21 世纪高等院校教材　大学工科数学教材系列

线性代数

（第二版）

西北工业大学线性代数编写组　编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

大学工科数学教材系列

线　性　代　数

(第二版)

西北工业大学线性代数编写组　编

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书共分七章，内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、向量组的线性相关性、矩阵的相似变换、二次型、线性空间与线性变换. 各章后均配有适量的习题，书后附有习题答案与提示. 另外还专门编有与本书配套的辅导书、辅导光盘、作业集等.

本书便于教学与自学，可作为高等院校工科和经济学科各专业的教材，也可供科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/西北工业大学线性代数编写组编. —2 版. —北京：科学出版社，2010

21 世纪高等院校教材·大学工科数学教材系列

ISBN 978-7-03-027097-9

I. 线… II. 西… III. 线性代数-高等学校-教材 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 052959 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 7 月第 二 版 印张：12 1/4
2010 年 7 月第五次印刷 字数：240 000
印数：20 001—25 000

定价：20.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

本书第一版自 2006 年出版以来已使用三年，在吸取使用本书的同行和读者提出的宝贵意见的基础上，我们对其内容作了以下修订：

1. 将原第 8 章的内容分散到相应章节之中作为例题或小专题，使得读者更便于了解线性代数相应内容的实际应用.

2. 更正了出现的笔误和不妥之处.

参加本书第二版编写的有徐仲、张凯院、彭国华、吕全义、刘哲、安晓虹，徐仲负责全书统稿工作.

我们衷心感谢广大读者对本书的关心，并欢迎继续提出宝贵意见.

编　者

2009 年 8 月于西北工业大学

第一版前言

线性代数是高等学校理工科和经济学科有关专业的一门数学基础课，它不仅是其他数学课程的基础，也是物理、力学、电路等课程的基础. 实际上，任何与数学有关的课程都涉及线性代数知识. 另外，由于计算机的飞速发展和广泛应用，使得许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，于是作为处理离散问题工具的线性代数，也是从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础.

本书是在原《线性代数》讲义的基础上几经修改、使用、编写而成的. 内容包括：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、向量组的线性相关性、矩阵的相似变换、二次型、线性空间与线性变换、线性代数应用举例等. 主要特点是：

1. 层次分明，适用面广. 全书由基础部分(第 1～6 章不带“*”号部分)、提高部分(带“*”号部分)和应用部分(第 8 章)三个模块组成. 基础模块是按国家教委制订的高等工业学校《线性代数课程教学基本要求》编写的，包括了线性代数的主要内容和基本计算方法，讲授这部分约需 36 学时；提高模块是对前面所学内容的综合应用与提高，可供较高学时(如 48 学时)使用和有余力的学生阅读；应用模块可穿插到有关章节中讲解或作为学生的课外阅读材料. 因此，本书不但适合工科本科生少学时与多学时线性代数课程的教学需要，也适于专科生的教学需要.

2. 分散难点，提高素质. 线性代数所使用的各种推证方法、公理化定义、抽象化思维、计算与运算技巧及应用能力等都很具有特色，是其他课程所无法替代的，是提高学生数学素质不可缺少的一环. 为了既能够有适当的理论深度，又能便于理解，我们对于一般线性代数中教学难度较大的内容作了适当处理. 例如，对于线性相关性这个线性代数中重要的概念和难点，采取了先介绍矩阵的初等变换及求解线性方程组的消元法，从而将向量组线性相关与否的问题转化为某个齐次方程组有无非零解的问题，使它较为具体；对各章内容的许多细节处理，也是颇有特色的.

3. 突出矩阵，加强空间. 矩阵这一数学概念能够与工程技术问题相结合并成为表达手段，主要依赖于它的种种运算和变换. 本书除了介绍矩阵的各种运算外，还突出了矩阵的三大变换，即初等变换、相似变换与合同变换. 对于线性方程组这一线性代数研究的基本内容，虽未单列一章，但它贯穿于全书的始终. 线性空间理论无疑是现代数学的必备基础和强有力的工具，本书适当加强了这部分内容，以满足工科学生更多层次的使用要求.

4. 题目典型，教辅配套. 每章配有一定数量的例题与习题，这些题目是经过精选的，其中不少具有新意，书末附有习题答案与提示. 另外，还有《线性代数作业集》

(A)(B)(西北工业大学出版社,2001)相配合,《线性代数典型题分析解集(第 2 版)》(西北工业大学出版社,2000)作为参考与提高,《线性代数试题及解答》(西北工业大学应用数学系线性代数教学组,2000)作为复习与强化,就构成了比较完整的线性代数教材体系. 另外,即将出版的光盘《线性代数流媒体课程》(科学出版社),采用了集视频、声频和课件于一体的流媒体技术,提供了两位教师讲授线性代数课程的实况,可为有关任课教师和学生参考使用.

参加本书编写的有刘克轩(第 1 章)、蒋大为(第 2 章)、徐仲(第 3、7 章)、张凯院(第 4 章)、彭国华(第 5 章)、李信真(第 6 章)和吕全义(第 8 章). 全书由徐仲统稿并负责修改定稿. 本书在编写过程中,得到了西北工业大学应用数学系领导及同事的关心和支持. 盛德成教授仔细审阅了书稿并提出了许多宝贵意见;西北工业大学教务处也对本书的出版给予了很大的支持和帮助,在此一并表示衷心的感谢.

由于水平所限,书中疏漏和不妥之处,恳请同行、读者指正.

编　者

2005 年 9 月于西北工业大学

目　　录

第1章　行　列　式

行列式是线性代数中的一个基本概念，其理论起源于解线性方程组，它在自然科学的许多领域里都有广泛的应用．本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质和计算方法以及用行列式解线性方程组的克拉默(Cramer)法则．

1.1　二、三阶行列式

考虑二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

的求解．当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，由消元法得方程组的唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了便于记忆，引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，称之为**二阶行列式**，它表示数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

如果把 a_{11}，a_{22} 的连线称为二阶行列式的主对角线，把 a_{12}，a_{21} 的连线称为次对角线，则二阶行列式的值就等于主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积．这种算法称为二阶行列式的**对角线法则**．按此法则，二元一次方程组(1.1)的解(1.2)可用二阶行列式表示成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

这样用行列式来表示解，形状简单，容易记忆，称为二元一次方程组的**行列式解法**.

类似地，对一般的三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.4}$$

利用加减消元法可以得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\ =&b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}\end{aligned}$$

当 x_1 的系数

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$$

时可解得

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}).$$

同样可求得

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3),$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}).$$

与二元一次方程组类似，为了便于记忆，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{def}} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.5}$$

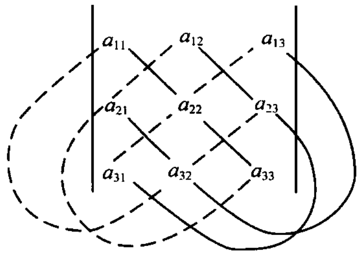

图 1.1　三阶行列式的对角线法则

上式左端的记号称为**三阶行列式**，它代表右端六项的代数和，其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为三阶行列式的第 i 行第 j 列上的元素，且称 i 为**行指标**，j 为**列指标**.

对于式(1.5)的右端项，可用图 1.1 的方法记忆．图中实线上三个元素的乘积组成的三项取正号，虚线上三个元素的乘积组成的三项取负号．这种方法称为三阶行列式的**对角线法则**.

引入三阶行列式后，三元一次方程组(1.4)当 $D\neq 0$ 时有唯一解

$$x_1=\frac{D^{(1)}}{D},\qquad x_2=\frac{D^{(2)}}{D},\qquad x_3=\frac{D^{(3)}}{D},$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D^{(1)}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D^{(2)}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D^{(3)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

称 D 为方程组(1.4)的**系数行列式**,而 $D^{(1)},D^{(2)},D^{(3)}$ 是将 D 中第 1,2,3 列元素分别换成常数项 b_1,b_2,b_3 得到的三阶行列式. 这就是三元一次方程组的**行列式解法**.

例 1.1 用行列式解法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 系数行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1\times3\times(-1)+(-2)\times2\times3+(-1)\times0\times1 \\ &\quad -(-1)\times3\times3-(-2)\times0\times(-1)-1\times2\times1 \\ &= -8. \end{aligned}$$

由于 $D\neq0$,方程组有唯一解. 又有

$$D^{(1)}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-8, \qquad D^{(2)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=8,$$

$$D^{(3)}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-16,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D^{(1)}}{D}=1, \qquad x_2=\frac{D^{(2)}}{D}=-1, \qquad x_3=\frac{D^{(3)}}{D}=2.$$

从以上讨论自然会想到,对于 n 个未知数 n 个一次方程的方程组,它的解是否也能用 n 阶行列式来表示? 若能,如何来定义 n 阶行列式呢? 显然,当 n 较大时用上述类似的消元法是无法推导的. 解决的思路是:先研究排列及其性质,再考察二、三阶行列式的表达式,寻找新的规律,然后按这些规律来定义 n 阶行列式.

1.2　排列及其逆序数

为了定义高阶行列式，需要介绍排列的有关概念．

定义 1.1　把 n 个不同元素排成一列，叫做这 n 个元素的一个**全排列**，简称**排列**．

n 个不同元素构成的所有全排列的总数为 $n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$．

这里主要讨论 n 个不同的自然数的排列，且把这 n 个数从小到大的排列称为**标准排列**或**自然排列**．显而易见，对于 n 个不同的自然数，除标准排列外，其他的排列都或多或少地破坏了从小到大这一排列次序．为了确切地说明这一问题，给出如下定义．

定义 1.2　在 n 个不同的自然数组成的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果某两个数不是自然顺序，即前面的数大于后面的数，则称这两个数构成一个**逆序**．该排列中逆序的总个数称为这个排列的**逆序数**，记作 $\tau(p_1\ p_2\cdots\ p_n)$.

求排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，可从第二个元素开始，依次观察 $p_i(i=2,3,\cdots,n)$ 与其前面的数构成的逆序个数，不妨设为 τ_i（即前面有 τ_i 个数比 p_i 大），则排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\tau_2+\tau_3+\cdots+\tau_n.$$

例 1.2　求下列排列的逆序数

(1) 6 3 7 2 4 5 1;　　(2) 1 3 7 2 4 5 6.

解　(1) 易看出

$$\tau_2=1,\quad \tau_3=0,\quad \tau_4=3,\quad \tau_5=2,\quad \tau_6=2,\quad \tau_7=6,$$

所以逆序数

$$\tau(6\ 3\ 7\ 2\ 4\ 5\ 1)=\sum_{i=2}^{7}\tau_i=14.$$

(2) 显然

$$\tau_2=0,\ \tau_3=0,\ \tau_4=2,\ \tau_5=1,\ \tau_6=1,\ \tau_7=1,$$

所以逆序数

$$\tau(1\ 3\ 7\ 2\ 4\ 5\ 6)=\sum_{i=2}^{7}\tau_i=5.$$

定义 1.3　逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

据此定义，例 1.2 中的排列(1)为偶排列，而排列(2)为奇排列．

定义 1.4　在一个排列中，将某两个数的位置对调，而其余数不动，即可得一

新的排列,这一过程称为**对换**.

比较例 1.2 中的两个排列,可见排列 1 3 7 2 4 5 6 是由排列6 3 7 2 4 5 1 经过 6 与 1 的对换得到的. 从该例还可发现,排列经过一次对换后奇偶性发生了变化. 一般有下面的结论.

定理 1.1 排列经一次对换,其奇偶性改变.

证 (1) 相邻对换情形. 设一排列为

$$a_1a_2\cdots a_l\, a\, b\, b_1\, b_2\cdots\, b_m,$$

其逆序数为 t_1. 将 a 与 b 位置对调,即经一次相邻对换得新排列

$$a_1\, a_2\cdots\, a_l\, b\, a\, b_1\, b_2\cdots\, b_m.$$

若记该排列的逆序数为 t_2,于是当 $a>b$ 时,$t_2=t_1-1$;而当$a<b$时,$t_2=t_1+1$. 故经一次相邻对换后排列的奇偶性发生改变.

(2) 一般情形. 设排列为

$$a_1\, a_2\cdots\, a_l\, a\, b_1\cdots\, b_m\, b\, c_1\cdots\, c_n, \tag{1.6}$$

将 a 与 b 对调得新排列

$$a_1\, a_2\cdots\, a_l\, b\, b_1\cdots\, b_m\, a\, c_1\cdots\, c_n, \tag{1.7}$$

排列(1.7)可看作是先由排列(1.6)把 a 依次与 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 对调,即作 m 次相邻对换得排列

$$a_1\, a_2\cdots\, a_l\, b_1\cdots\, b_m\, a\, b\, c_1\cdots\, c_n \tag{1.8}$$

后,再将排列(1.8)中 b 依次与 $a,b_m,\cdots,b_1$ 作 $m+1$ 次相邻对换而得. 这样,由排列(1.6)经 $2m+1$ 次相邻对换可得排列(1.7),于是由(1)知排列(1.7)与排列(1.6)的奇偶性不同. □

推论 把一个奇排列调成标准排列须作奇数次对换,把一个偶排列调成标准排列须作偶数次对换.

1.3 n 阶行列式定义

为了给出 n 阶行列式定义,再仔细研究一下三阶行列式的表达式. 由式(1.5)容易看出:

(1) 式(1.5)右边的每一项都是不同行不同列的三个元素的乘积,并取适当的正负号. 若不考虑各项的正负号,一般项可写成 $a_{1p_1}\, a_{2p_2}\, a_{3p_3}$. 这里第一个下标(即行指标)的排列为标准排列,表示这三个数是依次取自第 1,2,3 行的元素;第二个下标(即列指标)的排列 $p_1\, p_2\, p_3$ 是 1,2,3 三个数的某一排列,也反映出是取自不同列的三个元素.

(2) 当 $p_1\, p_2\, p_3$ 取遍由 1,2,3 构成的所有排列时,便得式(1.5)右端的所有项(不计正负号),即共有 3! =6 项.

(3) 经验算可知，当 $p_1\ p_2\ p_3$ 为偶排列时，$a_{1p_1}\ a_{2p_2}\ a_{3p_3}$ 前取正号，当 $p_1\ p_2\ p_3$ 为奇排列时，$a_{1p_1}\ a_{2p_2}\ a_{3p_3}$ 前取负号，因此 $a_{1p_1}\ a_{2p_2}\ a_{3p_3}$ 前的符号可由排列 $p_1\ p_2\ p_3$ 的逆序数确定．于是式(1.5)右端任意一项可表示为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}\ a_{2p_2}\ a_{3p_3}.$$

综上分析，三阶行列式可表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2p_3)} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}\ a_{2p_2}\ a_{3p_3},$$

其中 $\sum\limits_{(p_1p_2p_3)}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有全排列 $p_1\ p_2\ p_3$ 求和．

易验证二阶行列式(1.3)也可表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2)} (-1)^{\tau(p_1p_2)}a_{1p_1}\ a_{2p_2}.$$

根据以上讨论，可将行列式概念推广到一般情形．

定义 1.5 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，它表示数 $\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\ a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\ a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{1.9}$$

其中 $p_1\ p_2\cdots\ p_n$ 为 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列，$\tau(p_1\ p_2\cdots\ p_n)$ 为排列 $p_1\ p_2\cdots\ p_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}$ 表示对自然数 $1,2,\cdots,n$ 的所有全排列求和．

定义表明：为了计算 n 阶行列式，首先作所有可能位于不同行不同列的 n 个元素的乘积(共 $n!$ 项)，并把每项乘积的 n 个元素按行指标的自然顺序排列，然后由列指标排列的奇偶性确定该项的符号，最后做代数和即得行列式的值．

当 $n=2,3$ 时，由此定义得到的二、三阶行列式的值与用对角线法则求得的结果一致．当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$.

常用 D 或 D_n 表示 n 阶行列式(1.9)．在不混淆的情况下，也可把 n 阶行列式简记作 $D=|a_{ij}|$ 或 $D_n=|a_{ij}|$.

例 1.3 证明

(1) 上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 次上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

其中行列式中未写出的元素都是 0.

证 (1) 由于行列式中零元素较多,故展开式中许多项是零,现只要确定出非零项.考察一般项$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.因为当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$,所以 p_n 只能取 n,而要使 $a_{n-1,p_{n-1}}$ 非零,p_{n-1} 只能取 $n-1$ 或 n,但由行列式定义,每项的 n 个元素要取自不同行不同列,而 a_{nn} 已取自第 n 列,于是 p_{n-1} 只能取 $n-1$. 依次类推,p_i 只能取 i,这就说明该行列式的展开式中非零项只有一项,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 类似于(1)中的推理,次上三角行列式的展开式中非零项也只有一项,即

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} &= (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 1)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.\end{aligned}$$

作为例 1.3 的特例,有

(1) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

(2) 次对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n ,$$

其中未写出的元素均为 0.

例 1.4 试判断 $a_{12}\, a_{23}\, a_{31}\, a_{44}\, a_{56}\, a_{65}$是否为六阶行列式$D=|a_{ij}|$中的一项?

解 显然 $a_{12}\, a_{23}\, a_{31}\, a_{44}\, a_{56}\, a_{65}$是六阶行列式中不同行不同列的 6 个元素的乘积,且第一个下标为标准排列,因此只要看第二个下标构成的排列 2 3 1 4 6 5 是否为偶排列. 若是偶排列,则是 D 中的项;若是奇排列,则不是 D 中的项. 因为逆序数

$$\tau(2\ 3\ 1\ 4\ 6\ 5)=3,$$

所以 $a_{12}\, a_{23}\, a_{31}\, a_{44}\, a_{56}\, a_{65}$不是六阶行列式中的项.

定理 1.2 n 阶行列式的定义也可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(q_1 \cdots q_n)} (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1}\, a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n} , \tag{1.10}$$

其中 $q_1\, q_2 \cdots q_n$ 为 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列.

证 显然式(1.10)与式(1.9)的右端都是 $n!$ 项,且每项都是 n 阶行列式中不同行不同列的 n 个元素之乘积,并取适当的正负号.

取式(1.10)右端的一项$(-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$,交换 n 个元素的相乘次序,使行指标排列 $q_1\, q_2 \cdots q_n$ 变成标准排列 $1\ 2\ \cdots\ n$,与此同时列指标排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 变成了新的排列 $p_1\, p_2 \cdots p_n$,由定理 1.1 的推论知,排列 $q_1\, q_2 \cdots q_n$ 与 $p_1\, p_2 \cdots p_n$ 的奇偶性相同,于是

$$(-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1}\, a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n} = (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1 p_1}\, a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n} .$$

这表明式(1.10)右端的一项对应式(1.9)右端的一项.

又若 $p_i = j$,则由 $a_{i p_i} = a_{ij} = a_{q_j j}$ 知,$q_j = i$,可见排列 $q_1\, q_2 \cdots q_n$ 由排列 $p_1\, p_2 \cdots p_n$唯一确定. 故有