



高考密码系列丛书
GAOKAOMIMAXILIECONGSHU



2011高中总复习

高考密码

丛书策划 / 十年高考教育研究院 丛书主编 / 任志鸿

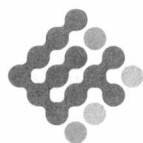


文科数学



云南出版集团公司
云南教育出版社

打造中国高考第一原创品牌
2011



高考密码系列丛书
GAOKAOMIMAXILIECONGSHU



2011高中总复习

高考密码

丛书策划 / 十年高考教育研究院 丛书主编 / 任志鸿

主 编：管目军

副主编：宋克金 王金芳 安振平

编 委：袁海燕 李新星 赵先举

孙小明 胡大波 苗立国

文科数学

云南出版集团公司
云南教育出版社

打造中国高考第一原创品牌
2011

图书在版编目(CIP)数据

高考密码:大纲版.文科数学/任志鸿主编. —昆明:云南教育出版社,2009.3(2010.3重印)

ISBN 978-7-5415-3758-5

I. 高… II. 任… III. 数学课—高中—升学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 030819 号

丛书主编:任志鸿

责任编辑:杨顺枫

封面设计:邢 丽

高考密码系列丛书

2011 高中总复习·高考密码·大纲版·数学

出	版:云南出版集团公司 云南教育出版社
地	址:昆明市环城西路 609 号 邮编:650034
电	话:0871-4120382
印	刷:山东滨州汇泉印务有限公司
开	本:890×1240 1/16
印	张:23
字	数:808 千字
版	次:2010 年 3 月第 2 版
印	次:2010 年 3 月第 1 次印刷
书	号:ISBN 978-7-5415-3758-5

定 价:59.80 元

(如有印装质量问题请与承印厂调换)

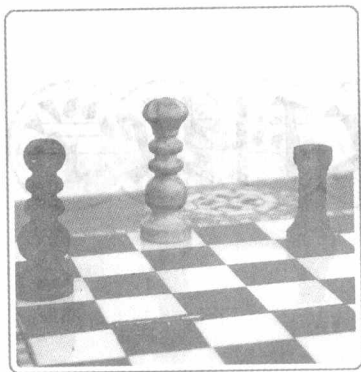
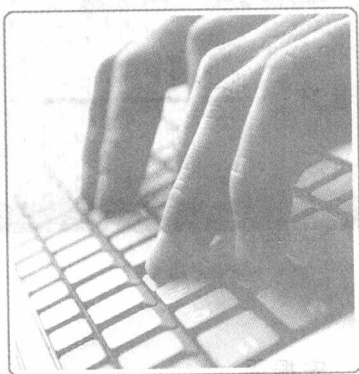
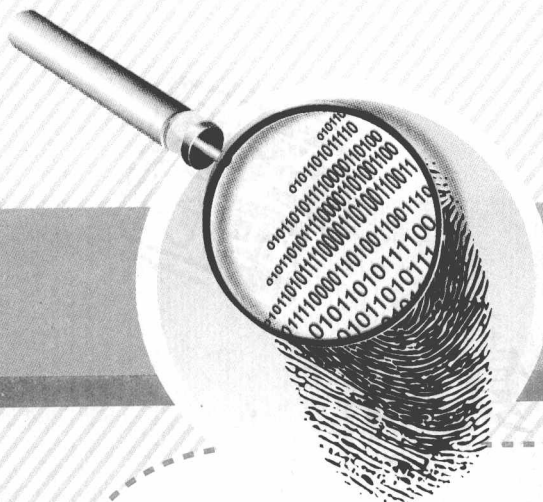
Contents

高考密码系列丛书

GAO KAO MI MA XI LIE CONG SHU

目录

第一章 集合与简易逻辑	1
§ 1.1 集合与集合之间的关系	1
§ 1.2 集合的基本运算	3
§ 1.3 逻辑联结词和充要条件	6
章末提升检测(一)(活页试卷)	
第二章 函 数	9
§ 2.1 映射、函数及反函数	9
§ 2.2 函数的定义域与解析式	12
§ 2.3 函数的值域与最值	14
§ 2.4 函数的单调性	16
§ 2.5 函数的奇偶性与周期性	18
§ 2.6 二次函数	20
§ 2.7 指数函数和对数函数	22
§ 2.8 函数的图象及其变换	25
§ 2.9 函数的综合应用	28
章末提升检测(二)(活页试卷)	
第三章 数 列	31
§ 3.1 数列的概念	31
§ 3.2 等差数列	33
§ 3.3 等比数列	35
§ 3.4 数列的通项公式及求和	37
§ 3.5 数列的综合应用	39
章末提升检测(三)(活页试卷)	
第四章 三角函数	42
§ 4.1 角的概念与任意角的三角函数	42
§ 4.2 同角三角函数基本关系式与诱导公式	44
§ 4.3 两角和与差的三角函数	46
§ 4.4 二倍角的正弦、余弦和正切公式	48
§ 4.5 三角函数的化简、求值和证明	50
§ 4.6 三角函数的图象与性质(一)	52
§ 4.7 三角函数的图象与性质(二)	54
章末提升检测(四)(活页试卷)	



Contents 高考密码

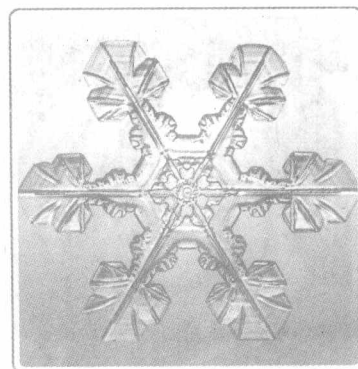
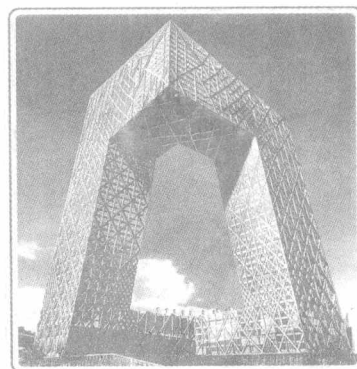
● <<<<<<< GAO KAO MI MA

第五章 平面向量	57
§ 5.1 平面向量的概念及线性运算	57
§ 5.2 平面向量的坐标运算	59
§ 5.3 平面向量的数量积	61
§ 5.4 线段的定比分点与图形的平移	63
§ 5.5 解斜三角形及应用举例	64
章末提升检测(五)(活页试卷)	

第六章 不等式	67
§ 6.1 不等式的概念与性质	67
§ 6.2 绝对值不等式与一元二次不等式	69
§ 6.3 算术平均数与几何平均数	72
§ 6.4 不等式的证明	74
§ 6.5 不等式的解法	76
§ 6.6 不等式的应用	78
章末提升检测(六)(活页试卷)	

第七章 直线和圆的方程	81
§ 7.1 直线的方程	81
§ 7.2 两条直线的位置关系	84
§ 7.3 简单的线性规划及其应用	86
§ 7.4 圆的方程	89
§ 7.5 直线与圆的位置关系	91
章末提升检测(七)(活页试卷)	

第八章 圆锥曲线方程	93
§ 8.1 椭圆	93
§ 8.2 双曲线	96
§ 8.3 抛物线	98
§ 8.4 直线和圆锥曲线的位置关系	101
§ 8.5 轨迹与方程	103
§ 8.6 圆锥曲线的综合问题	105
章末提升检测(八)(活页试卷)	



高考密码

Contents

GAO KAO MI MA >>>>>> ●



第九章 直线、平面、简单几何体	108
§ 9.1 平面与空间直线	108
§ 9.2 直线、平面平行的判定及其性质	110
§ 9.3 直线、平面垂直的判定及其性质	114
§ 9.4 空间向量及其运算	116
§ 9.5 立体几何中的向量方法——平行与垂直	119
§ 9.6 空间角	121
§ 9.7 空间距离	125
§ 9.8 棱柱与棱锥	127
§ 9.9 多面体与球	130

章末提升检测(九)(活页试卷)

第十章 排列、组合与二项式定理	132
§ 10.1 分类计数原理与分步计数原理	132
§ 10.2 排列、组合及其应用	134
§ 10.3 二项式定理及应用	136

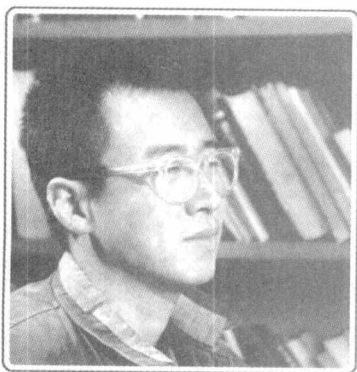
章末提升检测(十)(活页试卷)

第十一章 概 率	138
§ 11.1 随机事件的概率	138
§ 11.2 互斥事件有一个发生的概率	140
§ 11.3 相互独立事件同时发生的概率	142

章末提升检测(十一)(活页试卷)

第十二章 统 计	145
§ 12.1 抽样方法与总体分布的估计	145
§ 12.2 总体期望值和方差的估计	148

第十三章 导 数	150
§ 13.1 导数的概念及其运算	150
§ 13.2 导数的应用	152



第一章

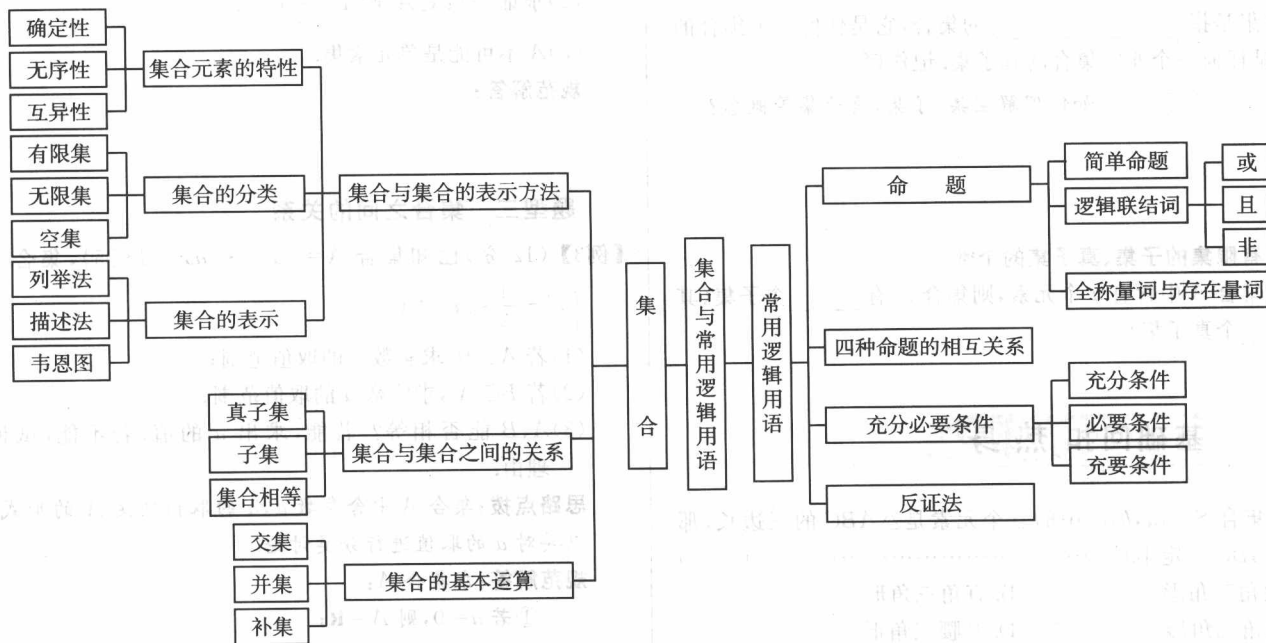
集合与简易逻辑

知识

• TIXIGOUJIAN •

ZHISHI

体系构建



§ 1.1 集合与集合之间的关系

考纲目标 锁定

KAOGANGMUBIAOSUODING

1. 理解集合、子集的概念.
2. 了解空集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义.
3. 掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

知识要点 梳理

ZHISHIYAO DIANSHULI

1. 集合的概念

(1) 集合的概念:某些指定的对象集在一起就构成一个集合,简称集.集合中的每个对象叫做这个集合的元素.

(2) 集合的分类:根据集合中元素的多少,可以分为三类:有限集、无限集、空集.

(3) 元素与集合之间的关系:若 a 是集合 A 的元素,记作 $a \in A$;若 b 不是集合 A 的元素,记作 $b \notin A$.

(4) 元素的特征:① 确定性、② 互异性、③ 无序性.

(5) 常用数集及其记法:自然数集,记作 $\mathbb{N}$;正整数集,记作 $\mathbb{N}_+$ 或 $\mathbb{N}^+$;整数集,记作 $\mathbb{Z}$;有理数集,记作 $\mathbb{Q}$;实数集,记作 $\mathbb{R}$.

2. 集合的表示方法

集合有三种表示方法:列举法、描述法、韦恩图法.

特别提醒 解答集合有关的问题首先认清集合中的元素是什么,是数集还是点集.然后再进行相关运算,以免混淆集合中元素的属性.

例如: $\{x|x^2+2x-3=0\}$ 表示方程 $x^2+2x-3=0$ 的解组成的集合; $\{x|x^2+2x-3>0\}$ 表示不等式 $x^2+2x-3>0$ 的解集; $\{y|y=x^2+2x-3\}$ 表示函数 $y=x^2+2x-3$ 的值域; $\{(x,y)|y=x^2+2x-3\}$ 表示函数 $y=x^2+2x-3$ 的图象上的点构成的集合.

3. 集合之间的关系

(1) 对于两个集合 A 和 B ,如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

密码心语: 自己把自己说服了,是一种理智的胜利;自己被自己感动了,是一种心灵的升华;自己把自己征服了,是一种人生的成熟.亲爱的同学们,高考密码祝你在高三阶段过得幸福、快乐、充实!学习上有质的飞跃,早日实现人生梦想,考上理想大学!

(2)如果集合 A 是集合 B 的子集,并且 B 中_____有一个元素不属于集合 A ,那么集合 A 叫做集合 B 的_____,记作_____或_____.

(3)集合相等:构成两个集合的元素完全一样.若 $A \subseteq B$ 且 $B \supseteq A$,则称_____,记作_____.

简单性质:① $A \subseteq A$;② $\emptyset \subseteq A$;③若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$.

思考感悟 >>> 怎样正确使用 $\in, \notin, \subseteq, \supseteq$ 等符号?

4. 空集

空集是指_____的集合,它是任何一个集合的子集,是任何一个非空集合的真子集.记作 $\emptyset$.

思考感悟 >>> 如何理解空集、子集、真子集等概念?

5. 有限集的子集、真子集的个数

若集合 A 中含有 n 个元素,则集合 A 有_____个子集(其中_____个真子集).

基础回扣热身

- 已知集合 $S = \{a, b, c\}$ 中的三个元素是 $\triangle ABC$ 的三边长,那么 $\triangle ABC$ 一定不是 _____ ()
A. 锐角三角形 B. 直角三角形
C. 钝角三角形 D. 等腰三角形
- 集合 $M = \{y \in \mathbb{Z} | y = \frac{8}{x+3}, x \in \mathbb{Z}\}$ 的元素的个数是 ... ()
A. 2个 B. 4个 C. 6个 D. 8个
- 已知集合 $M = \{x | 3+2x-x^2 > 0\}$, $N = \{x | x > a\}$,若 $M \subseteq N$,则实数 a 的取值范围是 _____ ()
A. $[3, +\infty)$ B. $(3, +\infty)$
C. $(-\infty, -1]$ D. $(-\infty, -1)$
- 已知集合 $M = \{x | x = a^2 - 3a + 2, a \in \mathbb{R}\}$, $N = \{x | x = b^2 - b, b \in \mathbb{R}\}$,则 M, N 的关系是 _____ ()
A. $M \subsetneq N$ B. $M \supsetneq N$ C. $M = N$ D. 不确定
- 已知集合 $A = \{-1, 3, 2m-1\}$,集合 $B = \{3, m^2\}$,若 $B \subseteq A$,则实数 $m =$ _____.

精典例题示范

题型一 集合的基本概念

- 【例1】**定义集合运算: $A \cdot B = \{z | z = xy, x \in A, y \in B\}$,设集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{\sin \alpha, \cos \alpha\}$,则集合 $A \cdot B$ 的所有元素之和为 _____ ()
A. 1 B. 0
C. -1 D. $\sin \alpha + \cos \alpha$

规范解答:

题型二 元素与集合之间的关系

【例2】已知由实数构成的集合 A 满足条件,若 $a \in A, a \neq 1$,则 $\frac{1}{1-a} \in A$.

(1)若 $2 \in A$,则 A 中必还有另外两个元素,求出这两个元素;

(2)求证:若 $a \in A$,则 $1 - \frac{1}{a} \in A$;

(3) A 不可能是单元素集.

规范解答:

题型三 集合之间的关系

【例3】(12分)已知集合 $A = \{x | 0 < ax + 1 \leq 5\}$,集合 $B = \{x | -\frac{1}{2} < x \leq 2\}$.

(1)若 $A \subseteq B$,求实数 a 的取值范围;

(2)若 $B \subseteq A$,求实数 a 的取值范围;

(3) A, B 能否相等?若能,求出 a 的值;若不能,试说明理由.

思路点拨:集合 A 中含参数 a , a 的取值决定 A 的形式,所以要分 a 的取值进行分类讨论.

规范解答:求集合 A :

①若 $a = 0$,则 $A = \mathbb{R}$;

②若 $a < 0$,则 $A = \{x | \frac{4}{a} \leq x < -\frac{1}{a}\}$;

③若 $a > 0$,则 $A = \{x | -\frac{1}{a} < x \leq \frac{4}{a}\}$ 2分

(1)当 $a = 0$ 时,显然 $A \subseteq B$ 不成立; 3分

当 $a < 0$ 时,若 $A \subseteq B$,则 $\begin{cases} \frac{4}{a} > -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{a} \leq 2 \end{cases}$,

$\therefore \begin{cases} a < -8 \\ a \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$,得 $a < -8$ 4分

当 $a > 0$ 时,若 $A \subseteq B$,则 $\begin{cases} -\frac{1}{a} \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{a} \leq 2 \end{cases}$,

$\therefore \begin{cases} a \geq 2 \\ a \geq 2 \end{cases}$,得 $a \geq 2$ 5分

综上知,此时 a 的取值范围是 $a < -8$ 或 $a \geq 2$ 6分

(2)当 $a = 0$ 时,显然 $B \subseteq A$ 成立; 7分

当 $a < 0$ 时,若 $B \subseteq A$,则 $\begin{cases} \frac{4}{a} \leq -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{a} > 2 \end{cases}$,

密码心语:一个人生活中的失意乃至失败在很大程度上来说是心理的而不是现实的,是技术性的而不是宿命的。现实至多为失败者提供了解脱的借口,而对宿命的信仰最终无情地扑灭了成功的任何希望。不是每一次努力都会有收获,但是,每一次收获都必须努力,这是一个不公平的不可逆转的命题。高考密码愿意陪你一起努力、一起欢唱,去赢取美好的明天!

$$\therefore \begin{cases} a \geq -8 \\ a > -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{得 } -\frac{1}{2} < a < 0; \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, 若 } B \subseteq A, \text{ 则 } \begin{cases} -\frac{1}{a} \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{a} \geq 2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a \leq 2 \\ a \leq 2 \end{cases}, \text{得 } a \leq 2, \text{ 所以 } 0 < a \leq 2. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

综上知, 当 $B \subseteq A$ 时 a 的取值范围是 $-\frac{1}{2} < a \leq 2$

..... 10 分

(3) 当且仅当 A, B 两个集合互相包含时, $A = B$, 由 (1)、(2) 可知, $a = 2$ 12 分

点评: 在解决两个数集关系时, 应合理运用数轴帮助分析与求解. 另外在解含有参数的不等式(或方程)时, 要对参数进行讨论, 分类要遵循“不重不漏”的分类原则, 然后对每一类情况都要给出问题的解答.



变式演练

已知集合 $P = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $Q = \{x | ax + 1 = 0\}$ 且满足 $Q \subseteq P$, 求 a 所取的一切值.



方法规律总结

FANGFAGUILVZONGJIE

1. 解答集合问题, 首先要正确理解集合的有关概念, 特别是集合中元素的确定性、互异性、无序性; 对于用描述法给出的

集合 $\{x | x \in P\}$, 要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x 及其所具有的性质; 要重视发挥图示法的作用, 充分运用数形结合(数轴、坐标系、韦恩图)或特例法解集合与集合之间的包含关系, 直观地解决问题.

2. 注意空集的特殊性. 在解题中, 若未能指明集合非空时, 要考虑到空集的可能性. 如 $A \subseteq B$, 则有 $A = \emptyset$ 和 $A \neq \emptyset$ 两种可能, 此时应进行分类讨论.

3. 含参数的问题, 多根据集合元素的互异性来处理, 有时需要讨论, 注意空集.



速效提升训练

SUXIAOTISHENGXUNLIAN

1. (密码改编) 已知集合 $A = \left\{a \mid \frac{6}{5-a} \in \mathbb{N}^*\right\}$, 则集合 A 中所有元素之和 ()

A. 5 B. 11 C. 12 D. 8

2. (密码改编) 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P * Q = \{z | z = a \div b, a \in P, b \in Q\}$, 若 $P = \{-1, 0, 1\}$, $Q = \{-2, 2\}$, 则集合 $P * Q$ 中元素的个数是 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

3. 设集合 $P = \{m | -1 < m < 0\}$, $Q = \{m | mx^2 + 4mx - 4 < 0 \text{ 对任意的实数 } x \text{ 恒成立}\}$, 则下列关系中成立的是 ()

A. $P \subseteq Q$ B. $Q \subseteq P$ C. $P = Q$ D. $P \not\subseteq Q$

4. (2009 · 江苏高考) 已知集合 $A = \{x | \log_2 x \leq 2\}$, $B = (-\infty, a)$, 若 $A \subseteq B$ 则实数 a 的取值范围是 $(c, +\infty)$, 其中 $c =$ _____.

5. 已知集合 $A = \{a + 2, (a + 1)^2, a^2 + 3a + 3\}$, 若 $1 \in A$, 则实数 a 的取值集合为 _____.

§ 1.2 集合的基本运算



考纲目标锁定

KAOGANGMUBIAOQSUODING

1. 理解交集、并集的概念.

2. 理解补集的概念, 了解全集的意义.

3. 会用交集、并集、补集正确地表示一些简单的集合.



知识要点梳理

ZHISHIYAO DIANSHULI

1. 交集

(1) 定义: 一般地, 由所有 _____ 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 _____, 即 $A \cap B =$ _____.

(2) 运算性质: $A \cap A =$ _____, $A \cap B$ _____ $B \cap A$, $A \cap \emptyset =$ _____, $A \cap B = A \Leftrightarrow$ _____.

2. 并集

(1) 定义: 一般地, 由所有 _____ 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 _____, 即 $A \cup B =$ _____.

(2) 运算性质: $A \cup A =$ _____, $A \cup B$ _____ $B \cup A$, $A \cup \emptyset =$ _____, $A \cup B = A \Leftrightarrow$ _____.

思考感悟 >>> 如何理解交集和并集定义中的“且”与“或”?

3. 全集与补集

(1) 定义: 如果集合 U 含有我们需要研究的各个集合的全部元素, 这个集合就可以看作一个全集, 全集通常用 U 表示.

一般地, 设 U 是一个全集, A 是 U 的一个子集(即 $A \subseteq U$), 由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做 U 中子集 A 的补集(或余集), 记作 $\complement_U A$, 即 $\complement_U A =$ _____.

(2) 运算性质: $A \cap \complement_U A =$ _____, $A \cup \complement_U A =$ _____.

励志金言: 一个人只有时刻保持幸福快乐的感觉, 才会使自己更加热爱生命, 热爱生活. 只有快乐, 愉快的心情, 才是创造力和人生动力的源泉; 只有不断自己创造快乐, 与自己快乐相处的人, 才能远离痛苦与烦恼, 才能拥有快乐的人生. 高考密码, 与您幸福相伴!

$\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$, $\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$.

思考感悟 两个集合的交集、并集与补集之间有什么关系?

基础回扣热身

JICHUHUAIKOURESHEN

- 已知 $M = \{\text{直线}\}$, $N = \{\text{圆}\}$, 则 $M \cap N$ 中的元素个数为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 0 或 1 或 2
- (2009 · 海南宁夏高考) 已知集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$, 则 $A \cap \complement_N B$ 等于 ()
A. $\{1, 5, 7\}$ B. $\{3, 5, 7\}$ C. $\{1, 3, 9\}$ D. $\{1, 2, 3\}$
- (2009 · 浙江高考) 设 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x > 0\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cap \complement_U B$ ()
A. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$
C. $\{x | x < 0\}$ D. $\{x | x > 1\}$
- (密码改编) 集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{y | y = \sin x, x \in A\}$, 则 $A \cap B$ ()
A. $\{0\}$ B. $\{1\}$
C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$
- 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{1, a^2 - 1, 4\}$, $\complement_U A = \{2, a + 3\}$, 则 a 的值为

精典例题示范

JINGDIANLITISHIFAN

题型一 集合的基本运算

- 【例1】** (2009 · 安徽高考) 若集合 $A = \{x | |2x - 1| < 3\}$, $B = \left\{x \mid \frac{2x+1}{3-x} < 0\right\}$, 则 $A \cap B$ 是 ()
- A. $\left\{x \mid -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } 2 < x < 3\right\}$
B. $\{x | 2 < x < 3\}$
C. $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\right\}$
D. $\left\{x \mid -1 < x < -\frac{1}{2}\right\}$

规范解答:

题型二 与集合有关的新情景题

- 【例2】** 设数集 $M = \left\{x \mid m \leq x \leq m + \frac{3}{4}\right\}$, $N = \left\{x \mid n - \frac{1}{3} \leq x \leq n\right\}$, 且 M, N 都是集合 $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 的子集, 如果把 $b - a$ 叫做集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 的“长度”, 那么集合 $M \cap N$ 的“长度”的最

小值是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{5}{12}$

规范解答:

题型三 韦恩图的应用

- 【例3】** (2009 · 陕西高考) 某班有 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组, 每名同学至多参加两个小组, 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26, 15, 13, 同时参加数学和物理小组的有 6 人, 同时参加物理和化学小组的有 4 人, 则同时参加数学和化学小组的有 人.

规范解答:

题型四 含参数的集合问题

- 【例4】** (12 分) 设集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a + 1)x + (a^2 - 5) = 0\}$.

- 若 $A \cap B = \{2\}$, 求实数 a 的值;
- 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围;
- 若 $U = \mathbf{R}$, $A \cap \complement_U B = A$, 求实数 a 的取值范围.

思路点拨: 对于含参数的集合运算, 首先解出不含参数的集合, 然后根据已知条件求解参数.

规范解答: 由 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 解得 $x = 1$ 或 $x = 2$, 故集合 $A = \{1, 2\}$.

(1) 因 $A \cap B = \{2\}$, 故 $2 \in B$, 代入 B 中的方程, 得 $a^2 + 4a + 3 = 0$,

解得 $a = -1$ 或 $a = -3$ 1 分
当 $a = -1$ 时, $B = \{x | x^2 - 4 = 0\} = \{2, -2\}$, 满足已知条件;

当 $a = -3$ 时, $B = \{x | x^2 - 4x + 4 = 0\} = \{2\}$, 也满足条件.

综上所述, a 的值为 -1 或 -3 3 分

(2) 对于集合 B 中的方程, $\Delta = 4(a + 1)^2 - 4(a^2 - 5) = 8(a + 3)$,

因为 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$.

- 当 $\Delta < 0$, 即 $a < -3$ 时, $B = \emptyset$, 满足条件;
- 当 $\Delta = 0$, 即 $a = -3$ 时, $B = \{2\}$, 满足条件;
- 当 $\Delta > 0$, 即 $a > -3$ 时, $B = A = \{1, 2\}$ 才能满足条件, 5 分

则由根与系数之间的关系得: $\begin{cases} 1 + 2 = -2(a + 1) \\ 1 \times 2 = a^2 - 5 \end{cases}$, 解

得 $\begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ a^2 = 7 \end{cases}$, 显然相互矛盾, 故此时 a 无解.

综上所述, a 的取值范围是 $a \leq -3$ 7 分

(3) 因为 $A \cap \complement_U B = A$, 所以 $A \subseteq \complement_U B$, 故有 $A \cap B = \emptyset$.

..... 8 分

① 若 $B = \emptyset$, 则由 $\Delta < 0$, 解得 $a < -3$;

② 若 $B \neq \emptyset$, 则当 $a = -3$ 时, $B = \{2\}$, $A \cap B = \{2\}$, 不合题意;

当 $a > -3$ 时, 此时需要 $1 \notin B$ 且 $2 \notin B$;

将 2 代入 B 中的方程, 得 $a = -1$ 或 $a = -3$ (舍去);

将 1 代入 B 中的方程, 得 $a^2 + 2a - 2 = 0$, 解得 $a = -1 \pm \sqrt{3}$.

所以 $a \neq -1$, 且 $a \neq -3$ 且 $a \neq -1 \pm \sqrt{3}$ 11 分

综上所述, a 的取值范围是 $a < -3$ 或 $-3 < a < -1 - \sqrt{3}$ 或 $-1 - \sqrt{3} < a < -1$ 或 $-1 < a < -1 + \sqrt{3}$ 或 $a > -1 + \sqrt{3}$.

..... 12 分

点评: 解决含参数的集合运算问题, 首先要理清题目要求, 看清集合间存在的相互关系, 注意分类讨论、数形结合思想的应用以及空集作为一个特殊集合与非空集合间的关系.



变式演练

已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 10 \leq 0\}$, $B = \{x | m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$, 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

方法规律总结

FANGFAGUILVZONGJIE

1. 在进行集合的运算时要注意: ① 勿忘对空集的讨论; ② 勿忘集合中元素的互异性; ③ 对于集合 A 的补集运算, 勿忘 A 必须是全集的子集; ④ 对于含参数 (或待定系数) 的集合问题, 勿忘对所求数值进行合理取舍.

2. 在集合运算过程中应力求做到“三化”:

① 意义化: 即首先分清集合的类型, 是表示数集、点集还是图形, 是表示函数的定义域、值域还是表示方程或不等式的解集;

② 直观化: 借助数轴、直角坐标平面、Venn 图等将有关集合直观地表示出来;

③ 具体化: 具体求出相关集合中的函数的定义域、值域或方程、不等式的解集等; 不能具体求出的, 也应力求将集合化为最简单的形式.

3. 运用集合知识确定集合的“包含关系”与求集合的“交、并、补”是学习集合的中心内容, 解决问题时应根据问题所涉及到的具体的数学内容来寻求方法.

① 求方程 (组)、不等式 (组) 的解或讨论它们是否有解, 有多少解等问题, 就是求解集, 或各个解集的交、并、补集等问题;

② 求两条曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的交点坐标, 或讨论它们是否有公共点的问题也就是求方程 (组) 的解集以及解的交、并、补集等问题;

③ 求解若干个数式具有某种共同性质的问题, 就是求交集问题; 而将一个问题分成若干类解决, 最后要求各类结果的并集;

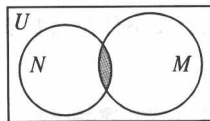
④ 许多计数问题 (即计算种数、个数、方法数等) 都要用到集合的交、并、补以及元素个数等知识.



速效提升训练

SUXIAOTISHENGXUNLIAN

1. (2009 · 广东高考) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x | -2 \leq x - 1 \leq 2\}$ 和 $N = \{x | x = 2k - 1, k = 1, 2, \dots\}$ 的关系的韦恩 (Venn) 图如图所示, 则阴影部分所示的集合的元素共有 ()



A. 3 个

B. 2 个

C. 1 个

D. 无穷个

2. (2009 · 山东高考) 集合 $A = \{0, 2, a\}$, $B = \{1, a^2\}$, 若 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 则 a 的值为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

3. (2009 · 全国 II 高考) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $M = \{1, 3, 5, 7\}$, $N = \{5, 6, 7\}$, 则 $\complement_U(M \cup N)$ 等于 ()

A. $\{5, 7\}$

B. $\{2, 4\}$

C. $\{2, 4, 8\}$

D. $\{1, 3, 5, 6, 7\}$

4. (密码改编) 设 P 和 Q 是两个集合, 定义集合 $P - Q = \{x | x \in P, \text{且 } x \notin Q\}$, 如果 $P = \left\{x \mid \frac{2}{x} > 1\right\}$, $Q = \{x | |x - 2| < 1\}$ 那么 $P - Q$ 等于 ()

A. $\{x | 0 < x < 1\}$

B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$

C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$

D. $\{x | 2 \leq x < 3\}$

5. (2009 · 天津高考) 设全集 $U = A \cup B = \{x \in \mathbf{N}^* | \lg x < 1\}$, 若 $A \cap \complement_U B = \{m | m = 2n + 1, n = 0, 1, 2, 3, 4\}$, 则集合 $B =$

6. 记函数 $f(x) = \lg(x^2 - x - 2)$ 的定义域为集合 A , 函数 $g(x) = \sqrt{3 - |x|}$ 的定义域为集合 B .

(1) 求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$;

(2) 若 $C = \{x | 4x + p < 0\}$, $C \subseteq A$, 求实数 p 的取值范围.

数学名家: 沃尔夫 1887 年生于德国, 其父亲是汉诺威城的五金商人。沃尔夫曾在德国研究化学, 并获得博士学位, 后移居古巴。他用了近 20 年的时间, 经过大量的试验, 历尽艰辛, 成功地发明了一种从熔炼废渣中回收铁的方法, 从而成为百万富翁。他是沃尔夫基金会的倡导者和主要捐献人。沃尔夫于 1981 年逝世。

§ 1.3 逻辑联结词和充要条件

考纲目标锁定

KAOGANGMUBIAOSUODING

1. 理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义.
2. 理解四种命题及其相互关系.
3. 掌握充分条件、必要条件及充要条件的意义.

知识要点梳理

ZHISHIYAODIANSHULI

1. 命题及其关系

- (1) 命题: 可以判断真假的陈述句叫做命题. 判断为_____的语句叫做真命题, 判断为_____的语句叫做假命题.
- (2) 每一个命题都可以写成“若 p , 则 q ”的形式. 其中命题中_____叫做命题的条件, _____叫做命题的结论, 也就是说, 命题由两部分构成, 即条件和结论.

2. 简单的逻辑联结词

- (1) “或”“且”“非”叫做逻辑联结词.
- (2) 不含逻辑联结词的命题是简单命题, 由简单命题和逻辑联结词构成的命题是复合命题.
- (3) p 且 q 就是用逻辑联结词“_____”把命题 p 和命题 q 联结起来得到的新命题, 记作_____.
- (4) p 或 q 就是用逻辑联结词“_____”把命题 p 和命题 q 联结起来得到的新命题, 记作_____.
- (5) 对一个命题 p 进行全盘否定, 得到一个新命题, 记作_____, 读作非 p 或 p 的否定.
- (6) 已知 p 、 q 的真假时, 可以判断 $p \wedge q$ 、 $p \vee q$ 、 $\neg p$ 的真假, 它们之间的关系是:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$
真	真	_____	_____	_____
真	假	_____	_____	_____
假	真	_____	_____	_____
假	假	_____	_____	_____

用语言概括为: $p \wedge q$ “见假就假”, $p \vee q$ “见真就真”, $\neg p$ “真假相对”.

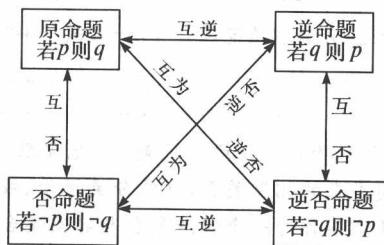
3. 四种命题

- (1) 对于两个命题, 如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件, 把这样的两个命题叫做_____, 其中一个命题叫做原命题, 另一个命题叫做原命题的_____.
- (2) 对于两个命题, 如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的否定和结论的否定, 把这样的两个命题叫做_____, 其中一个命题叫做原命题, 另一个命题叫做原命题的否命题.
- (3) 对于两个命题, 如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定, 把这样的两个命题叫做_____.

_____, 其中一个命题叫做原命题, 另一个命题叫做原命题的_____.

- (4) 原命题和逆否命题的关系是互为逆否命题, 它们具有_____的真假性, 逆命题和_____的关系是互为逆否命题, 它们也具有相同的真假性.

(5) 四种命题的关系可以用图表的形式表达如下:



思考感悟 命题的否定与否命题一样吗?

4. 充要条件

- (1) 一般地, 当“若 p , 则 q ”为真命题, 即由 $p \Rightarrow q$ 时, 就说 p 是 q 的_____, q 是 p 的_____.
- (2) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 即 $p \Leftrightarrow q$, 就说 p 是 q 的既充分又必要条件, 简称充要条件, 那么 q 也是 p 的充要条件, 充要条件是相互的.
- (3) 判断充分条件、必要条件、充要条件时, 常用的方法是通过“ $\Rightarrow$ ”来判断. 一方面是要注意箭头的指向(单向或双向); 另一个方面是看“ p 是 q 的……”或“ q 是 p 的……”, p 是 q 的充分条件表示为 $p \Rightarrow q$, p 是 q 的必要条件表示为 $q \Rightarrow p$.

5. 反证法

- (1) 用反证法证明命题的一般步骤为:
 - ① 假设命题的_____不成立, 即假设_____成立.
 - ② 从这个假设出发, 经过推理论证得出矛盾.
 - ③ 由矛盾判断假设不正确, 从而肯定命题的结论正确.
- (2) 反证法的第一步是否定结论, 在解决实际问题中, 需要掌握以下词语的否定.

词语	是	都是	大于($>$)	所有的	任一个	至少一个	至多一个
词语的否定	不是	不都是	不大于($\leq$)	某些	某个	一个也没有	至少两个

(3) 下列题型适宜用反证法:

- ① 结论是否定形式的命题.
- ② 结论是以“至多”“至少”“唯一”等形式给出的命题.
- ③ 结论的反面是较明显或较易证明的命题.
- ④ 用直接法证明困难的命题.

基础回扣热身

JICHUHUIKOURESHEN

1. 下列命题:

- ① 三角形一定是平面图形;

魅力数学: 菲尔兹奖 诺贝尔奖中为什么没有设数学奖? 对此人们一直有着各种猜测与议论. 其实, 数学领域中也有世界性的奖励, 这就是每四年颁发一次的菲尔兹奖. 第一次菲尔兹奖颁发于 1936 年. 菲尔兹奖只是一枚金质奖章, 与诺贝尔奖金的十万美元相比真是微不足道. 但在各国数学家的眼里, 菲尔兹奖所带来的荣誉可与诺贝尔奖金媲美, 是国际数学界的最高奖.

②互相平行的三条直线都在一个平面内;

③梯形一定是平面图形;

④四边都相等的四边形是菱形.

其中真命题的个数是..... ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. 如果命题“ p 或 q ”与命题 $\neg p$ 都是真命题, 那么..... ()

A. 命题 p 不一定是假命题

B. 命题 q 一定是真命题

C. 命题 q 不一定是真命题

D. 命题 p 与 q 真假相同

3. 若命题 p 的否命题为 γ , 命题 γ 的逆命题为 s , 则 s 是 p 的逆命题 t 的..... ()

A. 逆否命题 B. 逆命题 C. 否命题 D. 原命题

4. (密码改编) 若集合 $A = \{1, m^2\}$, 集合 $B = \{3, 9\}$, 则“ $m = 3$ ”是“ $A \cup B = \{1, 3, 9\}$ ”的..... ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. (密码原创) 给出以下四个条件: ① $ab > 0$; ② $a > 0$ 或 $b > 0$; ③ $a + b > 2$; ④ $a > 0$ 且 $b > 0$. 其中可以作为“若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $a + b > 0$ ”的一个充分而不必要条件的条件是.....

精典例题示范

JINGDIANLITISHIFAN

题型一 判断命题的真假

【例1】(2008 · 广东高考) 已知命题 p : 所有有理数都是实数, 命题 q : 正数的对数都是负数, 则下列命题中为真命题的是..... ()

A. $(\neg p) \vee q$

B. $p \wedge q$

C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

D. $(\neg p) \vee (\neg q)$

规范解答:

题型二 充要条件的判定

【例2】(2009 · 浙江高考) 已知 a, b 是实数, 则“ $a > 0$ 且 $b > 0$ ”是“ $a + b > 0$ 且 $ab > 0$ ”的..... ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

规范解答:

题型三 四种命题及其真假判断

【例3】(2009 · 汕头市模拟) 原命题: “设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$.” 以及它的逆命题, 否命题, 逆否命题中, 真命题共有..... ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

规范解答:

题型四 充要条件的探讨与应用

【例5】(12 分) 已知: $p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$

($m > 0$), 且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件, 求实数 m 的取值范围.

思路点拨: 解决本题时, 有两种思路: 第一, 先把 $\neg p$ 与 $\neg q$ 对应的条件求出来, 然后利用充要条件判断两个条件之间的关系; 第二, 先把条件转化为 p 与 q 之间的关系, 即 p 是 q 的充分而不必要条件.

规范解答: 方法一: 由 $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$, 得 $1 - m \leq x \leq 1 + m$,..... 2 分

$\therefore \neg q: A = \{x | x > 1 + m \text{ 或 } x < 1 - m, m > 0\}$ 3 分

由 $\left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2$, 解得 $-2 \leq x \leq 10$, 6 分

$\therefore \neg p: B = \{x | x > 10 \text{ 或 } x < -2\}$ 7 分

$\therefore \neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件,

$\therefore A \subseteq B$, 即 $\begin{cases} m > 0 \\ 1 - m \leq -2 \\ 1 + m \geq 10 \end{cases}$ 10 分

解得 $m \geq 9$ 12 分

方法二: $\therefore \neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件,

$\therefore p$ 是 q 的充分而不必要条件. 2 分

由 $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$, 得 $1 - m \leq x \leq 1 + m$, 4 分

$\therefore q: Q = \{x | 1 - m \leq x \leq 1 + m\}$ 5 分

由 $\left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2$, 解得 $-2 \leq x \leq 10$, 6 分

$\therefore p: P = \{x | -2 \leq x \leq 10\}$ 7 分

$\therefore p$ 是 q 的充分而不必要条件,

$\therefore P \subseteq Q$, 即 $\begin{cases} m > 0 \\ 1 - m \leq -2 \\ 1 + m \geq 10 \end{cases}$ 10 分

解得 $m \geq 9$ 12 分

点评: 本例涉及到参数问题, 直接解决较为困难, 先用等价转化思想, 将复杂、生疏的问题化归为简单、熟悉的问题来解决. 一般地, 在涉及到字母参数的取值范围的充要条件问题中, 常常要利用几何的包含、相等关系来考虑.

变式演练 (密码原创)

已知 $c > 0$, 且 $c \neq 1$, 设 p : 函数 $y = c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减; q : 函数 $f(x) = x^2 - 2cx + 1$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上为增函数, 若“ p 且 q ”为假, “ p 或 q ”为真, 求实数 c 的取值范围.

方法规律总结

1. 命题的否定与否命题是完全不同的概念

(1) 任何命题均有否定, 无论是真命题还是假命题; 而否命题仅针对命题“若 p , 则 q ”提出来的;

(2) 命题的否定是原命题的矛盾命题, 两者的真假性必然是一真一假; 而否命题与原命题可能同真同假, 也可能一真一假.

2. 一个命题的原命题与其逆否命题同真同假; 原命题的逆命题与否命题互为逆否关系, 也同真同假. 有时一个命题的真假不易被判断时, 可以通过判断它的逆否命题的真假, 从而得到原命题的真假.

3. “ $p \vee q$ ”为真, 当且仅当 p 和 q 中至少有一个为真(一真为真); “ $p \wedge q$ ”为假, 当且仅当 p 和 q 中至少有一个为假(一假为假); p 与 $\neg p$ 真假相反.

4. A 是 B 的充分不必要条件是指: $A \Rightarrow B, B \not\Rightarrow A$. A 的充分不必要条件是 B , 是指 $B \Rightarrow A, A \not\Rightarrow B$. 这两种说法是在充要条件推理判断中经常出现且容易混淆的说法, 在解题时一定要根据问题的设问方式, 弄清它们的区别, 以免出现判断错误.



速效提升训练

SUXIAOTISHENGXUNLIAN

1. (2009 · 江西高考) 下列命题是真命题的为 …………… ()

- A. 若 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, 则 $x = y$
- B. 若 $x^2 = 1$, 则 $x = 1$
- C. 若 $x = y$, 则 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$
- D. 若 $x < y$, 则 $x^2 < y^2$

2. 若命题 $p: x \in A \cap B$, 则“非 p ”是 …………… ()

- A. $x \in A$ 或 $x \in B$
- B. $x \notin A$ 或 $x \notin B$
- C. $x \notin A$ 且 $x \notin B$
- D. $x \in A \cup B$

3. 命题“若 $a \notin A$, 则 $b \in B$ ”的否命题是 …………… ()

- A. 若 $a \notin A$, 则 $b \notin B$
- B. 若 $a \in A$, 则 $b \notin B$
- C. 若 $b \in B$, 则 $a \notin A$
- D. 若 $b \notin B$, 则 $a \in A$

4. (密码原创) 已知命题 p : 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + \sqrt{3}x + a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$; 命题 q : 函数 $y = (2a - 1)^x$ 是减函数. 若命题 $\neg p$ 和“ p 或 q ”为真, 则实数 a 的取值范围是 …………… ()

- A. $a > \frac{3}{4}$
- B. $\frac{1}{2} < a < 1$
- C. $\frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{4}$
- D. $\frac{3}{4} < a < 1$

5. (2009 · 天津高考) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x = 1$ ”是“ $x^3 = x$ ”的 …………… ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

6. 命题 p : 0 不是自然数; 命题 q : $\sqrt{2}$ 是无理数, 则在命题“ p 或 q ”“ p 且 q ”“非 p ”“非 q ”中, 真命题是 _____; 假命题是 _____.

第二章

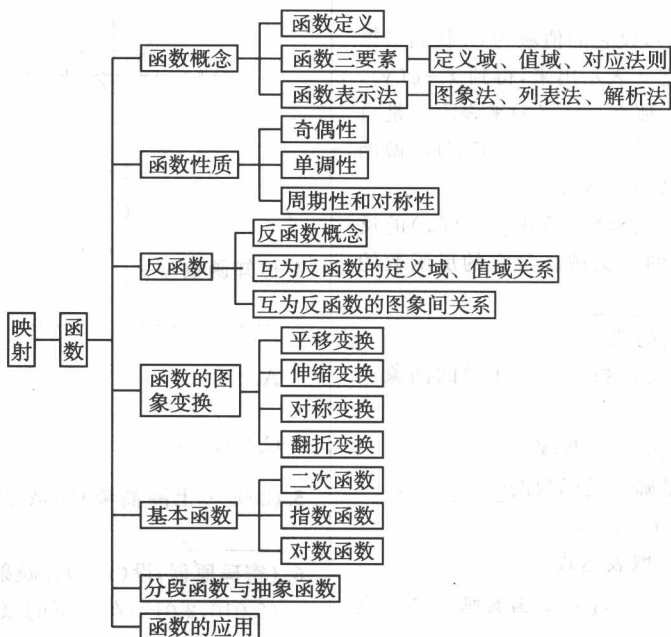
函数

知识

• TIXIGOUJIAN •

ZHISHI

体系构建



§ 2.1 映射、函数及反函数

考纲目标 锁定

KAOGANGMUBIAO SUODING

1. 了解映射的概念.
2. 理解函数的概念.
3. 了解反函数的概念及互为反函数图象的关系;会求一些简单的反函数.

知识要点 梳理

ZHISHIYAO DIANSHULI

1. 映射

(1) 映射的概念:

设 A, B 是两个集合, 如果按照某种对应法则 f , 对于集合 A 中的 _____ 元素, 在集合 B 中都有 _____ 的元素与之对应, 这样的 _____ 叫做从集合 A 到集合 B 的映射, 记作 _____.

(2) 象和原象: 给定一个集合 A 到 B 的映射, 且 $a \in A, b \in$

B , 如果元素 a 和元素 b 对应, 那么我们把元素 b 叫做元素 a 的 _____, 元素 a 叫做元素 b 的 _____.

(3) ——映射: 设 A, B 是两个集合, $f: A \rightarrow B$ 是集合 A 到集合 B 的映射, 如果在这个映射下, 对于集合 A 的不同元素, 在集合 B 中都有 _____ 的象, 而且集合 B 中的每一个元素都有 _____, 那么这个映射叫做集合 A 到集合 B 的 ——映射.

2. 函数

(1) 定义: 设 A, B 是两个 _____, 如果按照某种对应关系 f , 使对于集合 A 中的 _____ x , 在集合 B 中都有 _____ 的数 $f(x)$ 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为集合 A 到集合 B 上的一个函数, 记作 $y = f(x), x \in A$.

其中 x 叫做自变量, x 的取值范围 A 叫做这个函数的 _____; 与 x 值相对应的 y 值叫做 _____, 函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的 _____.

(2) 函数的三要素: _____、_____ 和 _____, 而值域由 _____ 和 _____ 可以确定.

(3) 函数的表示方法: 常用的函数表示方法有 _____、_____、_____.

魅力数学: 复变函数论(1) 复数的概念起源于求方程的根, 在二次、三次代数方程的求根中就出现了负数开平方的情况. 以复数作为自变量的函数就叫做复变函数, 而与之相关的理论就是复变函数论. 解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数, 复变函数论主要研究复数域上的解析函数, 因此通常也称复变函数论为解析函数论.

①解析法:就是把两个变量的函数关系用一个_____来表示,这个等式叫做函数的解析表达式,简称解析式.

②列表法:就是列出表格来表示两个变量之间的函数关系.

③图象法:就是用函数图象来表示两个变量之间的函数关系.

思考感悟 >>> (1)怎样正确理解函数的概念?

(2)函数与映射之间有这样的关系?

3. 反函数

(1)定义

一般地,函数 $y=f(x)(x \in A)$, 设它的值域为 C . 我们根据这个函数中的 x, y 的关系, 用 y 把 x 表示出来, 得到 $x=\varphi(y)$, x 在 A 中都有唯一的值和它对应, 那么 $x=\varphi(y)$ 来表示 y 是自变量, x 是因变量的函数. 这样的函数 $x=\varphi(y)(y \in C)$ 叫做函数 $y=f(x)(x \in A)$ 的反函数, 记作 $f^{-1}(y)$.

习惯上用 x 表示自变量, y 表示函数, 函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$. 函数 $f(x)$ 的定义域就是它的反函数的_____, 其值域是它的反函数的_____.

(2)互为反函数的函数图象间的关系:

函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线_____对称.

(3)求函数 $y=f(x)$ 的反函数的一般步骤:

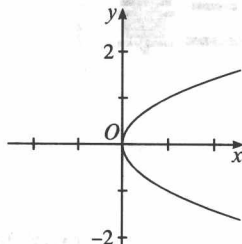
①确定原函数的值域, 也就是确定反函数的_____;

②由 $y=f(x)$ 的解析式求出 $x=f^{-1}(y)$;

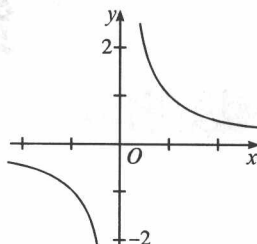
③将 x, y 互换, 得反函数的一般表达式 $y=f^{-1}(x)$.

思考感悟 >>> 函数 $f(x)=x^2$ 存在反函数吗? 定义域如何变化就有反函数?

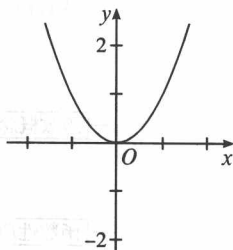
3. 下列图象中不能作为函数 $y=f(x)$ 的图象的是…… ()



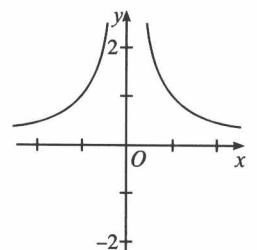
A



B



C



D

4. 已知函数 $y = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \leq 0) \\ -2x & (x > 0) \end{cases}$, 使函数值为 5 的 x 的值是

A. -2

B. 2 或 $-\frac{5}{2}$

C. 2 或 -2

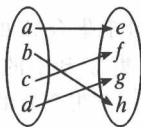
D. 2 或 -2 或 $-\frac{5}{2}$

5. (2009 · 上海高考) 函数 $f(x)=x^3+1$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ _____.

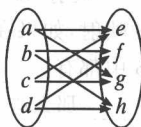
6. (密码原创) 设 (x, y) 在映射 f 下的象是 $(y-x, x+y)$, 则象 $(2\ 010, 2\ 012)$ 在 f 下的原象是_____.

基础回扣热身

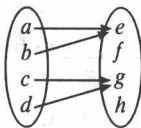
1. 下列各对应关系中, 是从 A 到 B 的映射的有…… ()



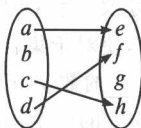
(1)



(2)



(3)



(4)

A. (2)(3) B. (1)(4) C. (2)(4) D. (1)(3)

2. 已知集合 $P = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, $Q = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$, 下列从 P 到 Q 的各对应关系 f 不是函数的是…… ()

A. $f: x \rightarrow y = \frac{1}{2}x$

B. $f: x \rightarrow y = \frac{1}{3}x$

C. $f: x \rightarrow y = \frac{2}{3}x$

D. $f: x \rightarrow y = \sqrt{x}$

精典例题示范

题型一 函数的概念

【例1】 下列三组函数中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为同一函数?

(1) $f(x) = \lg x, g(x) = \frac{1}{2} \lg x^2$;

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 < x < 0) \\ x-1 & (0 < x < 1) \end{cases}, g(x) = f^{-1}(x)$.

规范解答:

题型二 映射的概念

【例2】已知映射 $f: A \rightarrow B$, 其中 $A = B = \mathbf{R}$, 对应法则 $f: y = -x^2 + 2x$, 对于实数 $k \in B$, 在集合 A 中不存在原象, 则 k 的取值范围是 ()

A. $k > 1$ B. $k \geq 1$ C. $k < 1$ D. $k \leq 1$

规范解答:

题型三 反函数问题

【例3】(12分)(2009·湖北高考)函数 $y = \frac{1-2x}{1+2x} (x \in \mathbf{R},$

且 $x \neq -\frac{1}{2})$ 的反函数是 ()

A. $y = \frac{1+2x}{1-2x} (x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq \frac{1}{2})$

B. $y = \frac{1-2x}{1+2x} (x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq -\frac{1}{2})$

C. $y = \frac{1+x}{2(1-x)} (x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq 1)$

D. $y = \frac{1-x}{2(1+x)} (x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq -1)$

思路点拨: 先由函数的解析式解得 x , 即用 y 表示, 然后 x 、 y 互换, 即得反函数的解析式, 求解时要注意反函数的定义域为原函数的值域.

规范解答: 由 $y = \frac{1-2x}{1+2x}$, 得

$$y(1+2x) = 1-2x, \text{ 即 } (2y+2)x = 1-y$$

求得: $x = \frac{1-y}{2(1+y)}$ 4分

x 、 y 互换, 得 $y = \frac{1-x}{2(1+x)}$ 6分

由 $y = \frac{1-2x}{1+2x} = -1 + \frac{2}{1+2x} \neq -1$ 可知原函数的值域为 $\{y | y \neq -1\}$, 8分

故反函数的定义域为 $\{x | x \neq -1\}$, 10分

所以反函数为 $y = \frac{1-x}{2(1+x)} (x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq -1)$,

选 D. 12分

点评: 求反函数的步骤是“一解”、“二换”、“三定义”. 所谓一解, 即首先由给出的原函数的解析式 $y = f(x)$, 反解出用 y 表示 x 的式子 $x = f^{-1}(y)$; 二换, 即是把 $x = f^{-1}(y)$ 中的 x 、 y 两个字母互换, 得到 $y = f^{-1}(x)$ 即为所求的反函数(即先解后换); 三定义, 即求出反函数的定义域(即原函数的值域).

变式演练 (2009·全国II高考)

函数 $y = \sqrt{-x} (x \leq 0)$ 的反函数是 ()

A. $y = x^2 (x \geq 0)$ B. $y = -x^2 (x \geq 0)$

C. $y = x^2 (x \leq 0)$ D. $y = -x^2 (x \leq 0)$

方法规律总结

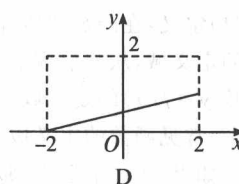
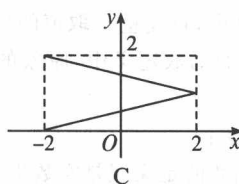
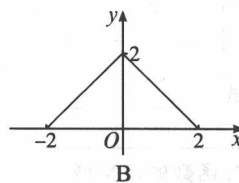
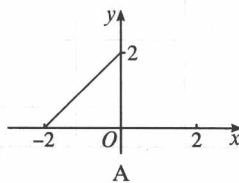
1. 正确理解函数的概念是关键, 函数的本质是一种特殊的对应关系, 它的特殊性在于:

(1) 它是非空数集到非空数集的对应; (2) 定义域中的每一个元素只有一个函数值; (3) 定义域中的每个元素一定有函数值. 确定一个函数需要三个要素: ①定义域; ②对应法则; ③值域. 对应法则是规定元素对应关系的法则, 它不一定能够用解析式表示, 如列表法和图象法表示的函数. 对于 $f(x)$, 可以理解为根据对应法则 f , 自变量 x 对应的函数值; 也可理解为根据对应法则 f 产生函数 $f(x)$. 表示函数时, 前面一般加“函数”二字. 列表法、图象法和解析法是函数三种最常用的表示方法, 函数的图象是直观理解函数性质和解决函数问题的有力工具, 注意灵活运用.

2. 求反函数时, 一要注意在开方时“±”的选取由原函数的定义域确定; 二要注意标明反函数的定义域, 特别是当使反函数的解析式有意义的自变量的取值集合于反函数的定义域不相同, 更要标明其定义域.

速效提升训练

1. 设 $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, $N = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$, 函数 $f(x)$ 的定义域为 M , 值域为 N , 则 $f(x)$ 的图象可以是 ()



2. 下列各组函数中, 表示同一函数的是 ()

A. $y = x - 1$ 和 $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

B. $y = x$ 和 $y = \frac{x^2}{x}$

C. $y = x^2$ 和 $y = (x+1)^2$

D. $y = \frac{(\sqrt{x})^2}{x}$ 和 $y = \frac{x}{(\sqrt{x})^2}$

3. (密码改编) 已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, 映射 $f: M \rightarrow N$, 在 f 作用下点 (x, y) 的象是 $(2^x, 2^y)$, 则集合 N 等于 ()

A. $\{(x, y) | x + y = 4, x > 0, y > 0\}$

B. $\{(x, y) | xy = 2, x > 0, y > 0\}$

C. $\{(x, y) | xy = 4, x < 0, y < 0\}$

D. $\{(x, y) | xy = 4, x > 0, y > 0\}$

4. (密码原创) 设 $f: A \rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 的映射, $A = B = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $f: (x, y) \rightarrow (ax, y - b)$, 若 B 中

数学名家: 牛顿 牛顿是划时代的科学巨人, 他孕育成形了流数术(微积分)、万有引力定律和光学分析的基本思想. 用数学方法建立起完整的经典力学体系. 他进一步明确了负指数的含义. 牛顿研究得出的二项式级数展开式是研究级数论、函数论、数学分析、方程理论的有力工具. 蒲柏的著名诗句: 大自然和它的规律, 隐匿在黑暗中, 上帝说, “让牛顿出世!” 一切便都分明, 这是对牛顿最准确的评价.