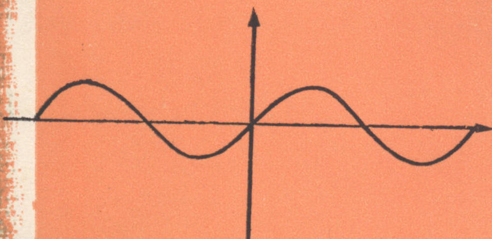
·高中学生数学读物·

三角方程的解法

黄 水 源



福 建 教 育 出 版 社

三角方程的解法

黄水源编

福建教

三角方程的解法

黄水源

出　版：福建教育出版社
发　行：福建省新华书店
印　刷：长乐县印刷厂

开本787×1092　1/32　4.125印张　84千字
1986年12月第一版　1986年12月第一次印刷
印数：1—8100

书号：7159·1168　　定价：0.65元

内 容 提 要

为了帮助中学生学好三角方程的课程，本书介绍三角方程的基本概念、图象、性质、基本运算以及三角方程的主要类型。对每类三角方程，介绍了有实用价值的解题途径和思考方法。本书还深入讨论了增（减）根问题和解集的等价问题，同时配有适量的习题（附有参考答案或提示），供读者自学时练习思考。

本书可供高中学生课外阅读，也可供中学教师阅读参考。

前　言

三角方程是中学数学课的重要内容之一，也是难点之一，尤其是反三角函数定义的建立、主值和主值区间的选择，通值公式的运用及其性质的理解等更是使人感到困惑。而三角方程的解法多样，课本编入的范例均系浅显，学生做习题时往往碰到困难。

为了帮助中学生克服上述的困难，我把三十多年讲授这部教材所收集的资料和研究心得整理成书，并对编入的范例提出有实用意义的解题途径和思考方法。

本书内容共两部分：第一部分是基本概念和基础知识（即反三角函数的概念、图象、性质及其基本运算）；第二部分为主要类型的三角方程的解法和综合应用。并配备一定数量的习题，供读者自学时练习和思考。最后附有练习和习题的参考答案或提示，交待思路和解法要领作为读者巩固知识和检验学习效果之用。

由于编者水平有限，书中难免有错漏和不妥之处，请读者批评指正。

本书底稿的完成，承蒙晋江养正中学杨景星及南安一中吴业枢两同志提供宝贵意见和精心校核，在此谨致谢意。

编　者

目　录

一　基础知识和基本概念

（一）反三角函数的概念、图象和性质

对于三角函数来说，在实际计算中经常遇到两类相反的问题：一类是由已知角求出这个角的三角函数值，另一类是由已知三角函数的值反过来求出角的大小。例如，在偏心驱动机构中，活塞运动规律是：

$$y = r\sin\alpha,$$

现在要求当活塞位于 $y = y_0$ 处，偏心销转过的角 α 是多少度？这就是反三角函数的问题。下面我们要研究如何给出反三角函数的定义，并探讨它的基本性质和各种运算等，以便为三角方程的求解打好基础。

.1反正弦

我们已知正弦函数 $y = \sin x$ 的定义域是：$x \in (-\infty, +\infty)$，值域是：$y \in [-1, +1]$。对于x的每一个值，y有

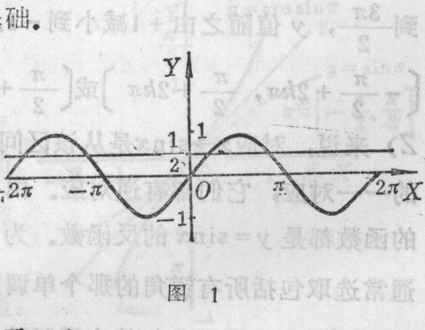


图　1

唯一的一个值和它对应。反过来，对于 y 的每一个值，x 却有无数个值和它对应。由函数 $y = \sin x$ 的图象（如图 1）可

以看出当 $y=\frac{1}{2}$ 时，就有 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ ($k\in Z$)和它对应。可知 $y=\sin x$ 在定义域：$(-\infty, +\infty)$ 内是多对一的，所以逆对应不是单值对应。为了使给定 y 的一个值，x 也有一个确定的值和它对应，我们可以适当地把 $x\in(-\infty, +\infty)$ 划分为闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 及闭区间 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$，……(其中 $k\in Z$)。这样，在每一个闭区间上都是 $y=\sin x$ 的单调区间，在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 上函数 $y=\sin x$ 的曲线是上升的，它是增函数。例如，在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上当 x 值由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$，y 值由 -1 随之增到 $+1$；在闭区间 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$（其中 $k\in Z$）上 $y=\sin x$ 的曲线是下降的，它是减函数。例如，在闭区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上，当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$，y 值随之由 $+1$ 减小到 -1。因此，对每一个闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 或 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$（$k\in Z$）来说，对应 $x\to\sin x$ 是从该区间到闭区间 $[-1, +1]$ 上的一一对应，它们都有逆对应。由其中每一个逆对应所确定的函数都是 $y=\sin x$ 的反函数。为了研究和使用上的方便，通常选取包括所有锐角的那个单调区间即 $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ 为主值区间。这样，我们给出反正弦函数的定义，并研究其图象、性质如下：

①定义：我们约定正弦函数 $y=\sin x$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数叫做反正弦函数，简称反正弦，记作

$$x=\arcsin y,$$

这里，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，$y\in[-1,\ +1]$。但习惯上总是用 x 表示自变量，y 表示函数，记作：

$$y=\arcsin x,$$

式中，$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，$x\in[-1,\ +1]$。并规定：符号 $\arcsin x$ 叫做反正弦的主值，闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 称为主值区间（即反正弦的值域），而闭区间 $[-1,\ +1]$ 称为反正弦的定义域。

若 $|x|>1$，则 $\arcsin x$ 不存在。因此，对于 $|x|\leqslant 1$ 不等式

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$$

成立，同时有：

$$\sin(\arcsin x)=x$$

（其中 $x\in[-1,\ +1]$）。

②图象：反正弦 $y=\arcsin x$ 与函数 $y=\sin x$ 的图象是关于直线 $y=x$ 对称的图形（如图2所示）。

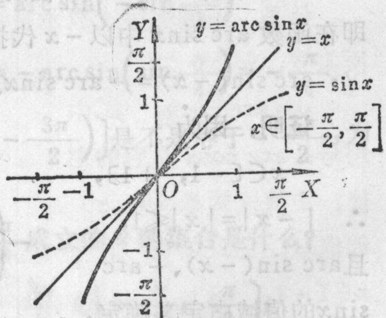


图 2

例 1　求下列各式的值：

（1）$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$；

(3) $\arcsin 3$。

解：(1) 在闭区间$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$上正弦的值等于$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$的角是$\dfrac{\pi}{3}$，即$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以，$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$。

(2) 在闭区间$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$上正弦的值等于$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$的角是$\dfrac{\pi}{12}$，即$\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$，所以，

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

(3) $\because\ 3\notin[-1, +1]$，$\therefore\ \arcsin 3$不存在。

③性质：

1° 函数$y=\arcsin x$在闭区间$[-1, +1]$上是递增的$\left(\text{即}\ x\ \text{从}-1\ \text{到}\ 1, y\ \text{从}-\dfrac{\pi}{2}\text{到}\dfrac{\pi}{2}\right)$。

2° 函数$y=\arcsin x$在闭区间$[-1, +1]$上是奇函数，即在函数$\arcsin x$中以$-x$代换x恒有等式：

$\arcsin(-x)=-\arcsin x$。

证明：因为

$x\in[-1, +1]$，

$\therefore\ |-x|=|x|\leqslant 1$，

且$\arcsin(-x)$、$-\arcsin x$的值域由定义确定，

$\therefore \sin[\arcsin(-x)]=-x$。

又由三角诱导公式，有：

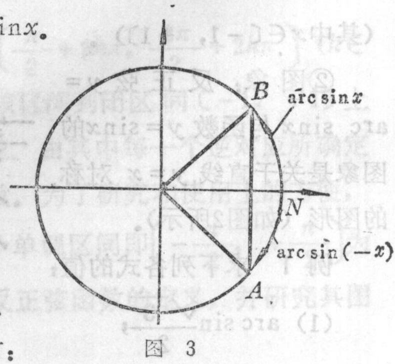


图 3

$\sin[-\arcsin x] = -\sin[\arcsin x] = -x$,

$\therefore \quad \arcsin(-x) = -\arcsin x$.

所以说，函数 $y=\arcsin x$ 是奇函数。

它的几何意义如图3所示。但是，必须注意：由 $y=\sin x$ 可得 $x=\arcsin y$，若把 y 换成 $\sin x$ 得到：$\arcsin[\sin x]=x$，就不一定正确。因为 x 可能不在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$内，如果 $x\notin\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$时，可用三角诱导公式求出：$\sin x'=\sin x$，使得其中 $x'\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，那么 $\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin x')=x'$ 就是正确的了。例如，

$$\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

例 2　计算。

(1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；(2) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)$。

解：(1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$；

(2) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$=-\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

例 3　(1) $\arcsin\left[\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right]$是不是等于$-\frac{3\pi}{2}$，为什么？

(2) 使$\arcsin(\sin x)=\frac{\pi}{6}$成立的 x 的集合是什么？

解：(1) 不等于，因为$-\frac{3\pi}{2}\notin\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；

(2) 使$\arcsin(\sin x)=\frac{\pi}{6}$成立的 x 的集合是$\{x$：x

$=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in Z$)。

2。反余弦

仿(1)的论述知，函数 $y=\cos x$ 在其定义域：$x\in(-\infty,+\infty)$ 内没有反函数。从函数 $y=\cos x$ 的图象

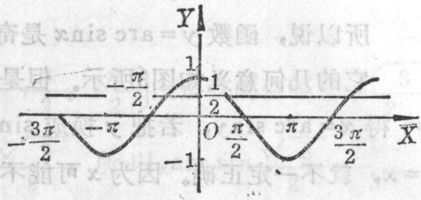


图 4

（如图4）可以看出：$y=\frac{1}{2}$，对应的 $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k\in Z)$ 的值有无数个。但是，如果把 x 的值约束在闭区间 $[0,\ \pi]$ 上，y 的值从1减小到 -1，那么余弦函数 $y=\cos x$ 在闭区间 $[0,\ \pi]$ 上是单调递减的。因此，它的反函数是存在的。所以，我们给出反余弦的定义如下：

①定义：通常把余弦函数 $y=\cos x$ 在闭区间 $[0,\ \pi]$ 上的反函数叫做反余弦函数，简称反余弦，记作：

$x=\arccos y$，其中 $x\in[0,\ \pi]$，$y\in[-1,\ +1]$。

但是，习惯上用 x 表示自变量，y 表示其函数，这样的反余弦，记作：

$y=\arccos x$，其中符号：$\arccos x$ 是它的主值，主值区间是 $[0,\ \pi]$ 即值域。定义域是：$x\in[-1,\ +1]$。

若 $|x|>1$，则 $\arccos x$ 不存在。

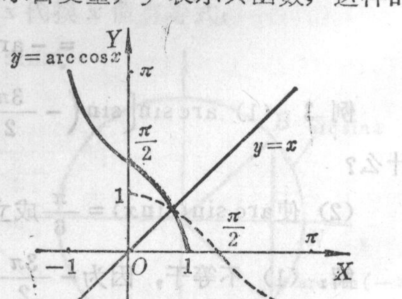


图 5

若 $|x|\leqslant 1$，则 $0\leqslant \arccos x\leqslant \pi$，

且 $\cos(\arccos x)=x$ （其中 $x\in[-1, 1]$）。

②图象：函数 $y=\arccos x$ 与 $y=\cos x$ 的图象（如图 5 所示）是关于直线 $y=x$ 对称的图形。

③性质：

1° 函数 $y=\arccos x$ 在闭区间$[-1, 1]$上是单调递减的（即 y 从 π 减小到0）；

2° $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$，其中 $\arccos(-x)\in[0, \pi]$，$x\in[-1, 1]$。

证明：由已知 $-1\leqslant x\leqslant 1$，

$\therefore \quad \cos[\arccos(-x)]=-x$。

又由三角诱导公式，有：

$\cos[\pi-\arccos x]$

$=-\cos(\arccos x)=-x$。

$\therefore \quad \arccos(-x)$

$=\pi-\arccos x$。

这个性质表明反余弦既不是偶函数，也不是奇函数，它的几何意义如图 6 所示。

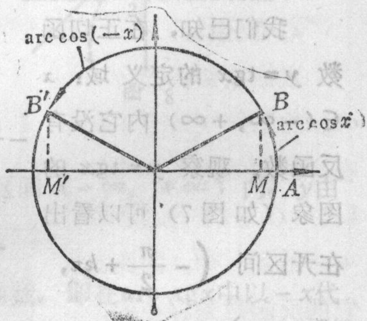


图 6

例 4 求下列各式的值：

(1) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$；

(2) $\arccos 5$；

(3) $\arccos\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}\right)$；

(4) $\arccos(-0.6841)+\arcsin(-0.6517)$。

解：(1) 由性质2°有：

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{2\pi}{3};$$

(2) ∵ $5\notin[-1,\ 1]$， ∴ $\arccos 5$ 不存在；

(3) $$\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)=\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\pi-\arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{2\pi}{3};$$

(4) 原式 $=(180°-46°50')-40°40'=92°30'$。

3．反正切

我们已知，在正切函数 $y=\mathrm{tg}x$ 的定义域：$x\in(-\infty,+\infty)$ 内它没有反函数。观察 $y=\mathrm{tg}x$ 的图象（如图 7）可以看出在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in Z)$ 内它是增函数。而且在 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 到 $y\in(-\infty,\ +\infty)$ 的对应 $x\to\mathrm{tg}x$ 是一一对应的。因此，我们给出反正切的定义如下：

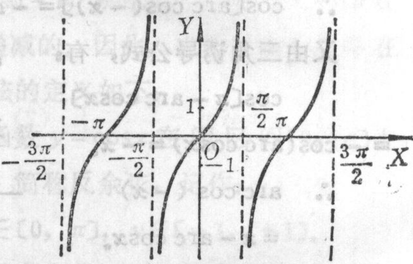


图 7

①定义：函数 $y=\mathrm{tg}x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数叫做反正切函数，简称反正切，记作

$$x=\mathrm{arc\,tg}y，其中\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),y\in(-\infty,+\infty).$$

但是，习惯上用 x 表示自变量，以 y 表示函数，于是反正切可以记作：

$y=\text{arc tg}x$，其中定义域是：$(-\infty,\ +\infty)$，值域（即主值区间）是：$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$。符号 arc tg$x$ 叫做反正切的主值，

$$-\frac{\pi}{2}<\text{arc tg}x<\frac{\pi}{2},$$

它的正切等于 x，即

$\text{tg}(\text{arc tg}x)=x$（其中 $x\in(-\infty,\ +\infty)$）。

②图象：图 8 表示反正切 $y=\text{arc tg}x$ 与正切 $y=\text{tg}x$ 的图象是关于直线 $y=x$ 对称的图形。

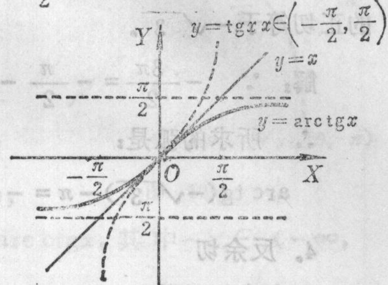


图 8

③性质：

1° 函数 $y=\text{arc tg}x$ 在开区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 内，y 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增到 $\frac{\pi}{2}$ $\left(\pm\frac{\pi}{2}\text{两点除外}\right)$。

2° 函数 $y=\text{arc tg}x$ 是奇函数，即在 arc tg$x$ 中以 $-x$ 代换 x 恒有等式：

$$\text{arc tg}(-x)=-\text{arc tg}x.$$

证明：仿反正弦的性质 2°（兹略）。

例 5 求下列各式的值

(1) $\text{arc tg}\frac{\sqrt{3}}{3}+\text{arc tg}(-1)+\text{arc tg}\left(\text{tg}\frac{7\pi}{6}\right)$；

(2) $\text{tg}[\text{arc tg}(-\sqrt{3})]+\lim\limits_{x\to\infty}(\text{arc tg}x)$。

解：(1) 原式$=\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12};$$

(2) 原式$=\operatorname{tg}(-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3})+\frac{\pi}{2}=-\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}$。

例 6　在开区间$\left(-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\right)$内找出一个弧，使它的正切等于$-\sqrt{3}$。

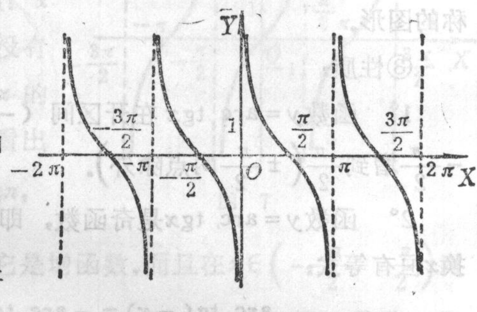
解：$\because\quad -\frac{3\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}-\pi,\ -\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\pi,$

$\therefore$　所求的弧是：

$$\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})-\pi=-\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{4\pi}{3}。$$

4。反余切

观察余切函数 $y=\operatorname{ctg}x$的图象（如图 9）在开区间（$0+k\pi$，$\pi+k\pi$）（$k\in Z$）y的值由$+\infty$减到$-\infty$。因此，它的反函数是存在的，并且都是减函数。在开区间（0，π）上 y取得



图

所能取的一切值，并且每给定y一个值，x也有确定的值和它对应。所以，我们给出反余切的定义如下：

①定义：函数$y=\operatorname{ctg}x$在开区间（0，π）的反函数叫做反余切函数，简称反余切，记作：

$x=\operatorname{arc\,ctg}y$，其中$x\in$（0，$\pi$），$y\in$（$-\infty$，$+\infty$）。