高等职业教育"十二五"创新型规划教材

一元微积分及其应用

Yiyuan weijifen jiqi yingyong

◎ 冯国勇 贾青慧 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十二五”创新型规划教材

一元微积分及其应用

冯国勇　贾青慧　主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结高职院校教改经验的基础上编写而成的。本书坚持贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，贴近高职院校学生数学的实际水平，在保证科学性的基础上，注意讲清概念，减少数学理论的推证，阐述清晰、通俗、易懂，注重对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养，强调数学的应用模块，同时注意学生自学能力和自我提高能力的培养。

本书主要内容包括三大模块，分别为：基础模块：函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分；应用模块：导数的应用、定积分的应用、常微分方程；提高模块：无穷级数、数学模型简介。

本书可作为高职院校各专业学生（一元微积分必修内容）的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

一元微积分及其应用/冯国勇，贾青慧主编. —北京：北京理工大学出版社，2010. 8

ISBN 978－7－5640－3617－1

Ⅰ. ①一…　Ⅱ. ①冯…②贾…　Ⅲ. ①微积分-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 156281 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http: // www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京市通州富达印刷厂
开　　本 / 710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 / 15. 75
字　　数 / 293 千字
版　　次 / 2010 年 8 月第 1 版　　2010 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 / 1～4000 册　　责任校对　陈玉梅
定　　价 / 28. 00 元　　责任印制　边心超

前　言

高等数学是高职院校必修的一门公共基础课，是学生学习有关专业知识和技术，提高文化素质及培养逻辑思维能力的重要基础。

本书是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结高职院校教改经验的基础上编写的。本书坚持贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，贴近高职院校学生数学的实际水平，在保证科学性的基础上，注意讲清概念，减少数学理论的推证，阐述清晰、通俗、易懂，注重对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养，强调数学的应用模块，同时注意学生自学能力和自我提高能力的培养。

本教材主要特点为：

1. 教材具体内容贴近高职院校学生数学的实际水平，以必需、够用为度，阐述清晰、通俗、易懂，分基础模块、应用模块、提高模块等三个模块选择进行模块化教学；

2. 教材中加大对学生应用能力的培养，注重加强数学的实际应用，课堂练习、习题两块由浅入深，循序渐进；

3. 教材中注意从源于实际的问题引入基本概念；

4. 加入本章精粹内容，将本章知识要点和计算技巧高度概括；

5. 加入提高模块，注意学生自学能力和自我提高能力的培养，尤其加入数学模型简介章节内容，让学生初步了解数学建模的思想，把数学这一工具融入到学生的生活实践中。

本书主要内容包括：

基础模块：函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分；

应用模块：导数的应用、定积分的应用、常微分方程；

提高模块：无穷级数、数学模型简介。

本教材主编为兰州资源环境职业技术学院的冯国勇副教授、贾青慧副教授，第三、四、六、八章由冯国勇执笔；第一、二、五、七、九章由贾青慧执笔，全书由冯国勇统稿。在本书编写过程中，编者参阅了一些教材和著作，并得到了兰州资源环境职业技术学院的有关领导与老师的大力支持和建议，在此表示衷心的感谢。

本书编写时间匆促，又限于编者的水平，书中难免存在缺点和错误，恳请有关专家及使用本书的师生批评指正。

编　者

目 录

基础模块

应 用 模 块

提 高 模 块

基础模块

第一章 极限与连续

函数的极限与连续是高等数学研究的理论基础.本章在复习、加深和拓宽函数的有关知识的基础上,介绍函数极限的概念,讨论函数的极限运算和连续性,为以后的学习奠定必要的基础.

§1.1 函 数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义1 设 D 为一个非空实数集合,如果存在确定的对应法则 f,使对于数集 D 中的任意一个数 x,按照 f 都有确定的实数 y 与之对应,则称 y 是定义在集合 D 上的 x 的函数,记作 $y=f(x)$. x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为函数的**定义域**,$M=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数的**值域**.

如果对于每一个 $x\in D$,都仅有一个 $y\in M$ 与之对应,则称这种函数为**单值函数**.如果对于一个给定的 $x\in D$,有多个 $y\in M$ 与之对应,则称这种函数为**多值函数**.一个多值函数通常可看成是由一些单值函数组成的.在本教材中,若无特别的说明,我们约定函数是单值的.

函数 $y=f(x)$在 $x=x_0\in D$ 点,对应的函数值记为 $f(x_0)$,即

$$f(x_0)=f(x)\big|_{x=x_0}.$$

例1 确定函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$的定义域,并求 $f(3)$,$f(t^2)$.

解 该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0,\\ x-2>0\end{cases}$$

的 x 值的全体.解此不等式组,得 $2<x\leqslant 3$.故该函数的定义域为

$$D=\{x\mid 2<x\leqslant 3\}=(2,3];$$

$$f(3)=\sqrt{3+2\times 3-3^2}+\ln(3-2)=\ln 1=0;$$

$$f(t^2)=\sqrt{3+2t^2-t^4}+\ln(t^2-2).$$

2. 函数的表示法

一般说来,函数的表达方式有三种:公式法(以数学式子表示函数的方法)、表

格法(以表格形式表示函数的方法)和图示法(以图形表示函数的方法).

还会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示的情形,这样的函数称为**分段函数**.

例 2 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

求其定义域、值域及 $f(2)$、$f(0)$ 和 $f(-2)$.

解 定义域 $D=(-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$;

值域 $M=\{1,0,-1\}$;

因为 $-2\in(-\infty,0)$, $0\in\{0\}$, $2\in(0,+\infty)$,

所以 $f(-2)=-1$, $f(0)=0$, $f(2)=1$.

这里的 $f(x)$ 又称为**符号函数**,记为 $\operatorname{sgn}x$.

例 3 绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

求其定义域、值域.

解 定义域 $D=(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$;值域 $M=[0,+\infty)$.

运用符号函数可以将绝对值函数记为 $f(x)=|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$.

3. 反函数

定义 2 设有函数 $y=f(x)$,其定义域为 D,值域为 M,如果对于 M 中的每一个 y 值($y\in M$),都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值($x\in D$)与之对应,那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,它的定义域为 M,值域为 D.

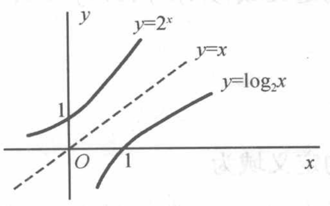


图 1-1

习惯上,函数的自变量都以 x 表示,所以反函数也可以表示为 $y=f^{-1}(x)$. 函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 4 函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数,则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y=x$ 对称的. 如图 1-1 所示.

二、函数的基本特性

1. 奇偶性

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称,如果对于定义域中的任何

x,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$为**偶函数**;如果对于定义域中的任何 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$为**奇函数**. 不是偶函数也不是奇函数的函数,称为**非奇非偶函数**.

几何特征:奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 5 判断函数 $f(x)=\cos x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性.

解 因为该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且有

$$f(-x)=\cos(-x)\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=-\cos x\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$

所以 $f(x)=\cos x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

2. 单调性

定义 4 设函数 $y=f(x)$,x_1,x_2 为区间(a,b)内的任意两个数. 当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称该函数在区间(a,b)内单调增加,或称递增;当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称该函数在区间(a,b)内单调减少,或称递减.

几何特征:单调增加函数的图形沿横轴正向上升,单调减少函数的图形沿横轴正向下降.

3. 有界性

定义 5 设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义,若存在一个正数 M,当 $x\in I$ 时,恒有$|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $y=f(x)$为 I 上的**有界函数**;如果不存在这样的正数 M,则称函数 $y=f(x)$为 I 上的**无界函数**.

几何特征:如果 $y=f(x)$是区间 I 上的有界函数,那么它的图形在 I 上必介于两平行线 $y=\pm M$之间.

应当指出:有的函数可能在其定义域的某一部分内有界,而在另一部分无界. 因此,我们说一个函数是有界的或是无界的,应同时指出其自变量的相应范围.

例如,$y=\tan x$ 在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上是有界的,但在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是无界的.

4. 周期性

定义 6 对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个不为零的正数 L,使得对于定义域内的一切 x,等式 $f(x+L)=f(x)$都成立,则 $y=f(x)$叫做**周期函数**,L 叫做这个函数的**周期**.

我们常说的某个函数的周期通常指的是它的最小正周期.

例如,$y=\sin x$,$y=\tan x$ 的周期分别为 2π,π.

三、复合函数

定义 7 若 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量.

应当指出：并非任何两个函数都可构成复合函数.

例 6 函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 是不能复合成一个函数的.

因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中的任何 x 值所对应的 u 值（都大于或等于 2），都使 $y=\arcsin u$ 没有定义.

对于复合函数，我们需弄清两个问题，那就是“复合”和“分解”. 所谓“复合”，就是把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，该过程也就是把中间变量依次代入的过程；所谓“分解”，就是把一个复合函数分解为几个简单函数，而这些简单函数往往都是基本初等函数，或是基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数.

例 7 试将函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 复合成一个函数.

解 将 $u=1-x^2$ 代入 $y=\sqrt{u}$，即得所求的复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，其定义域为 $[-1,1]$.

例 8 已知 $y=\ln u, u=\sin v, v=x^2+1$，试把 y 表示为 x 的函数.

解 将中间变量依次代入：$y=\ln u=\ln\sin v=\ln\sin(x^2+1)$，所得函数即为所求复合函数 $y=\ln\sin(x^2+1)$.

例 9 指出函数 $y=\cos^2 x$ 是由哪些函数复合而成的.

解 令 $u=\cos x$，则 $y=u^2$，所以 $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\cos x$ 复合而成的.

例 10 指出函数 $y=\sqrt{\ln(\sin x+2^x)}$ 是由哪些函数复合而成的.

解 令 $u=\ln(\sin x+2^x)$，则 $y=\sqrt{u}$，再令 $v=\sin x+2^x$，则 $u=\ln v$.

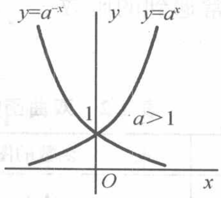
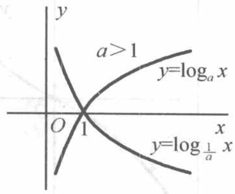
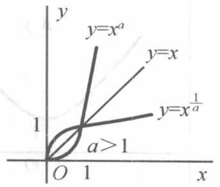
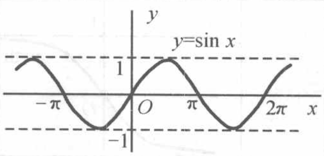
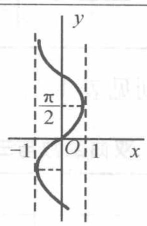
所以 $y=\sqrt{\ln(\sin x+2^x)}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=\sin x+2^x$ 复合而成的.

四、初等函数

1. 基本初等函数

最常用的基本初等函数有 5 种，分别是：幂函数 $y=x^a$、指数函数 $y=a^x\,(a>0$ 且 $a\neq1)$、对数函数 $y=\log_a x\,(a>0$ 且 $a\neq1)$、三角函数（如正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$）及反三角函数（如反正弦函数 $y=\arcsin x$ 和反正切函数 $y=\arctan x$）. 见表 1-1.

表 1-1 基本初等函数

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
指数函数	$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$		(a) 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$； (b) 当 $a>1$ 时，在定义域内单调增，当 $0<a<1$ 时，在定义域内单调减； (c) 其图像过点 $(0,1)$
对数函数	$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$		(a) 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$； (b) 当 $a>1$ 时，在定义域内单调增，当 $0<a<1$ 时，在定义域内单调减； (c) 其图像过点 $(1,0)$
幂函数	$y=x^a$ a 为任意实数	 这里只画出部分函数图形的一部分	(a) 其定义域因 a 而异； (b) 图像过点 $(0,0)$
三角函数	$y=\sin x$(正弦函数) 这里只写出了正弦函数		(a) 正弦函数以 2π 为周期； (b) 正弦函数是奇函数； (c) 正弦函数是有界函数 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$
反三角函数	$y=\arcsin x$(反正弦函数) 这里只写出了反正弦函数		(a) 其定义域为 $[-1,1]$； (b) 由于此函数为多值函数，因此把函数值限制在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上，并称其为反正弦函数的主值

2. 初等函数

由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算及有限次的函数复合所产生，并且能用一个解析式表示出的函数称为**初等函数**.

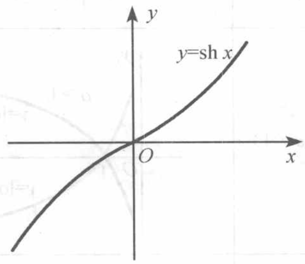
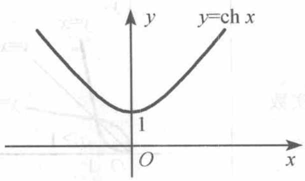
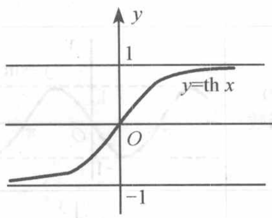
初等函数是高等数学的主要研究对象. 注意，分段函数一般不是初等函数. 但是，由于分段函数在其定义域的各个子区间上常由初等函数表示，故仍可通过初等函数来研究它们.

3. 双曲函数

下面介绍一种应用中经常遇到的函数——双曲函数.

(1) 双曲函数见表 1-2.

表 1-2　双曲函数

函数的名称	函数的表达式	函数的图形	函数的性质
双曲正弦	$\mathrm{sh}\,x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$		(a) 其定义域为$(-\infty,+\infty)$; (b) 是奇函数; (c) 在定义域内单调增
双曲余弦	$\mathrm{ch}\,x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$		(a) 其定义域为$(-\infty,+\infty)$; (b) 是偶函数; (c) 其图像过点$(0,1)$
双曲正切	$\mathrm{th}\,x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$		(a) 其定义域为$(-\infty,+\infty)$; (b) 是奇函数; (c) 其图形夹在水平直线 $y=1$ 及 $y=-1$ 之间;在定域内单调增

双曲函数与三角函数的区别见表 1-3.

表 1-3　双曲函数与三角函数的区别

双曲函数的性质	三角函数的性质
$\mathrm{sh}\,0=0,\mathrm{ch}\,0=1,\mathrm{th}\,0=0$	$\sin 0=0,\cos 0=1,\tan 0=0$
$\mathrm{sh}\,x$ 与 $\mathrm{th}\,x$ 是奇函数,$\mathrm{ch}\,x$ 是偶函数	$\sin x$ 与 $\tan x$ 是奇函数,$\cos x$ 是偶函数
$\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1$	$\sin^2 x+\cos^2=1$
都不是周期函数	都是周期函数

双曲函数也有和差公式:

$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y$;

$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y$;