

國民中學選修科目

數學教師手冊

上冊

國立編譯館主編



中華民國七十七年八月 正式本初版

國民中學
選修科目 **數學科教師手冊** 上冊

定價：（由教育部核定後公告）

主編者 國 立 編 譯 館

編審者 國立編譯館國民中學數學科教科用書編審委員會

主任委員	陳昭地			
委 員	方炎明	方稚芳	王振瀛	呂溪木
	李烱輝	李恭晴	李嘉淦	易新鼎
	翁正明	翁俊雄	陳冒海	陳俊生
	陳銘德	屠耀華	郭生玉	曹博盛
	黃敏晃	黃登源	葉見登	溫進興
	蕭龍生	謝志雄	顏啟麟	
編輯小組	呂溪木	李恭晴	陳昭地	陳冒海
	屠耀華	曹博盛	黃敏晃	黃登源
總訂正	陳昭地			
插圖繪製	鄭筱芬			

出版者 國 立 編 譯 館

地址：臺北市古亭區 10770 舟山路二四七號

印行者 九十二家書店（名稱詳見背面）

經銷者 臺 灣 書 店

門市部(一)：臺北市重慶南路一段十四號

電 話：三 一 一 〇 三 七 八

門市部(二)：臺北市忠孝東路一段一七二號

電 話：三 九 二 八 八 四 三

印刷者 內文：宏章印刷有限公司
封面：

編輯大意

G634.6
20:1

- 一、本書是根據民國七十四年四月教育部修訂公布的國民中學數學課程標準並配合國民中學數學教科書編輯而成，供教師使用。
- 二、本書共分二冊，每學期一冊，供國民中學第三學年選修數學科教學參考之用。
- 三、本書各章包括教學目標與時數、教材摘要、教材地位分析、教學方法與注意事項、教學媒體舉例、教學活動舉例、評量應注意事項、充實教材、參考資料及習題簡答等項目，供教師教學參考之用。
- 四、各單元之教學除應注意本手冊中所列舉的認知目標外，尚應兼顧技能與情意之教學目標。
- 五、敬請全國國民中學教師就使用本書時所遭遇的實際問題，提出具體改進意見，隨時通知編輯小組，俾便據以修訂，使其更有助於教師之教學。

目 次

第一章 幾何與證明

壹、教學目標與時數	1
貳、教材摘要	2
叁、教材地位分析	2
肆、教學方法與注意事項	3
伍、教學媒體舉例	6
陸、教學活動舉例	11
柒、評量應注意事項	17
捌、充實教材	18
玖、參考資料	19
拾、習題簡答	22

第二章 三角形

壹、教學目標與時數	25
貳、教材摘要	26
叁、教材地位分析	27
肆、教學方法與注意事項	28
伍、教學媒體舉例	32
陸、教學活動舉例	32
柒、評量應注意事項	39
捌、充實教材	39
玖、參考資料	43
拾、習題簡答	45

第三章 四邊形

壹、教學目標與時數	51
貳、教材摘要	52
參、教材地位分析	53
肆、教學方法與注意事項	54
伍、教學媒體舉例	57
陸、教學活動舉例	57
柒、評量應注意事項	63
捌、充實教材	63
玖、參考資料	65
拾、習題簡答	66

第四章 圓

壹、教學目標與時數	73
貳、教材摘要	75
參、教材地位分析	77
肆、教學方法與注意事項	80
伍、教學媒體舉例	87
陸、教學活動舉例	88
柒、評量應注意事項	98
捌、充實教材	99
玖、參考資料	112
拾、習題簡答	127

第一章 幾何與證明

壹、教學目標與時數

1-1 推理幾何與證明（教學時數：3 節）

- 1.知道幾何證明的意義。
- 2.能由三角形的外角和定理推出三角形的內角和定理。
- 3.能由三角形的內角和定理推出三角形的外角定理。
- 4.知道四邊形和五邊形等多邊形的內角和。
- 5.能寫出幾何問題中的已知與求證。
- 6.能將簡單的幾何問題作出草圖。
- 7.培養邏輯思考的能力。

1-2 綜合證題法（教學時數：5 節）

- 1.知道 SSS、SAS、ASA、AAS 等三角形全等定理。
- 2.能利用 SSS、SAS、ASA、AAS 等證明兩個三角形全等。
- 3.知道並能證明平行四邊形的任一對角線將此平行四邊形分成兩個全等的三角形。
- 4.能證明等腰三角形的頂角平分線必垂直平分底邊。
- 5.能證明角平分線上任意一點到此角兩邊等距離。

1-3 輔助線（教學時數：3 節）

- 1.知道輔助線的意義。
- 2.能適當作出輔助線以證明所給的問題。
- 3.能證明兩直角三角形中若各有一股及斜邊對應相等，則這兩個三角形必然全等。
- 4.知道並能證明商高定理的逆定理。

貳、教材摘要

我們在國中一年級的數學裏曾經以直觀的方式讓學生觀察簡單的幾何圖形之形狀與性質，也以操作實驗的方式得知平行線與平行四邊形的一些性質，這些性質大多從觀察或實驗中得來的，另一些則是以觀察實驗所得的結果為根據而推論得到的。

本章教材的主要目的在引進平面幾何的證明方法，以訓練學生邏輯推理與思考，並作為以後推演幾何性質的基礎。

第一節引進證明的意義及其需要性，以簡單的幾個例子使學生體會證明的方法。第二節繼續讓學生學習證明的方法，但是以證明簡單的三角形全等為重心。在舉例證明的過程中，依次闡述 SSS、SAS、ASA、AAS 等三角形全等定理，已知和求證的寫法以及證明的寫法；同時分析問題的證明方法，並以例子訓練學生的邏輯推理能力。第三節說明作輔助線的需要性，但是其精神仍然在訓練學生的邏輯推理的能力。

叁、教材地位分析

已 習 教 材	本 單 元 教 材	未 習 教 材
簡單幾何圖形 (國中數學第一冊)	復習一些實驗得出的幾何性質。	
	↓	
	提出幾何問題須要證明的原因。	
	↓	
證明三角形內角和等於 180° 。 (國中數學第一冊)	證明三角形內角和等於 180° 。(復習)	
	↓	
	已知、求證和證明的寫法。	
	↓	
實驗得知SSS、SAS、ASA、AAS。 (國中數學第二冊)	利用SSS、SAS、ASA、AAS等三角形全等性質證明簡單幾何性質，以作為幾何證明的例子。	
	↓	
基本作圖 (國中數學第一、二冊)	作輔助線。	三角形、四邊形、圓和相似形等幾何證明問題。
	↓	
	證明直角三角形斜股(RHS)全等性質。	
	↓	
	商高定理的逆定理	

肆、教學方法與注意事項

1-1 推理幾何與證明

1.幾何證明是訓練邏輯推理的一個很好的工具，然而一般教科書編者都不便在一開始就明白的指出此點。因此，有的編者以「觀察或實驗可能有錯誤」為理由，引出證明的需要，我們則以「某些較複雜的性質，往往不易由觀察或實驗中獲得確切的結果」來引進證明的需要，而不說觀察或實驗可能有錯誤，以免學生對於從國中一年級所學的結果產生懷疑以致於影響其學習。

2.有些編者在講推理幾何時先列出公設（或公理）作為證明的基礎，我們為了避免同學的疑惑，採用直觀的方式，將學生直觀上認為沒有問題的最基本的幾何知識，如過線外一點可作一平行線且只能作一平行線等視為顯然成立的事實，而不再特別提出來。

3.我們在一年級的數學裏已經講過任意一個三角形的內角和等於 180° 這個事實，本節中的證明與當時所講的完全相同，因此可當作是再一次的復習。教師在教學時可提醒學生回憶一下當時的證明方法。

4.例1「試證在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 的外角等於 $\angle B + \angle C$ 」與例2「證明任意四邊形的內角和等於 360° 」，在國中一年級的數學裏也出現過，此處也是復習性質，以它當例子來說明推理證明的優點。

5.本節的最後一段在說明已知、求證和證明的寫法。對於寫法的訓練並不是說明一下或舉一個實例就能使學生完全達到要求的，而是要慢慢以例子訓練學生如何寫。換句話說，這裏只提出規則，以後仍然要不斷的引導學生練習。

6.證明幾何問題以前，首先要了解問題，知道那些是問題的已知條件和未知事項（或求證事實）。通常為了清晰起見，我們根據題意先將原來的幾何問題作一個簡單的草圖，在圖中標示適當的記號，再根據已標示妥當記號的幾何圖形，將其已知與求證簡明扼要的表示出來，最後再想辦法去證明。

7.本節的另一目的是要學生會作簡單幾何問題的草圖，寫出其已知與求證，至於證明方法的訓練要等待下一節以後逐步練習了。

8.作幾何問題的草圖時，務必依照原問題去作圖，不可任意添加條件；同時在作草圖時要特別注意下列事項，以免妨礙最後證明的思考工作。

(1)作圖要愈準確愈好。

(2)作三角形時，不要作成等腰三角形或特殊形狀的三角形。同樣的，作四邊形時，也不要作成特殊形狀的四邊形。

(3)作一個角時，不要作一個特殊角度的角。

(4)作兩條相交直線時，不要作成交角很特殊的情形，如互相垂直等。

總之，作出的草圖應一般化，位置以看起來方便為宜。

9.我們從三角形的外角和等於 360° 以及一些基本數量的加法代換性質推演出三角形的內角和等於 180° ；從三角形的內角和等於 180° ，當然也可推出其外角和等於 360° 。所以幾何問題的證明訓練之基礎是以某些基本條件為工具，或加上一些代數數量間之基本性質為輔助工具，推演到所希望得到的幾何性質。

10.幾何證明的主要目的可說是在訓練學生的思考能力，因此在證明過程中應力求條理清楚，使學生完全了解，不宜讓學生強記。

11.列出已知和求證的目的是要學生把問題分析清楚，再簡單地將問題重述出來，教師在教學時應把握這個重點。

12.對於已證得的幾何性質，我們以後都可適時地加以利用來證明其他的幾何性質。

1-2 綜合證題法

1.我們在本節中主要是利用 SSS、SAS、ASA、AAS 等三角形全等性質以證明三角形的全等；每一個例題的證明的寫法都類似，希望由此慢慢培養學生寫證明的能力，同時也希望教師上課時能把握這個精神。

2.本節中的每個例題至少有三個目標：

(1)復習幾何性質以作為將來幾何證明的基礎。

(2)練習已知、求證和證明的寫法。

(3)作為各種幾何證題法的範例。

因此教師在教學時可先讓學生觀察或檢驗這個幾何性質是否正確，然後再有條理的加以證明（並注意已知、求證和證明的寫法）。

3.有些例子的證明中寫出(1)、(2)、……等，只是使整個證明看起來更清楚而已，並沒有硬性規定何者屬於(1)，何者屬於(2)，……。但是每部分最好是完整的敘述，以保持整體的概念。

4.我們在本節中所舉的例題大多是在一年級時講過的，在此重複列舉的目的一方面是當作復習，一方面是當作幾何證明的練習。

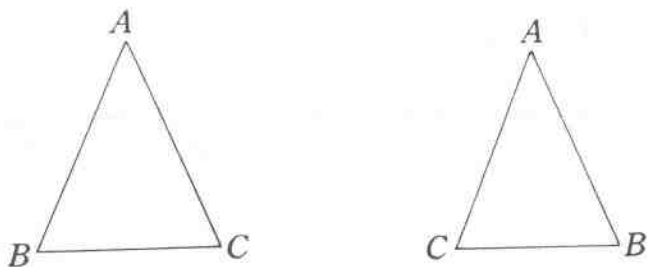
5.我們在本節中所證過的幾何性質，以後都可用來作為證明其他幾何性質的基礎。

1-3 輔助線

1.在幾何證明的過程中，常需在草圖或給定的圖形中，作一些適當的輔助線，才能獲得結果。有關作輔助線的幾何證題訓練，要靠仔細分析與熟悉證明的技巧，慢慢的學習和思考

才能逐步了解。因此，單靠學完本章教材是無法完全了解如何處理輔助線的，要經由以後各章節的訓練才能慢慢地獲得經驗與技巧。

2.例3中“等腰三角形兩底角相等”也可不必經由添加輔助線來證明。



如圖，在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ACB$ 中，

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AC}, \overline{AC} = \overline{AB}, \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ACB,$$

故 $\angle B = \angle C$ 。

3.在上面的證明中，我們把 $\triangle ABC$ 看作兩個三角形即 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ACB$ ，再證明這兩個三角形依照 ABC 與 ACB 的順序可以完全疊合在一起，即 $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ ，由此可得 $\angle B = \angle C$ 。一般而言，當我們寫 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 時，各頂角及各邊不必一定要依照寫的順序對應相等（例如 $\angle A$ 可能等於 $\angle E$ ），然而當我們知道這兩個三角形的邊角對應相等的關係時，通常習慣上都是依照順序寫。例如在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，若

$$\angle A = \angle E, \angle B = \angle F, \angle C = \angle D$$

$$\overline{BC} = \overline{FD}, \overline{AC} = \overline{ED}, \overline{AB} = \overline{EF}$$

則我們寫成 $\triangle ABC \cong \triangle EFD$ ，以養成良好的習慣，而不要故意寫成 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

4.利用商高定理可得出 RHS 定理的一個簡單證明法；反過來，類似於例6之 RHS 定理證明方式，先做垂直 $\overline{AC}$ 的輔助線段 $\overline{CK}$ ，可證得商高定理的逆定理例7。

5.商高定理的逆定理也可以利用第二章第四節的例6與例7之樞紐性質加以說明，以便加強學生的觀念。

6.我們在此所證明過的問題以及在國中一年級數學裏所講過的幾何性質都可以用來證明其他幾何問題。

伍、教學媒體舉例

一、本章需用教具表

教 具	規 格	數 量	配合教材	備 注
1.直尺	黑板用	1	} 1-1 ~ 1-3	掛圖或投影片
2.三角板	黑板用	1 組		
3.圓規	黑板用	1		
4.已習幾何性質	如課本第 9 頁，並附圖	1 組 (7 張)	1-1	

二、本章適用之教學媒體舉例

(一)幾何證明題範例——等腰三角形兩腰上的中線相等。

1.類別：投影片。

2.規格：多層式。

3.配合教材：1-2 綜合證題法。

4.來源：自製。

5.內容簡介：以例題說明怎樣分析及寫出「已知」和「求證」，並說明如何著手證明。

6.製圖說明：

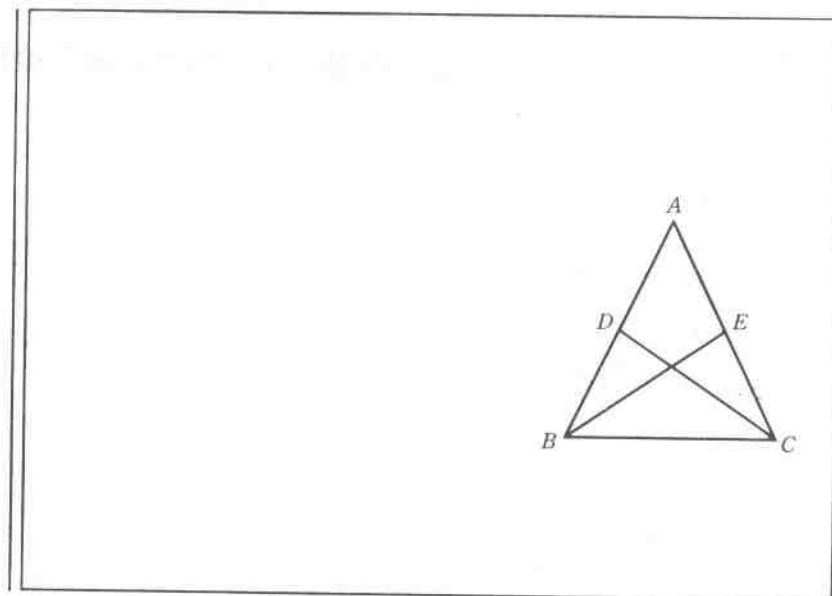
試證：等腰三角形兩腰上的中線相等。

(1)母片 0

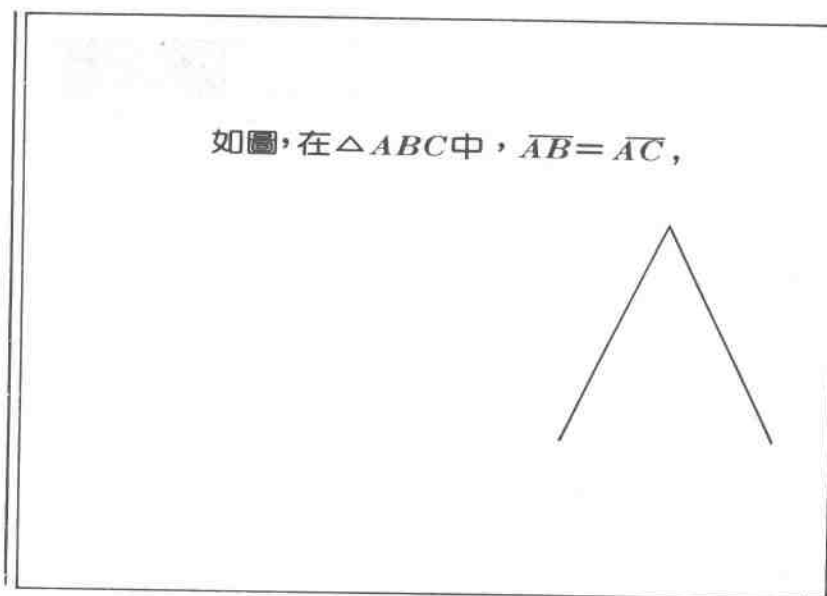
已知：

(2)疊片 1

(3) 疊片 2



(4) 疊片 3



(5) 疊片 4

$$\overline{AD} = \overline{DB}, \overline{AE} = \overline{EC}。$$

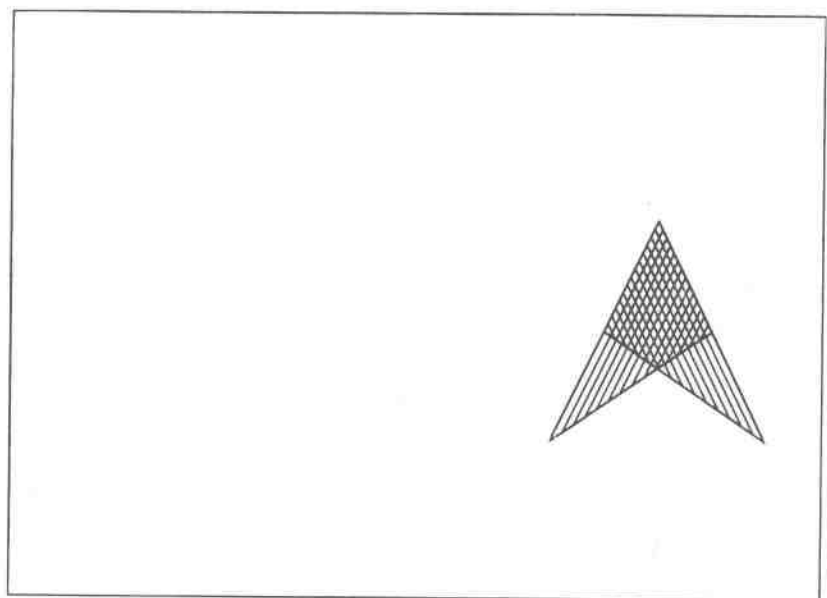


(6) 疊片 5

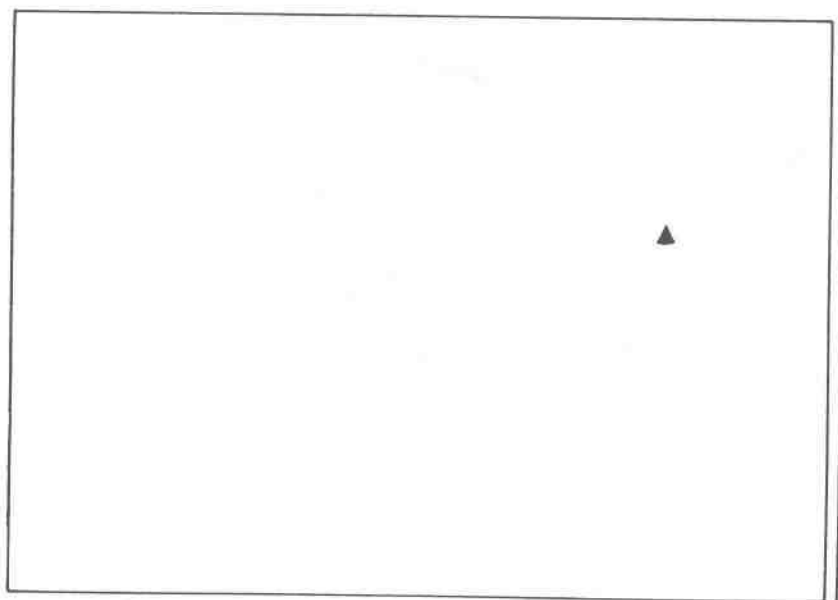
求證： $\overline{BE} = \overline{CD}。$



(7)疊片 6



(8)疊片 7



7.製作說明：

(1)黏貼方法從略。

(2)每項已知條件與求證都用不同顏色，與陰影部分的顏色配合。

8.使用說明：

(1)母片 0，疊上疊片 1，說明如何分析已知條件。

(2)疊上疊片 2，說明下一步驟為繪圖。

(3)依次疊上疊片 3 及 4，用式子列出已知條件。

(4)再疊上疊片 5，分析及列出求證。

(5)依次疊上疊片 6 及 7，說明推理過程。

陸、教學活動舉例

1-2 綜合證題法

教學時數：5 節

教師活動	教學活動流程圖	學生活動	備注
一、準備活動： 1.研讀課本第 1-2 節及教師手冊相關部分。 2.蒐集與本單元有關的資料。 3.準備教具：三角板、圓規、有色粉筆、投影片。 4.將學生按以前方式分組。	<pre> graph TD Start(()) --> Prep[教學前的準備] Prep --> Rev[復習] Rev --> QA[口頭回答] </pre>	1.研讀課本第 1-2 節。 2.復習本冊第 1-1 節及國中數學第二冊第 1-1 節和第 1-3 節。 3.準備用具：三角板（或直尺）、圓規、計算紙、平時測驗紙。	投影片的內容及製作方法，參考伍、教學媒體舉例中的二之(-)。 對於第(2)題，期望學生的回答如左，若學生回答“對應角相等，對應邊相等”，則
二、發展活動： 1.復習“三角形全等的意義及有關的性質”。 (1)指名學生口頭回答下列問題： ①兩個三角形全等的意義。 ② $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的邊和邊之間以及角和角之間有什麼		(1)口頭回答：當兩個三角形經過適當的搬動後，能處處疊合在一起時，我們就說這兩個三角形全等。 (2)口頭回答： $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\angle C = \angle F$ ， $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ ，	

關係時，我們就說這兩個三角形全等，而以符號“ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ”表示。

(2)指出由國中數學第一冊中已學過的利用尺規作圖的方法得知，不必要知道上面六個條件全部都對，只要證明若一部分對時，其他部分也一定對，所以兩三角形全等，這就是在第二冊中所學過的三角形全等性質。

(3)分別指名學生將學過的三角形全等性質說出來。

(4)將學生所說的正確性質一一寫在黑板上。

2.舉例說明如何以推理方法來證明一個幾何性質：

(1)問題：試證等腰三角形兩腰上的中線相等。

（或放投影片：母片0）

(2)指出步驟一為根據題意畫出草圖。然後以本題為例說明如何根據題意，畫出圖一。

（或放投影片：母片0，疊片2）

(3)指出步驟二為分析題目中什麼部分是問題的已知條件，什麼部分是所要證明的事實，並且盡量用數學式子把它們清楚的寫出來。然後以本題為例加以說明，並板書：已知：如圖一，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，

， $\overline{AC} = \overline{DF}$ 。

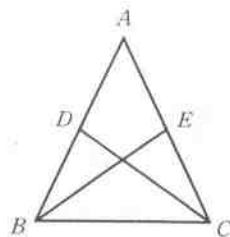
③分別將SAS、SSS、ASA、AAS 四個三角形全等性質說出。

提供教材

聆聽並筆記重點。

要求該生再說清楚，那一個角與那一個角對應，那一個邊與那一個邊對應。（可能學生說的不是 $\angle A$ 對 $\angle D$ ， $\angle B$ 對 $\angle E$ ， $\angle C$ 對 $\angle F$ ，但只要合理即可）。

此處亦可先指名一位學生說，說不完整時再由別的學生加以補充。



圖一

要強調圖一中的符號A、B、C、D、E是自己決定的。