{TTT\}$.

在试验中，当事件中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 例如，在例1中，当投掷的结果为 $\{HHH\}$ 时，事件 A_1，A_2 均发生.

样本空间 Ω 包含了所有的样本点，且是 Ω 自身的子集，故也是一个事件. 由于在每次试验中它总是发生的，故称为**必然事件**，记作 Ω；空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也是样本空间 Ω 的子集，在每次试验中它总是不会发生的，故称为**不可能事件**，记作 $\varnothing$.

1.3　事件间的关系与运算

在同一个试验中的几个事件之间往往是相互联系的，研究事件间的关系，可以帮助人们深入地认识事件，还可以简化一些复杂的事件.

设 Ω 为试验 E 的样本空间，假设 A，B 及 $A_1,A_2,\cdots$都是 E 的事件，即样本空间 Ω 的子集.

（1）事件的包含

若事件 A 中的每一个样本点都属于事件 B，则称事件 B 包含事件 A 或称事件 A 包含于事件 B，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 显然，这时事件 A 发生必导致事件 B 发生，因此事件 B 包含事件 A，也常表述为“事件 A 发生必然导致事件 B 发生”.

对任一事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

（2）事件的和（或并）

事件 $\{\omega\mid\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$，称为 A 与 B 的**和**，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$.

显然，事件 $A\cup B$ 发生，表示 A 与 B 至少有一个发生. 因此，通常称 $A\cup B$为“A 与 B 至少有一个发生”的事件. 例如，在例 1 中，$A_1\cup A_2=\Omega_2$，$A_2\cup A_3=A_2$.

类似地，$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生”的事件，称为 A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 的和. 用 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$至少有一个发生”的事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和.

（3）事件的积（或交）

事件 $\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$，称为 A 与 B 的**积**，记为 $A\cap B$ 或 AB.

显然，事件 $A\cap B$ 发生，表示 A 与 B 同时发生. 因此，通常称 $A\cap B$ 为“A 与 B 同时发生”的事件. 例如，在例 1 中，$A_1\cap A_2=\{HHH\}$.

类似地，$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”的事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积. 用 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时发生”的事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积.

（4）事件的差

事件 $\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$，称为 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$.

显然，事件 $A-B$ 发生，表示 A 发生而 B 不发生. 因此，$A-B$ 表示“A 发生而 B 不发生”这一事件.

由事件差的定义易知，对任意事件 A、B，有 $A-B=A-AB$.

（5）事件的互不相容（或互斥）

若 $AB=\varnothing$，即事件 A、B 不可能同时发生，则称为 A 与 B **互不相容**或**互斥**；否则称 A 与 B **相容**.

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件都互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，

$i, j=1,2,\cdots,n$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容. 这一概念还可以推广到可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的情形.

(6) 对立事件(或逆事件)

若事件 A、B 满足 $AB=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$，则称 A 与 B 互为**对立事件**或互为**逆事件**. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

由定义知，A 的对立事件 $\overline{A}$ 是由样本空间中所有不属于 A 的样本点构成的，即 $\overline{A}=\Omega-A$. 显然，对任意事件 A、B，有 $A-B=A\overline{B}$.

由以上所述可知，概率论中事件间的关系与运算和集合论中集合间的相应关系与运算是完全一致的. 所以，事件间的关系与运算就可以用集合论中的维恩图来表示. 现将上面所定义的事件间的关系与运算用维恩图表示如下(平面上的矩形区域表示样本空间 Ω,矩形内每一点表示样本点,矩形内的区域表示事件)(见图 1－1)：

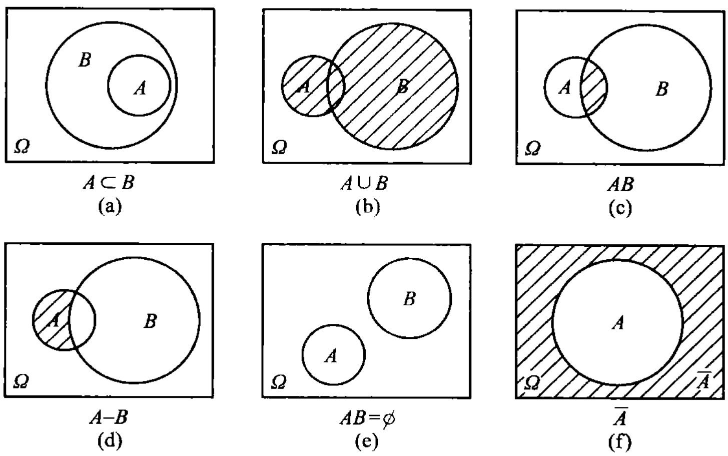


图 1－1

由于事件间的关系与运算与集合论中集合间的相应关系与运算是完全一致的，所以根据集合运算所满足的运算规律，可得事件运算满足以下规律：

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 2　设 A，B，C 为三个事件，则

(1) "A 发生，B 与 C 不发生" 可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$；

(2) "A 与 B 都发生，而 C 不发生" 可表示为 $AB\overline{C}$；

(3) “A, B, C 中至少有一个发生” 可表示为 $A\cup B\cup C$;

(4) “A, B, C 都发生” 可表示为 ABC;

(5) “A, B, C 都不发生” 可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(6) “A, B, C 不多于两个发生” 可表示为 $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

例 3　在图书馆中随意抽取一本书, 事件 A 表示 “数学书”, B 表示 “中文书”, C 表示 “平装书”, 则 $AB\overline{C}$ 表示抽取的是 “精装中文版数学书”; $\overline{C}\subset B$ 表示 “精装书都是中文书”; $\overline{A}=B$ 表示 “非数学书都是中文版的, 且中文版的书都是非数学书”.

例 4　从一批产品中每次取出一个进行检验, 用 A_i 表示第 i 次检验取到合格品, $i=1, 2, 3$, 试用文字叙述下列事件:

$$A_1\cup A_2;\ \overline{A_1};\ \overline{A_2}A_3;\ \overline{A_1}\cup\overline{A_2};\ A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3.$$

解　$A_1\cup A_2$: 前两次检验中至少有一次取到合格品;

$\overline{A_1}$: 第一次检验没取到合格品;

$\overline{A_2}A_3$: 第二次检验没取到合格品, 而第三次检验取到合格品;

$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$: 前两次检验中至少有一次没取到合格品;

$A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$: 三次检验中至少有两次取到合格品.

习题 1-1

1. 写出下面随机试验的样本空间:

(1) 同时掷两颗骰子, 记录两颗骰子分别出现的点数情况;

(2) 同时掷两颗骰子, 记录两颗骰子点数之和;

(3) 在单位圆内任意取一点, 观察它的坐标;

(4) 生产产品直到 8 件正品为止, 记录生产产品的总件数;

(5) 对某工厂出厂的产品进行检查, 合格的记上 “正品”, 不合格的记上 “次品”, 如果连续查出 2 个次品就停止检查, 或检查 4 个产品就停止检查, 记录检查的结果.

2. 投掷三枚硬币, 例如用 (H,T,T) 表示 “第一枚硬币正面朝上, 第二枚硬币反面朝上, 第三枚硬币反面朝上” 这一事件,

(1) 求该随机试验中基本事件的个数, 并列出所有的基本事件;

(2) 事件 “第一枚硬币正面朝上” 是由哪几个基本事件复合而成的?

(3) 事件 “第二枚硬币反面朝上” 是由哪几个基本事件复合而成的?

(4) 事件 “至少有一枚硬币正面朝上” 是由哪几个基本事件复合而成的?

3. 对一个目标连续进行三次射击, 用 $A_i\,(i=1,2,3)$ 表示 “第 i 次射击命中目标” 这一事件, 试用 A_1,A_2,A_3 的运算式表示下列各事件:

(1) 第一次射击未命中目标而后两次射击都命中目标;

(2) 前两次射击都未命中目标，而第三次射击命中目标；

(3) 三次射击都命中目标；

(4) 三次射击都未命中目标；

(5) 三次射击正好有一次命中目标；

(6) 三次射击正好有两次命中目标；

(7) 三次射击至少有一次命中目标.

4. 设 $\Omega=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$A=\left\{x\left|\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{2}\right.\right\}$，具体写出下列各事件：

(1) $\bar{A}B$；(2) $\bar{A}\cup B$；(3) $\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}$；(4) $\overline{AB}$.

5. 用作图的方法说明下列各等式：

(1) $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$；(2) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

第二节　随机事件的概率

为了研究随机现象的统计规律性，就需要对事件发生的可能性大小进行定量的描述，要合理刻画事件发生的可能性大小，我们先引入频率的概念，进而引出表征事件在一次试验中发生可能性大小的数字度量——概率.

2.1　频率

设事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次，则 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值$\frac{n_A}{n}$称为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$.

容易看出，频率具有如下的性质：

(1) $f_n(A)\geqslant 0$；

(2) $f_n(\Omega)=1$；

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互不相容，则 $f_n\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{k}f_n(A_i)$.

由于事件 A 在 n 次试验中发生的频率是它发生的次数与总试验次数之比，其大小表示 A 发生的频繁程度. 频率越大，事件 A 发生得越频繁，这就意味着 A 在一次试验中发生的可能性越大. 因此，直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生可能性的大小.

下面考察历史上一些统计学家做的掷硬币试验，H 表示“正面朝上”，试验数据如表 1－1 所示.

表 1－1

试验者	n	n_H	$f_n(H)=\frac{n_H}{n}$
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

从表中可以看出，如果一枚硬币质地是均匀的，在大量投掷中，硬币正面朝上的频率稳定于固定值 0.5.

大量试验表明，对任何事件 A，在 n 次试验中发生的频率 $f_n(A)$ 在 0 与 1 之间随机波动，当试验次数 n 逐渐增大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，在某一固定的数 p（称为频率的稳定值）附近摆动. 频率的稳定值 p 是客观存在的，它就是相应的事件发生可能性大小的一个客观的定量的度量，称之为相应事件的**概率**，记为 $P(A)$. 称此概率为统计概率.

需要指出的是，频率的稳定值 p 一般是很难精确确定的. 但由于对于较大的 n，n 次试验中事件 A 的频率 $f_n(A)$ 与频率的稳定值 p 相差不大，且试验次数 n 越大，频率与频率的稳定值有较大偏差的情形就越少见. 因此，在处理实际问题时，常常是**用试验次数充分大时的事件的频率作为事件概率的近似值**. 在许多情况下，这就足以满足实际需要了.

2.2　概率的定义及性质

由上面 2.1 所述，概率实际是频率的数学抽象，从而应具有频率的相应性质：$P(A)\geqslant 0$；$P(\Omega)=1$；若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$. 事实上，这三条性质是概率的固有本质属性，由此直接用这三条性质来作为一般的概率定义.

定义 2.1　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于 E 的每一个随机事件 A，定义一个实数 $P(A)$ 与之对应. 如果 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

（1）（非负性）对每一个事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

（2）（规范性）　$P(\Omega)=1$；

（3）（完全可加性）若事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots$，则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.