普通高等教育“十一五”国家级规划教材

实变函数与泛函分析概要

（第四版）第一册

郑维行 王声望 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

ISBN 978-7-04-029220-6

9 787040 292206 >

定价 17.80 元

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

实变函数与泛函分析概要

（第四版）第一册

郑维行 王声望 编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析概要.第1册/郑维行,王声望编.—4版.—北京:高等教育出版社,2010.7

ISBN 978-7-04-029220-6

Ⅰ.①实… Ⅱ.①郑… ②王… Ⅲ.①实变函数-高等学校-教材②泛函分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第082119号

策划编辑 李蕊　**责任编辑** 张耀明　**封面设计** 王凌波
责任绘图 宗小梅　**版式设计** 王艳红　**责任校对** 王效珍
责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
经销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
印刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版次	1989年6月第1版
开本	850×1168 1/32		2010年7月第4版
印张	9.25	印次	2010年7月第1次印刷
字数	230 000	定价	17.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 29220-00

第四版前言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，在第三版的基础上修订编写而成。自2005年第三版以来，收到很多读者提出的宝贵意见，本校师维学、代雄平、栗付才、钟承奎几位教授及南京大学2006届数学系的同学在教学和使用过程中，都对本书提出了不少有益的意见和建议。本次修订在充分吸收这些意见和建议的基础上，考虑到现行学时的安排，在篇幅上进行了较大的调整，增加了关于依测度基本列概念与积分列的勒贝格-维它利定理，删去广义函数、解析算子演算、酉算子、正常算子的谱分解定理等内容，习题量进行了扩充以供选用，一些要点给予特别提示以利教学，对理论的论述、安排与例证均进行了推敲使其可读性更强，便于备课、讲授与学习。同时，还注意吸取国内外一些新教材的长处。

本书第一版时的初稿曾得到程其襄、严绍宗、王斯雷、张奠宙、徐荣权、俞致寿教授等的细心审查与认真讨论，曾远荣、江泽坚、夏道行教授专门审阅了手稿，函数论教研室的马吉溥、苏维宜、任福贤、何泽霖、宋国柱、王巧玲、王崇祜、华茂芬等同志也协助阅读了手稿，并参加了部分修改工作。在此谨向所有对本书提出意见和建议的专家、广大教师与读者表示衷心感谢，书中一丝一毫的改进均是与他们分不开的。虽然我们作了一定的努力，但书中的谬误想必难免，盼望专家与读者们不吝指正。

编　者

2010年10月

第三版前言

我们十分感谢很多高校教师使用本书并提出宝贵意见。感谢高等教育出版社王瑜、李蕊同志建议再一次修订本书,以适应当前教学发展需要,还要感谢尹会成、秦厚荣、丁南庆教授的很有价值的建议与支持。本次修订中我们在保留原书内容精选、适用性较广的前提下,增加了一些例题和研究生试题,补充介绍若干常用概念如勒贝格点、全密点及反演公式等,每章后附上小结并订正一些错误。不知修改是否得当,还望广大读者赐教。我们经常获悉海内外学子说:读了实变函数与泛函分析后始感分析学的一些奥妙,对学习现代数学的兴趣增强了。如本书果真对他们有所帮助,则编者的修订当不算徒劳了。最后,我们谨对高等教育出版社文小西先生的细心审校与宝贵建议表示衷心感谢,还要对 ATA 编辑部的朱燕同志不辞辛劳为本书作出全部打印稿表示深深谢意。

编　者

2004 年 2 月于南京

目　录

第　一　册

第一章　集与点集……………………………………………… 3
§1　集及其运算 ……………………………………………… 3
§2　映射·集的对等·可列集 ……………………………… 7
§3　一维开集、闭集及其性质 …………………………… 12
§4　开集的构造………………………………………………… 17
§5*　集的势·序集 …………………………………………… 25
第一章习题 ……………………………………………………… 38
第二章　勒贝格测度 ……………………………………… 42
§1　引言 ……………………………………………………… 42
§2　有界点集的外、内测度·可测集 ……………………… 44
§3　可测集的性质……………………………………………… 52
§4　关于测度的几点评注 …………………………………… 63
§5*　环与环上定义的测度…………………………………… 67
§6*　σ 环上外测度·可测集·测度的扩张………………… 72
§7*　广义测度 ………………………………………………… 83
第二章习题 ……………………………………………………… 91
第三章　可测函数 …………………………………………… 96
§1　可测函数的基本性质 …………………………………… 96
§2　可测函数列的收敛性 …………………………………… 106
§3　可测函数的构造 ………………………………………… 117

第三章习题 …………………………………………………… 121

第四章　勒贝格积分 …………………………………………… 126

§1　勒贝格积分的引入 …………………………………………… 126

§2　积分的性质 …………………………………………………… 133

§3　积分序列的极限 ……………………………………………… 146

§4　R 积分与 L 积分的比较 …………………………………… 158

§5*　乘积测度与傅比尼定理 ……………………………………… 168

§6　微分与积分 …………………………………………………… 180

§7*　勒贝格－斯蒂尔切斯积分概念 ……………………………… 212

第四章习题 …………………………………………………… 223

第五章　函数空间 L^p ………………………………………… 229

§1　L^p空间・完备性 …………………………………………… 229

§2　L^p空间的可分性 …………………………………………… 237

§3　傅里叶变换概要 ……………………………………………… 249

第五章习题 …………………………………………………… 268

参考书目与文献 ………………………………………………… 273

索引 ……………………………………………………………… 275

第　一　册

第一章 集与点集

数学分析中最重要的概念之一是黎曼(B. Riemann)积分，从黎曼积分的记号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 可以看出，它含有两个要素与一个运算，即被积函数 $f(x)$、积分区间 $[a,b]$ 与积分运算. 本册的中心内容是勒贝格(H. L. Lebesgue)积分，它的记号是 $\int_E f(x)\mathrm{d}m$，这里 $f(x)$ 是可测函数，E 是欧几里得(Euclid)空间中可测集，不必是区间，而积分运算依赖于所考虑的测度 m. 这是近代积分论中最重要的一种积分，讨论这种积分不仅是为了推广黎曼积分，而且是由于它本身在运算上的灵活性，这对进一步学习近代数学是十分必要的. 同时，我们可以看到，数学分析中的一些重要结果也由此得到较为精确的说明. 勒贝格积分理论的产生自有它的实际背景. 我们将按照集、可测集与可测函数、积分的顺序来讨论，把有关积分的各个环节逐一弄清，进而掌握积分的完整概念、积分的性质及应用. 本章先由基本概念——集与点集讲起.

§1 集及其运算

集或**集合**是数学中的一个基本概念. 本书所研究的集合，均指具有确定内容或适合一定条件的事物的全体. 对集合的这样的粗略理解不影响我们对本书主题的讨论，因而我们将不去谈集的严格定义. 构成一个集的那些事物称为集的**元**或**元素**. 元与集的关系是个别与整体的关系. 例如，一个圆周上的点的全体成一集，它的

元是点. 以实数为系数的多项式全体成一集,它的元是实系数多项式. 书中恒约定,对给定的集,任一元要么属于它,要么不属于它,二者必居其一.

又如,直线上的一切开区间(a,b)成一集(或称**类**),这集的元是开区间. $[0,1]$上一切连续实函数构成一集. 实轴上满足$|\cos x| \geq 1/2$ 的点构成一集且具体可写为

$$\{x \in \mathbf{R}: k\pi - \pi/3 \leq x \leq k\pi + \pi/3, k \in \mathbf{Z}\},$$

这里 $\mathbf{R}$ 表示实数集,$\mathbf{Z}$ 表示整数集.

本书常用拉丁文大写字母 A, B 等表示集,用小写字母 a, b 等表示集的元.

现在我们引进有关集的一些简单概念或术语. 设 A 是一个集,a 是它的元,就写为 $a \in A$,读作 a 属于 A,它的意义与 A 含有 a 相同. 若元 b 不属于 A,写为 $b \,\overline{\in}\, A$ 或 $b \notin A$. 对于任何集 A,我们恒约定 $A \,\overline{\in}\, A$,即集 A 自身不能看成 A 的元.

若集 A 的元只有有限个,称 A 为**有限集**. 不含任何元的集称为**空集**,用记号$\varnothing$表示. 一个非空集,如果不是有限集,就称为**无限集**.

某些集之间可以有种种关系或性质. 最基本的关系要算"包含"与"相等". 设 A, B 是两个集,若 A 的每个元都属于 B,称 A 是 B 的**子集**,记成 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,分别读作 A 含于 B 或 B 包含 A. 若 $A \subset B$ 且存在一个元 $x \in B$ 而 $x \,\overline{\in}\, A$,则称 A 是 B 的**真子集**. 为了方便,规定空集$\varnothing$是任何集的子集. 设 A, B 是两个集,若$A \subset B$ 与$B \subset A$ 同时成立,则称集合 A 与 B **相等**,记成 $A = B$.

设给定一集 A 与一性质 π. 用记号

$$\{a: a \in A, \pi(a)\}$$

表示 A 中具有性质 π 的元 a 所成的集,有时简记成 $A\{\pi(a)\}$. 例如,上面的一个例子可以写成$\{x: x \in \mathbf{R}$ 且 $|\cos x| \geq \frac{1}{2}\}$ 或 $\mathbf{R}\{x: |\cos x| \geq \frac{1}{2}\}$. 关系式$\{a: a \in A, \pi_1(a)\} \subset \{a: a \in A, \pi_2(a)\}$

的意义是：由性质 $\pi_1(a)$ 可以推出性质 $\pi_2(a)(a \in A)$.

下面引进集的运算.

定义 1.1 设 A,B 是两个集. 由 A 中的元以及 B 中的元全体所成的集称为 A,B 的**并**，记成 $A\cup B$（图 1）；就是说

$$A\cup B=\{x:x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 两者的那些元所成的集称为 A 与 B 的**交**，记成 $A\cap B$（图 2），有时简写成 AB. 即

$$A\cap B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的那些元所成的集称为 A 与 B 的**差**，记成 $A-B$（图 3）. 当 $B\subset A$ 时，差集又称为 B 关于 A 的**补集**，记成 $\complement_A B$. 并集与交集概念可以推广到任意个集的情形. 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一集族，这里 I 是指标集，α 在 I 中取值，那么它们的并与交分别定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{a:\text{有某个 }\alpha\in I\text{ 使 }a\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{a:\text{对一切 }\alpha\in I\text{ 有 }a\in A_\alpha\}.$$

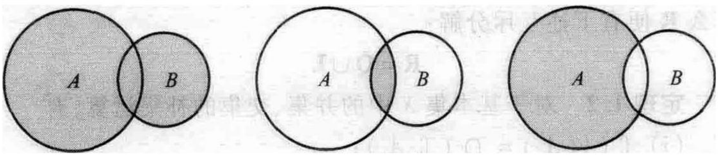

图 1 $A\cup B$　　图 2 $A\cap B$　　图 3 $A-B$

例 1 设 $A=\{2n-1:n\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{n\in\mathbf{Z}:|n|\leqslant 3\}$. 那么可求出

$$A\cup B=\{-2,0,2,2n-1:n\in\mathbf{Z}\},$$

$$A\cap B=\{-3,-1,1,3\},$$

$$A-B=\{2n-1:n>2\text{ 或 }n\leqslant -2,n\in\mathbf{Z}\},$$

$$B-A=\{-2,0,2\}.$$

我们建立下列定理.

定理 1.1 对于集 E 与任意一集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$，恒有**分配律**成立：

$$E\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha).$$

证 $x\in E\cap(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)$当且仅当$x\in E$且$x\in\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$或$x\in E$且存在$\alpha_0\in I$使$x\in A_{\alpha_0}$. 上述论断等价于$x\in E\cap A_\alpha$(对某个$\alpha=\alpha_0$). 从而等价于$x\in\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)$. 这证明了所欲证的等式成立.

当我们在研究一个问题时,如果所考虑的一切集都是X的子集,这时便称X为**基本集**. 例如限制在数直线上研究各种不同的点集,那么数直线是基本集. 对于任一基本集X,差集$X-A$称为A**关于X的补集**或简称为A的**补集**,记成$\complement_X A$或$\complement A$.

容易看出,X关于自身的补集为空集,而空集关于X的补集为X,即$\complement X=\varnothing$, $\complement\varnothing=X$. 此外,任一集A取二次补集运算又回到自己:$\complement\complement A=A$,且

$$X=A\cup\complement A,$$

右边两集互不相交,即它们没有公共元. 基本集这种简单分解称为X的互斥分解. 例如,设$\mathbf{R}$中的一切有理数集为$\mathbf{Q}$,无理数集为$\mathbf{I}$,那么$\mathbf{R}$便有下述互斥分解:

$$\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup\mathbf{I}.$$

定理 1.2 对于基本集X中的并集、交集的补集运算,有

(i) $\complement(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcap_\alpha(\complement A_\alpha)$;

(ii) $\complement(\bigcap_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha(\complement A_\alpha)$.

证 设$x\in\complement(\bigcup_\alpha A_\alpha)$,则$x$不属于任何$A_\alpha$. 故$x$属于每个$A_\alpha$的补集$\complement A_\alpha$,因此$x\in\bigcap_\alpha(\complement A_\alpha)$. 由此可见

$$\complement\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)\subset\bigcap_\alpha(\complement A_\alpha).$$

同理可证$\complement(\bigcup_\alpha A_\alpha)\supset\bigcap_\alpha(\complement A_\alpha)$. 这样(i)得证.

由于(i)对任意集族$\{A_\alpha\}$为真,应用到集族$\{\complement A_\alpha\}$上得

$$\complement\left(\bigcup_\alpha\complement A_\alpha\right)=\bigcap_\alpha(\complement(\complement A_\alpha)).$$

两边取补集,注意$\complement(\complement A_\alpha)=A_\alpha$,即得

$$\bigcup_\alpha(\complement A_\alpha)=\complement\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right).$$

即(ii)成立(左右调了位).

所证定理称为**德摩根**(De Morgan)**法则**. 它提供一种**对偶方法**,能将已证明的关于集的某种性质转移到它们的补集上去(参看后面的定理 3.3 与 3.5).

例 2 读者应注意,集的运算$\cup$,$\cap$,$-$等看来好像与数的$+$,$\times$,$-$类似,但其实不然. 例如,考察下列两式是否正确:

(i) $A(B-C)=AB-AC$;

(ii) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$.

(i) 是正确的,证明如下:

取 X 为基本集,$X=A\cup B\cup C$. 那么

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= A(B\complement C)=(AB)\complement C\\
&= AB\complement A\cup AB\complement C \qquad (AB\complement A=\varnothing)\\
&= AB(\complement A\cup\complement C) \qquad (\text{利用定理 } 1.1)\\
&= AB\complement(AC) \qquad (\text{利用定理 } 1.2(\mathrm{ii}))\\
&= AB-AC=\text{右边}.
\end{aligned}
$$

(ii) 是不正确的. 例如,若 C 中有不含于 A 的元 c,那么右边含有 c,而左边恒是 A 的子集,不可能含有元 c.

类似地,式子 $A\cup(B-C)=A\cup B-C$ 也不正确,读者可自行考虑.

因此,在处理集的运算时要细心些,概念要理解准确,推导要有依据,切不可一味依照数的运算法则进行.

§2 映射·集的对等·可列集

我们知道,数学分析中所讲的函数可以看成是数集与数集之间的一种对应关系,或数集到数集的映射. 把函数概念一般化,得到下面的定义.

定义 2.1 设 A,B 是两个非空集. 若依一定的法则 f,对每个 $x\in A$,在 B 中有一个确定的元 y 与之对应,则称 f 是定义在 A 上而

取值于 B 的**映射**，记成 $f:A\to B$，并将 x 与 y 的关系写成 $y=f(x)$. 这时称 A 为 f 的**定义域**，而称

$$f(A)=\{f(x):x\in A\}$$

为 f 的**值域**，或 A 在映射 f 下的**像**.

注意，两个法则 f 与 g 的给出方式可能不同，如果它们有同一效果，即对一切 $x\in A$ 有 $f(x)=g(x)$，则认为它们表示同一映射. 这时称映射 f 与 g 相等，记成 $f=g$.

设给定映射 $f:A\to B$，如果有 $B=f(A)$，就是说，f 的像充满整个 B，则说 f 是**满射**或**映上的**；如果对每个 $y\in B$，仅有唯一的 $x\in A$ 使 $f(x)=y$，则说 f 有**逆映射** f^{-1}，**它是定义在** $f(A)$ **上而取值于** A **上的满射. 当映射** $f:A\to f(A)$ **有逆映射时，称** f **是一一映射**. 设 $A_0\subset A$，映射 g 在 A_0 上定义且它在 A_0 上的值与 f 相同，则称 g 是 f 在 A_0 上的**限制**，记为 $g=f|_{A_0}$. 这时也称 f 是 g 在 A 上的**扩张**.

设给定两个映射 $f:A\to B$，$g:B\to C$，用记号 $g\circ f$ 表示 A 到 C 的映射，由关系 $g\circ f(x)=g(f(x))\,(x\in A)$ 定义，称为 f 与 g 的**复合**. 设 $B_0\subset B$，用记号 $f^{-1}(B_0)$ 表示 B_0 在映射 f 下的**原像**，即

$$f^{-1}(B_0)=\{x:x\in A,f(x)\in B_0\}.$$

容易验明，若 $B_0\subset B$，$A_0\subset A$，则一般有

$$f(f^{-1}(B_0))\subset B_0,f^{-1}(f(A_0))\supset A_0.$$

如果 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 A 的子集族，$\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 B 的子集族，同样容易验证下列关系：

$$f(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha f(A_\alpha),f^{-1}(\bigcap_\alpha B_\alpha)=\bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha).$$

今后我们常要用到**集** E **的特征函数**概念，记成 $\chi_E(x)$，它的定义是

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in E,\\ 0, & 若\ x\notin E.\end{cases}$$

定义 2.2 设 A,B 为两个集,如果有一一映射 f 存在,使 $f(A)=B$,则称 A 与 B 成**一一对应**或互相**对等**,记成 $A\sim B$.

对等概念是一种等价关系,它对于无限集的研究是十分重要的. 关于对等,易见有下列性质:

(i) **自反性** $A\sim A$;

(ii) **对称性** 若 $A\sim B$,则 $B\sim A$;

(iii) **传递性** 若 $A\sim B,B\sim C$,则 $A\sim C$.

由对等的定义可知,当两个有限集互相对等时,它们的元的个数必相同. 至于无限集,采用元素个数一词就不适宜,但对等概念仍然可用. 粗略地说,可以用对等概念对无限集的元的"个数"进行比较.

在所有无限集中,自然数集① $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ 是最简单的一个. 任何一个集,若与 $\mathbf{N}$ 对等,就称为**可列集**或**可数集**. 换句话说,可列集的一切元可用自然数编号,使之成为无穷序列的形式:$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots$. 可以举出许多可列集的例子. 例如全体**正偶数集**依 $2n\leftrightarrow n(n=1,2,\cdots)$ 对应的方法与 $\mathbf{N}$ 成一一对应;$\mathbf{Z}$ 与 $\mathbf{N}$ 的对应方法如下:

$$0\leftrightarrow 1,(-1)^{n+1}\left[\frac{n}{2}\right]\leftrightarrow n,n=2,3,\cdots,$$

其中记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 这样,正偶数集与整数集均为可列集.

再举一个稍微复杂的例子:有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列的. 其实,可把非零有理数 r 写成既约分数的形式 $r=p/q$,这里 $q>0,p\neq 0,p,q$ 均为整数. 称 $n=|p|+q$ 为 r 的"模". 现规定 0 的模为 1,很明显,模为 n 的有理数的个数是有限的. 于是把一切有理数按模的递增顺序编组,凡是模相同的编在同一组里,然后再依组的顺序把所有有理数逐个编号. 这样,每个有理数得到了一个确定的号码,因而

① 本书自然数集定义为 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$,不含 0.