矩阵分析

冯良贵　胡庆军　编著

国防科技大学出版社

第 1 章　线性变换的矩阵表示

本章旨在给出已学线性代数知识的必要回顾,主要内容包括对偶空间、多重线性型以及线性变换的矩阵表示等.本书除特别说明外,约定$\mathbb{F}$表示实数域$\mathbb{R}$或复数域$\mathbb{C}$,涉及的内积空间是指实内积空间或复内积空间.

1.1　对偶空间

域$\mathbb{F}$上的 n 维向量空间均同构于$\mathbb{F}^n$.设 V 为$\mathbb{F}$上向量空间,由 V 可产生一个新空间:$\mathrm{Hom}(V,\mathbb{F})$,记为 V^*,它由从 V 到$\mathbb{F}$的一切线性变换组成.一般地,人们称 V^* 为 V 的**一次对偶空间或对偶空间**.若$\{x_1,\cdots,x_n\}$为 V 的一组基,则$\{x_1^*,\cdots,x_n^*\}$便为 V^* 的一组基,称之为相应于$\{x_1,\cdots,x_n\}$的对偶基,其中 x_i^* 由下列条件给出:

$$x_i^*(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$$

明显地,下列映照为一个双线性函数:

$$[-,-]:V\times V^*\to\mathbb{F},\qquad (x,y)\to[x,y]=y(x)$$

关于双线性函数$[-,-]$,我们首先有:

命题 1.1.1　设 $\dim_{\mathbb{F}}V=n$,$\{x_1,\cdots,x_n\}$为 V 的一组基,$\{a_1,\cdots,a_n\}$为任意给定的 n 个纯量,则$\exists!$ $y\in V^*$ s.t. $[x_i,y]=a_i,i=1,2,\cdots,n$.

证明:(1)取 $y=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i^*$,则有$[x_i,y]=a_i,i=1,2,\cdots,n$.

(2)若 $z\in V^*$ 也满足条件$[x_i,z]=a_i,i=1,2,\cdots,n$,则$[x_i,z-y]=0$,从而 $z=y$.

□

命题 1.1.2　设 $u,v\in{}_{\mathbb{F}}V,u\neq v,\dim V=n$,则$\exists\, y\in V^*$ s.t. $[u,y]\neq[v,y]$.特别地,对 V^n 中的任何非零元 x,$\exists\, y\in V^*$ s.t. $[x,y]\neq0$.

证明:显然.

□

如前所述,从一个向量空间${}_{\mathbb{F}}V$出发,可构造$\mathbb{F}$上的向量空间 V^*;进而重复从 V 构造 V^* 的过程,又得向量空间${}_{\mathbb{F}}V^{**}$;注意到该过程总可以重复执行,因此,给定一个${}_{\mathbb{F}}V$,便得 $V^*,V^{**},V^{***},\cdots$,当$\dim_{\mathbb{F}}V=n$ 时,利用对偶基便知,$\dim V=\dim V^*=\dim V^{**}=\cdots$,由于

$$V^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,\mathbb{F});\ V^{**}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V^*,\mathbb{F})$$

因此,任给定 $x\in V$,赋值映照 $\phi_x=[x,-]:V^*\to\mathbb{F},y\to[x,y]$便为 V^{**} 中元.可直接验证知:映照 $\phi:V\to V^{**},x\to\phi_x=[x,-]$为单的线性映照.一般地,若向量空间 V(可能是有限维,也可能是无限维)满足 ϕ 为同构,则称 V 为一个自反空间.容易知道,当 V 为有限维向量空间时,V 总为一个自反空间.因此,对一个有限维向量空间而言,我们甚至可通过同构 ϕ 将 V 和 V^{**} 视为同一个空间.向量空间的子集的零化子空间是 V^* 的子空间,它具有以下性质:

命题 1.1.3 让 V 为向量空间,$\varnothing\neq S\subseteq V$,记 $S^0=\{y\in V^*\mid y(s)=0$ 对 $\forall s\in S\}$.若 $\dim V=n<\infty$,S 含有非零向量,则 $S^0\neq V^*$.

定理 1.1.1 设 $\dim V=n,M\leqslant V,\dim M=m$ 则 $M^0\leqslant V^*$ 且 $\dim M^0=n-m$.

证明: (1)$M^0\leqslant V^*$ 可通过直接验算可得.

(2)计算 M^0 的维数.

设 M 的一组基为 $x_1,\cdots,x_m$,扩充为 V 的一组基为:$x_1,\cdots,x_m;x_{m+1},\cdots,x_n$.于是 V^* 的一组基为 $x_1^*,\cdots,x_m^*;x_{m+1}^*,\cdots,x_n^*$.容易知道,$x_{m+1}^*,\cdots,x_n^*$ 均零化M.又 $\forall y\in V^*$,y 可表为

$$y=a_1x_1^*+\cdots+a_mx_m^*+a_{m+1}x_{m+1}^*+\cdots+a_nx_n^*$$

于是 $y(M)=0\Rightarrow\begin{cases}a_1=0\\ \vdots\\ a_m=0\end{cases}$,因此 $\operatorname{span}\{x_{m+1}^*,\cdots,x_n^*\}=M^0$.

□

推论 1.1.1 设 $\dim V=n,M\leqslant V$,则通过同构 ϕ 可将 M 看成M^{00}.

证明: 首先$(M^0)^0$ 是 V^{**} 的子空间;其次,记 M 的一组基为 $x_1\cdots,x_m$,将之扩充为 V 的一组基:$x_1,\cdots,x_m;x_{m+1},\cdots,x_n$.于是 M^0 的一组基为:$x_{m+1}^*,\cdots,x_n^*$.V^{**} 的一组基为:$[x_1,-],\cdots,[x_m,-],[x_{m+1},-],\cdots,[x_n,-]$.具体验证可知:$[x_1,-],\cdots,[x_m,-]$即构成 M^{00}的一组基.因此,把$[x_1,-]$看成 $x_1,\cdots,[x_m,-]$看成 x_m 后,M 与 M^{00}便为同一空间.

□

定理 1.1.2 设向量空间 V(可能为无限维)有分解 $V=M\oplus N$.则有 $M^*\simeq N^0,N^*\simeq M^0,V^*=M^0\oplus N^0$.

证明: 事实上,$\forall y\in M^*$,$yp_M\in V^*$,其中 p_M 为 V 中沿 N 到 M 的射影,于是 $yp_M\in N^0$,因此有映射 $\varphi:M^*\to N^0,y\to yp_M$ 是同构.类似地可证:$N^*\simeq M^0$,进而 $V^*=M^0\oplus N^0$.

□

1.2 多重线性型

让我们先从双线性型开始.回顾:给定$_{\mathbb{F}}V$,$_{\mathbb{F}}W$ 为两线性空间,$\omega(-,-):V\times W\to\mathbb{F}$ 称为一个**双线性型**(或叫**双线性函数**)是指 $\omega(-,-)$对每个分量均是线性的.例如:

$[-,-]: V\times V^* \to \mathbb{F}$ 即为一个双线性型.易知,给定系数域$\mathbb{F}$上的两个线性空间 U 和 V,集合$\{\omega \mid \omega$ 为 $U\times V$ 上的双线性型$\}$在映照的通常加法及通常纯量乘法下仍构成向量空间.对此空间,我们有:

定理 1.2.1　设${}_{\mathbb{F}}U$ 的一组基为$\{x_1,\cdots,x_m\}$,${}_{\mathbb{F}}V$ 的一组基为$\{y_1,\cdots,y_n\}$,则

(1) $\forall A=(a_{ij})\in \mathbb{F}^{m\times n}$, $U\times V$ 上有且仅有一个双线性型 ω s.t. $(\omega(x_i,y_j))=(a_{ij})$.

(2) $U\times V$ 上的双线性型空间的一组基为$\{\omega_{pq} \mid p=1,2,\cdots,m;q=1,2,\cdots,n\}$,其中$\omega_{pq}$满足$(\omega_{pq}(x_i,y_j))=(\delta_{ip}\delta_{jq})$.因此$\dim(U\times V$ 上的双线性型空间$)=mn$.

证明: (1) $\forall x\in U, x=(a_1,\cdots,a_m)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$; $\forall y\in V, y=(b_1,\cdots,b_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$.定义 $\omega:(x,y)\to(a_1,\cdots,a_m)A\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$,则有 ω 为一个双线性型,则$(\omega(x_i,y_j))=(a_{ij})$.另一方面,设双线性型 ω_1,ω_2 分别满足$(\omega_1(x_i,y_j))=(a_{ij})$,$(\omega_2(x_i,y_j))=(a_{ij})$,则有$((\omega_1-\omega_2)(x_i,y_j))=0$,于是$(\omega_1-\omega_2)(x,y)=0$,即 $\omega_1=\omega_2$.

(2)首先,下列线性映照为 1-1 对应: $U\times V$ 上的双线性型空间$\to\mathbb{F}^{m\times n}$, $\omega\to(\omega(x_i,y_j))$.特别地,$\omega_{pq}\to E_{pq}$.因此$\{\omega_{pq}\}$为线性无关子集.进一步,$\forall\,\omega$ 为 $U\times V$ 上的双线性型,ω 可用ω_{pq}来线性表示.

□

定义 1.2.1　设 $V_1,\cdots,V_k$ 是 k 个$\mathbb{F}$上的向量空间,若映照 $\omega(x_1,\cdots,x_k): V_1\times\cdots\times V_k\to\mathbb{F}$ 对每个分量都是线性的,则 ω 叫做一个 **k-线性型**. $V_1\times\cdots\times V_k$ 上所有 k-线性型集合关于通常的函数加法及乘量乘法构成$\mathbb{F}$上的向量空间,称此空间为 $V_1\times\cdots\times V_k$ 的 **k-线性型空间**.当 $V_1=\cdots=V_k=V$ 时,我们称 $V_1\times\cdots\times V_k$ 上的 k-线性型空间为 V 上 k-线性型空间.设$\{x_{l_1}^{(1)}\}_{l_1\in L_1},\cdots,\{x_{l_k}^{(k)}\}_{l_k\in L_k}$分别为 $V_1,\cdots,V_k$ 的一组基,那么任何一个 $V_1\times\cdots\times V_k$ 上的 k-线性型 ω,它由这些$(x_{l_1}^{(1)},\cdots,x_{l_k}^{(k)})$所对应的值唯一确定.由此得: $\omega\xleftrightarrow{1-1\text{对应}}|L_1|\cdots|L_k|$维乘量组.因此 $V_1\times\cdots\times V_k$ 上的 k-线性型空间的维数为$(\dim V_1)\times\cdots\times(\dim V_k)$.特别地,$\{\omega_{(l_1,\cdots,l_k)}\}$为其一组基,其中 $\omega_{(l_1,\cdots,l_k)}$为满足下列条件的 k-线性型:

$$\omega_{(l_1,\cdots,l_k)}:(x_{j_1}^{(1)},\cdots,x_{j_k}^{(k)})\to\begin{cases}1, & \text{当}(j_1,\cdots,j_k)=(l_1,\cdots,l_k)\text{时}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

对 V 上 k-线性型空间,容易想到置换的技巧应该能用上.例如,让 S_k 表 k 元置换集,$\pi\in S_k$,ω 为 V 上的一个 k-线性型,令

$$\pi\omega:(x_1,\cdots,x_k)\to\omega(x_{\pi(1)},\cdots,x_{\pi(k)})$$

则有 $\pi\omega$ 仍为 V 上的一个 k-线性型.由此引出:

定义 1.2.2　设 ω 为 V 上的一个 k-线性型.若$\forall\,\pi\in S_k$,均有 $\pi\omega=\omega$.则称 ω 为一个

对称 k - 线性型.

V 上的所有对称 k - 线性型仍构成向量空间,它是 V 上 k - 线性型空间的子空间.从任何给定的 V 上 k - 线性型 ω 出发,下列 k - 线性型总为一个对称 k - 线性型: $\sum\limits_{\pi\in S_k}\pi\omega$.

在多重线性代数中,下列两种类型的 k - 线性型也是十分重要的.

(1)斜对称型

设 ω 为 V 上的一个 k - 线性型.若对任何奇置换 π,均有: $\pi\omega=-\omega$,则称 ω 为**斜对称的**;任何给定的 k - 线性型 ω, $\sum\limits_{\pi\in S_n}(\mathrm{sgn}\pi)\pi\omega$ 即为一个斜对称 k - 线性型,其中 $\mathrm{sgn}\pi$ 表示置换 π 的符号,即

$$\forall\, \pi\in S_k,\mathrm{sgn}\pi=\begin{cases}1, & \pi\text{ 为偶置换}\\ -1, & \pi\text{ 为奇置换}\end{cases}$$

(2)交错型

设 ω 为 V 上的 k - 线性型.若 $\omega(x_1,\cdots,x_k)$满足:一旦有两个分量取值相等,则 $\omega(x_1,\cdots,x_k)$便取值为 0.此时称 ω 为一个**交错 k - 线性型**.

交错型与斜对称型有如下关系:每个交错的 k - 线性型必为斜对称的;反之,当线性空间 V 的系数域 $\mathbb{F}$ 的特征不为 2 时,每个斜对称的 k - 线性型也必为交错 k - 线性型.

下述定理表明:对一个 n 维向量空间 V 中的 n 个向量 $x_1,\cdots,x_n$, $\{x_1,\cdots,x_n\}$的线性相关性可借助于 V 上的任何一个非零交错 n - 线性型 ω 来判定.

定理 1.2.2 设 $\dim_{\mathbb{F}}V=n$, $x_1,\cdots,x_n$ 为 V 中的 n 个向量, ω 为一个 V 上的非零交错 n - 线性型,则:

(1) $\{x_1,\cdots,x_n\}$为 $L.\mathrm{ind.}\Leftrightarrow \omega(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$.

(2)若 ω' 也为 V 上的一个非零交错 n - 线性型,则 ω 与 ω' 必线性相关.

证明: (1)$\Rightarrow$ $\{x_1,\cdots,x_n\}$为 $L.\mathrm{ind.}$,则$\{x_1,\cdots,x_n\}$构成 V 的一组基.若 $\omega(x_1,\cdots,x_n)=0$,则 $\forall (y_1,\cdots,y_n)\in \underbrace{V\times\cdots\times V}_{n}$,将 y_i 写成 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性组合,展开 $\omega(y_1,\cdots,y_n)$后即得到 0,这导致 $\omega=0$,矛盾.

$\Leftarrow$ 若 $x_1,\cdots,x_n$ 线性相关,则不妨说 $x_1=a_2x_2+\cdots+a_nx_n$,于是 $\omega(a_2x_2+\cdots+a_nx_n,x_2,\cdots,x_n)=0$,矛盾于 $\omega(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$.

(2)取$\{e_1,\cdots,e_n\}$为 V 的一组基. $\forall (y_1,\cdots,y_n)\in \underbrace{V\times\cdots\times V}_{n}$,有

$$(y_1,\cdots,y_n)=(e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$\omega(y_1,\cdots,y_n)=\omega(e_1,\cdots,e_n)\times$某个 $\mathbb{F}$ 的元 c,该 c 仅由 $\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ 决定;同样地,$\omega'(y_1,\cdots,y_n)=\omega'(e_1,\cdots,e_n)\times$某个 $\mathbb{F}$ 的元 c'.注意到 $c=c'$,而 $\omega(e_1,\cdots,e_n)$与 $\omega'(e_1,$

$\cdots, e_n)$显然是线性相关的.因此,ω 与 ω'线性相关.

□

定理 1.2.2 中的(2)表明,对 n 维向量空间 V 而言,V 上的交错 n - 线性型构成的空间的维数 $\leqslant 1$.进一步,我们还有:

定理 1.2.3　设 $\dim_{\mathbb{F}} V = n$.则

(1)当 $k > n$ 时,V 上的交错 k - 线性型只有 1 个,为 0;

(2) V 上的交错 n - 线性型构成的空间是 1 维的.

证明: (1)当 $k > n$ 时,任何 k 个向量 $x_1, \cdots, x_k$ 均是线性相关,从而 V 上的交错 k - 线性型均为 0.

(2)当 $k = n$ 时,只需证明 V 上存在一个非零的交错 k - 线性型即可.使用归纳法.当 $n = 1$ 时,显然存在非零交错 1 - 线性型(事实上,V^* 的任何一个非零元即是一例).

设 $n = l$ 时,存在一个非零交错 l - 线性型 v.则对 $n = l + 1$ 时,先对 V 的一个 l 维子空间 W 取其一个非零交错 l - 线性型 v,将 $v(p_W(x_1), \cdots, p_W(x_l))$仍记为 v,这里 $x_1, \cdots, x_l \in V$,p_W 表示 V 到 W 的一个投射,此时 v 便为 V 上的一个交错 l - 线性型.于是 $\exists$ 向量 $x_1^0, \cdots, x_l^0 \in W \subseteq V$ 使得 $v(x_1^0, \cdots, x_l^0) \neq 0$.再取 $x_{l+1}^0 \notin \mathrm{span}\{x_1^0, \cdots, x_l^0\}$,于是空间 $\mathbb{F} x_{l+1}^0 + \mathrm{span}\{x_1^0, \cdots, x_l^0\} = \mathbb{F} x_{l+1}^0 \oplus \mathrm{span}\{x_1^0, \cdots, x_l^0\}$即为空间 V,其中$\{x_1^0, \cdots, x_l^0, x_{l+1}^0\}$构成 V 的一组基,这里利用了定理 1.2.2 中的(1).

在 V 的对偶基$(x_1^0)^*, \cdots, (x_{l+1}^0)^*$ 中,令 $u = (x_{l+1}^0)^*$,则 u 为 V 到 $\mathbb{F}$ 的线性函数且满足

$$\begin{cases} u(x_1^0) = \cdots = u(x_l^0) = 0 \\ u(x_{l+1}^0) \neq 0 \end{cases}$$

构造 $\omega(x_1, \cdots, x_l, x_{l+1})$如下:

$$\omega(x_1, \cdots, x_l, x_{l+1}) = \left[\sum_{i=1}^{l} (i, l+1)(v(x_1, \cdots, x_l) u(x_{l+1}))\right] - v(x_1, \cdots, x_l) u(x_{l+1})$$

其中 $v(x_1, \cdots, x_l)$表示 $v(p_w(x_1), \cdots, p_w(x_l))$, $x_1, \cdots, x_l, x_{l+1} \in V$,这里$(i, l+1)$表示对 i 与 $l+1$ 进行互换,则容易验证:

①$\omega \neq 0$,且 ω 为$(l+1)$ - 线性型;

②设 $x_i = x_j$,则

$$\begin{aligned} &\omega(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_{l+1}) \\ &= v(x_{l+1}, x_2, \cdots, x_l) u(x_1) + \cdots + v(x_1, \cdots, x_{l-1}, x_{l+1}) u(x_l) - v(x_1, \cdots, x_l) u(x_{l+1}) \\ &= \begin{cases} 0 & i, j < l+1 \\ 0 & i, j \text{ 中有一个为 } l+1 \text{ 时} \end{cases} \end{aligned}$$

因此 ω 为交错型.

□

1.3 线性变换的表示阵

对线性空间$_{\mathbb{F}}V$和$_{\mathbb{F}}W$,选定 V 的一组基$\{\xi_1,\cdots,\xi_m\}$和 W 的一组基$\{\eta_1,\cdots,\eta_n\}$,则映照 $\phi:L(V,W)\to\mathbb{F}^{n\times m}(\phi(\sigma)=[\sigma]$,其中$[\sigma]$由式子 $\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_m)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)[\sigma]$唯一决定)建立了 $L(V,W)$到$\mathbb{F}^{n\times m}$之间的一一对应,通常称矩阵$[\sigma]$为 σ 在基$\{\xi_1,\cdots,\xi_m\}$和$\{\eta_1,\cdots,\eta_n\}$下的**表示矩阵**.易知只要 $\sigma\tau$ 有定义,就有$[\sigma\tau]=[\sigma][\tau]$.借助于线性变换的表示阵,我们可将矩阵看成线性变换,同时又可通过研究矩阵来研究线性变换.因此,可以说矩阵理论也就是向量空间的线性变换理论.

下面几个结论是显然的.

(1)设 $\dim_{\mathbb{F}}V=n,\sigma\in L(V,V)$,则 σ 为同构 $\Leftrightarrow$ σ 为单射 $\Leftrightarrow$ σ 为满射.

(2)$\forall\sigma\in L(V,V)$,若$\{\xi_1,\cdots,\xi_m\}$,$\{\eta_1,\cdots,\eta_m\}$为 V 的两组基,则 σ 在$\{\xi_1,\cdots,\xi_m\}$下的表示阵与 σ 在$\{\eta_1,\cdots,\eta_m\}$下的表示阵是相似矩阵,这里 σ 在$\{\xi_1,\cdots,\xi_m\}$下的表示阵是指通过 $\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_m)=(\xi_1,\cdots,\xi_m)M$ 所确定的矩阵 M.

(3)设 $\sigma\in L(V,V)$,$\dim_{\mathbb{F}}V=n$.若 W 是 V 的不变子空间,则在适当选取 V 的基下,σ 的表示阵可为$\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_4\end{pmatrix}$的形式,其中 A_1,A_4 均为方阵.

(4)n 阶方阵 A 可相似于对角块形式$\begin{pmatrix}M & \\ & N\end{pmatrix}$当且仅当将 A 看成 n 维向量空间 V 上的线性变换时有不变空间 W_1 和 W_2 满足 $V=W_1\oplus W_2$.

有时,将矩阵看成线性变换后能有助于较方便地获得有关矩阵的相关结果,如下述定理中的(3).

定理 1.3.1 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,则以下几条成立.

(1)若秩 $A=\rho>1$,则 A 可解为 $A=A_1+\cdots+A_\rho$,其中秩 $A_i=1(i=1,2,\cdots,\rho)$.

(2)秩 $A\leqslant1$ 等价于 A,可写成 $A=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,其中 β_i 与 α_i 均属于$\mathbb{C}(i=1,2,\cdots,n)$.

(3)$\exists$可逆的 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$,使得$(PA)^2=PA$.

证明:让$\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$为$_{\mathbb{C}}V$的一组基,将 A 看成下列线性变换:

$$\sigma:V\to V$$
$$\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)A$$

(1)秩 $A=\rho\Leftrightarrow\dim\sigma(V)=\rho\Rightarrow\sigma(V)=\mathrm{span}\{\sigma x_1,\cdots,\sigma x_\rho\}$,其中$\{\sigma x_1,\cdots,\sigma x_\rho\}$为 $\mathrm{Im}\,\sigma$ 的一组基,结果,$\sigma(V)=\mathbb{C}\,\sigma x_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}\,\sigma x_\rho$.考察映照:$V\xrightarrow{\sigma}\sigma(V)\xrightarrow{\pi_i}\mathbb{C}\,\sigma x_i\xrightarrow{\lambda_i}V$,其中

π_i 为投射，λ_i 为嵌入.则 $\lambda_i\pi_i\sigma\in L(V,V)$，$\sigma=\sum_{i=1}^{\rho}\lambda_i\pi_i\sigma$，注意到 $\lambda_i\pi_i\sigma$ 是秩为 1 的线性变换，因此 $A=\sum_{i=1}^{\rho}[\lambda_i\pi_i\sigma]$，如所愿.

(2)⇒　当秩 $A=0$ 时，$A=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(0,\cdots,0)$.当秩 $A=1$ 时，A 有分解，$A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}Q$，其中 P、Q 可逆.注意到 $P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}&0\\ \vdots&\vdots\\ p_{n1}&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}q_{11}&\cdots&q_{1n}\\0&\cdots&0\end{pmatrix}$.故

$$A=\begin{pmatrix}p_{11}\\ \vdots\\ p_{n1}\end{pmatrix}(q_{11}\quad\cdots\quad q_{1n})$$

⇐　显然.

(3)让 R 与 N 分别表示 σ 的象空间与零空间，取 R 的基为 $\{x_1,\cdots,x_\rho\}$，将其扩充为 V 的基 $\{x_1,\cdots,x_\rho;x_{\rho+1},\cdots,x_n\}$.取 $\{y_1,\cdots,y_\rho\}$ 满足 $\begin{cases}\sigma(y_1)=x_1\\ \quad\vdots\\ \sigma(y_\rho)=x_\rho\end{cases}$，则 $y_1,\cdots,y_\rho$ 线性无关，又将 $\{y_1,\cdots,y_\rho\}$ 并上 N 的一组基 $\{y_{\rho+1},\cdots,y_n\}$ 得 V 的基 $\{y_1,\cdots,y_\rho;y_{\rho+1},\cdots,y_n\}$.令线性变换 τ 为

$$\tau:V\to V,\tau(x_i)=y_i(i=1,2,\cdots,n)$$

于是 τ 为可逆的，且

$$\tau\sigma(y_i)=y_i(i=1,2,\cdots,\rho),\tau\sigma(y_j)=0\ (j=\rho+1,\rho+2,\cdots,n)$$

因此 $(\tau\sigma)^2=\tau\sigma$.令 τ 在基 $\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ 下的表示阵为 P，则有 $(PA)^2=PA$.

□

定义 1.3.1　设 $\mathbb{A}\in L(V,V)$，其中 V 为域 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间，线性变换：

$$\mathbb{A}':V^*\to V^*$$
$$y\to[\mathbb{A}-,y]=y(\mathbb{A}-)$$

称为 $\mathbb{A}$ 的**伴随变换**或对偶，有时也简称为 $\mathbb{A}$ 的**伴随**.

显见，$\mathbb{A}$ 的伴随 $\mathbb{A}'$ 有如下性质：$\forall x\in V$，$\forall y\in V^*$，$[\mathbb{A}x,y]=[x,\mathbb{A}'y]$，因此：$\mathbb{A}$ 与 $\mathbb{A}'$ 之间可由下列式子将它们联系起来：

$$[\mathbb{A}-,-]=[-,\mathbb{A}'-]$$

进一步，映射

$$\psi:L(V,V)\to L(V^*,V^*),\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$$

实际上建立了 $L(V,V)$ 到 $L(V^*,V^*)$ 的一个反代数同构.

现假定 $\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ 为 V 的一组基，$\{\xi_1^*,\cdots,\xi_n^*\}$ 为其对偶基.由前面已知，$\mathbb{A}$ 在 $\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ 下有表示阵 $A=(a_{ij})$.现在来考察 $\mathbb{A}'$ 在其基 $\{\xi_1^*,\cdots,\xi_n^*\}$ 下的表示阵 $[\mathbb{A}']$.注意到

有等式：

$$\mathscr{A}'(\xi_1^*,\cdots,\xi_n^*)=(\xi_1^*,\cdots,\xi_n^*)[\mathscr{A}']$$

因此$[\mathscr{A}']$的(i,j)位置元素为$[\xi_i,\mathscr{A}'\xi_j^*]$.

但

$$\begin{aligned}[\xi_i,\mathscr{A}'\xi_j^*]&=[\mathscr{A}\xi_i,\xi_j^*]\\&=[a_{1i}\xi_1+\cdots+a_{ni}\xi_n,\xi_j^*]\\&=a_{ji}\end{aligned}$$

因此$[\mathscr{A}']=A^{\mathrm{T}}$($A$ 的转置).

下面进一步给出几类重要的线性变换的表示矩阵.

(Ⅰ)射影的表示阵

设 $V=M\oplus N$, p_M 为 V 到 M 的投射，$P_M:V\xrightarrow{p_M}M\longrightarrow V$ 称为沿 N 到 M 上的**射影**. 对于一个给定的 $E\in L(V,V)$，容易验证：E 为某子空间上的射影 $\Leftrightarrow E^2=E\Leftrightarrow(1-E)^2=(1-E)$. 进一步，若 E 是沿 N 到 M 上的射影，则 $M=\{x\in V\mid Ex=x\}$, $N=\{x\in V\mid Ex=0\}=\ker E$，而 $1-E$ 为沿 M 到 N 上的射影. 因此，任何一个射影的表示阵即为幂等阵；反之任何一个幂等阵也可看成一个射影.

(Ⅱ)内积空间中共轭伴随的表示阵

所谓内积空间是指赋予了一个内积$\langle\cdot\rangle$的向量空间. 对一个有限维向量空间 V 而言，设 M 为 V 的子空间，通常满足 $M\oplus N=V$ 的子空间 N 未必唯一. 但 V 为有限维内积空间时，满足 $M\oplus N=V$ 且 $N\perp M$ 的 N 却只有 1 个，它就是 M 的正交补 $M^{\perp}$. 现设$(V,\langle\cdot\rangle)$为 n 维内积空间，$\mathscr{A}\in L(V,V)$. 通过令

$$\langle\mathscr{A}x,y\rangle=\langle x,\mathscr{A}^*y\rangle\text{，对每个 }x\in V\text{ 成立}$$

来定义一个 V 到 V 的线性变换 $\mathscr{A}^*$，注意：这里用到了 Riese 表示定理，从而使定义合理. 该$\mathscr{A}^*$通常称为$\mathscr{A}$ 的共轭伴随. 若$\mathscr{A}$ 在标准正交基$\{e_1,\cdots,e_n\}$下的表示阵为 A，那么$\mathscr{A}^*$ 在$\{e_1,\cdots,e_n\}$下的表示阵$[\mathscr{A}^*]$会是怎样呢?

事实上，$\mathscr{A}^*(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)[\mathscr{A}^*]\Rightarrow[\mathscr{A}^*]$的$(i,j)$位置元素为$\langle\mathscr{A}^*e_j,e_i\rangle$.

但

$$\begin{aligned}\langle\mathscr{A}^*e_j,e_i\rangle&=\overline{\langle e_i,\mathscr{A}^*e_j\rangle}\\&=\overline{\langle\mathscr{A}e_i,e_j\rangle}\\&=\overline{\langle a_{1i}e_1+\cdots+a_{ni}e_n,e_j\rangle}\\&=\overline{a_{ji}}\end{aligned}$$

因此$[\mathscr{A}^*]=A^*$(转置共轭).

对内积空间 V 上的一个线性变换E，若$\exists M\leqslant V$, s.t. $V=M\oplus M^{\perp}$，且 $E=P_M$，此时我们就称 E 为M 上的一个垂直射影. 直接验证可知，下列命题成立.

命题 1.3.1 设 E 为有限维内积之间 V 上的线性变换，则以下等价：

(1)E 为垂直射影.

(2)$E=E^2=E^*$；(2)$'E$ 在 V 的任何一组标正基下的表示阵均为自共轭幂等阵.

(3) $E=E^2$，对 $\forall x\in V$，且 $\|Ex\|\leqslant\|x\|$.

证明： (1)⇒(2)　$E=P_M$，其中 M 满足 $V=M\oplus M^{\perp}$，$V\xrightarrow{P_M}M\to V$. E 的幂等性是显然的. 下证 $E=E^*$. 取 M 的一组标正基拼上 $M^{\perp}$ 的一组标正基得 V 的一组标正基 $\mathbb{B}$. 则 E 在 $\mathbb{B}$ 下的表示阵为 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$，进而 E^* 在 $\mathbb{B}$ 下的表示阵为 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$，从而 $E=E^*$.

(2)⇒(1)　首先由 $E=E^2$ 知 E 为射影. 于是 $V=\mathrm{Im}E\oplus\ker E$. $\forall x\in\ker E$，$\forall y\in\mathrm{Im}E$，y 可表为 $y=Ez$. 于是

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle&=\langle x,Ez\rangle\\&=\langle x,E^*z\rangle\\&=\langle Ex,z\rangle\\&=\langle 0,z\rangle=0\end{aligned}$$

这表明 $\ker E\perp\mathrm{Im}E$. 因此 E 为垂直射影.

(1)⇒(3)　$\forall x\in V$，有

$$\begin{aligned}\|Ex\|^2&=\langle Ex,Ex\rangle\\&=\langle x,E^*Ex\rangle\\&=\langle x,Ex\rangle\\&\leqslant\|x\|^2\|Ex\|^2\end{aligned}$$

结果 $\|Ex\|\leqslant\|x\|$.

(3)⇒(1)　由 $E=E^2$ 得 $V=\mathrm{Im}E\oplus\ker E$. 下证 $\mathrm{Im}E\perp\ker E$ 即可. 为此，将 V 写为 $V=(\ker E)^{\perp}\oplus\ker E$. 于是 $\forall\alpha\in(\ker E)^{\perp}$，$E\alpha-\alpha\in\ker E$，进而 $E\alpha$ 可写为 $E\alpha=\alpha+y$，其中 $y\in\ker E$ 且 $\alpha\perp y$. 结果

$$\|\alpha\|^2\geqslant\|E\alpha\|^2=\|\alpha\|^2+\|y\|^2$$

导致 $y=0$，$(\ker E)^{\perp}\subseteq\mathrm{Im}E$. 由 $\dim\mathrm{Im}E=\dim(\ker E)^{\perp}$ 立即为：$\mathrm{Im}E=(\ker E)^{\perp}$.

□

关于幂等阵的组合，给出如下两个命题.

命题 1.3.2　设 $\mathbb{F}$ 表示数域. $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$，$A^2=A$，$B^2=B$，则

(1) $A+B$ 仍幂等 $\Leftrightarrow AB=BA=0$. 进一步 $A+B$ 仍幂等时，$\ker(A+B)=\ker A\cap\ker B$，$\mathrm{Im}(A+B)=\mathrm{Im}A\oplus\mathrm{Im}B$.

(2) $A-B$ 仍幂等 $\Leftrightarrow AB=BA=B$. 进一步 $A-B$ 仍幂等时，$\ker(A-B)=\ker A\oplus\mathrm{Im}B$，$\mathrm{Im}(A-B)=\mathrm{Im}A\cap\ker B$.

(3) 若 $C=AB=BA$，则 C 仍幂等且 $\ker C=\ker A+\ker B$，$\mathrm{Im}C=\mathrm{Im}A\cap\mathrm{Im}B$.

证明： (1) $(A+B)^2=A+B\Rightarrow A^2+AB+BA+B^2=A+B\Rightarrow AB=-BA$. 因此有 $AB=AAB=-ABA$ 及 $ABA=-BAA=-BA$ 同时成立. 这表明 $AB=BA$，故此时 $AB=BA=0$. 反之显然. 当 $A+B$ 幂等时，有

$$\ker(A+B)=\{x\in\mathbb{F}^{n\times 1}\mid(A+B)x=0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{F}^{n\times 1} \mid Ax = -Bx\}$$

由 $Ax = -Bx$ 导致$\begin{cases} A^2x = -ABx = 0 \\ B^2x = 0 \end{cases}$即$\begin{cases} Ax = 0 \\ Bx = 0 \end{cases}$.因此 $\ker(A+B) = \ker A \cap \ker B$.易知此时 $\mathrm{Im}(A+B) = \mathrm{Im}A \oplus \mathrm{Im}B$.

(2)考虑 $I-(A-B)$即可.

(3) $\forall\, x \in \ker C, ABx = 0 \Rightarrow Bx \in \ker A$.注意到 $x = Bx + (I-B)x$,因此 $\ker C \subseteq \ker A + \ker B$, $\ker A + \ker B \subseteq \ker C$ 是显然的,因此 $\ker C = \ker A + \ker B$.易知 $\mathrm{Im}C = \mathrm{Im}A \cap \mathrm{Im}B$.

□

命题 1.3.3 设 $A_1,\cdots,A_n$ 均为自共轭幂等 n 阶方阵,则 $A_1+\cdots+A_n$ 仍为幂等阵 $\Leftrightarrow$ $A_iA_j = 0$ 对任意的 $i \neq j$.

证明: $\Rightarrow$ 将 $A_1+\cdots+A_n$ 分别看成垂直射影,且假定 $A = A_1+\cdots+A_n$ 仍是垂直射影. $\forall\, x \in \mathrm{Im}A_i$,有

$$\begin{aligned} \|x\|^2 \geqslant \|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \\ &= \langle \sum_j A_jx, x\rangle = \sum_j \langle A_j^2x, x\rangle \\ &= \sum_j \|A_jx\|^2 \geqslant \|A_ix\|^2 \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

结果 $A_jx = 0(j \neq i$ 时$)$,也就是 $A_jA_i = 0$ 对 $i \neq j$.

$\Leftarrow$ 显然.

□

命题 1.3.4 设 A, B 均为自共轭阵,记号 $A \leqslant B$ 表示 $B-A$ 为半正定阵.若 A,B 均为自共轭幂等阵,则有以下几条等价:

(1)$A \leqslant B$;

(2)$\forall\, x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$有 $\|Ax\| \leqslant \|Bx\|$;

(3)$\mathrm{Im}A \subseteq \mathrm{Im}B$;

(4)$BA = A$;

(5)$AB = A$.

证明: (1)$\Rightarrow$(2) $0 \leqslant \langle (B-A)x, x\rangle = \langle Bx, x\rangle - \langle Ax, x\rangle = \|Bx\|^2 - \|Ax\|^2$.

(2)$\Rightarrow$(3) 任取 $x \in \mathrm{Im}A$, $\|x\| = \|Ax\| \leqslant \|Bx\| \leqslant \|x\|$,从而 $\|Bx\| = \|x\|$,再由 B 为自共轭幂等导致 $x \in \mathrm{Im}B$.

(3)$\Rightarrow$(4) 显然.

(4)$\Leftrightarrow$(5) 两边取转置共轭即可.

(4)$\Rightarrow$(1) $\langle (B-A)x, x\rangle = \langle B(I-A)x, x\rangle$.由 $B(I-A) = (I-A)B$ 知 $B(I-A)$仍是幂等自共轭阵,故$\langle (B-A)x, x\rangle = \langle B(I-A)x, B(I-A)x\rangle \geqslant 0$,即有 $B \geqslant A$.

□

(Ⅲ)保距变换的表示阵

对内积空间$(V,\langle\cdot\rangle)$,有一种特殊的线性变换——**保距变换**,它被定义为:$\forall x,y\in V$均有$\|Ux-Uy\|=\|x-y\|$的线性变换U,这里$\|\cdot\|$为通常的欧几里得范数.由于下列几条等价:

(1)U为保距变换;

(2)$U^*U=1$;

(3)$\langle Ux,Uy\rangle=\langle x,y\rangle,\forall x,y\in V$;

(4)$\|Ux\|=\|x\|,\forall x\in V$;

(5)U将标正基变换为标正基.

因此,当内积空间为欧氏空间时,U在任何一组标正基下的表示阵为正交阵;当内积空间为酉空间时,U在任何标正基下的表示阵为酉矩阵.下面给出正交阵的标准型,关于酉矩阵标准型的相关结果在下一章的定理 2.3.3 中给出.为了给出实正交阵的标准型,先来介绍实向量空间的复化空间的有关知识.

让V为实向量空间,定义集合V^+为

$$V^+=V+\mathrm{i}V=\{\alpha+\mathrm{i}\beta\mid\alpha,\beta\in V,\mathrm{i}\text{ 为未定元},\mathrm{i}^2=-1\}$$

进一步定义复数与V^+中元之间的纯量乘法如下:

$$(a+b\mathrm{i})(\alpha+\mathrm{i}\beta)=(a\alpha-b\beta)+\mathrm{i}(b\alpha+a\beta),\text{对}\forall a+b\mathrm{i}\in\mathbb{C}\text{ 和}\forall\alpha+\mathrm{i}\beta\in V^+$$

容易知道,此V^+构成$\mathbb{C}$上的一个向量空间,该空间便称为${}_{\mathbb{R}}V$的**复化空间**.${}_{\mathbb{R}}V$的复化空间${}_{\mathbb{C}}V^+$有如下性质:

(1)${}_{\mathbb{R}}V^+={}_{\mathbb{R}}V\oplus_{\mathbb{R}}(\mathrm{i}V)$;

(2)若$\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$为${}_{\mathbb{R}}V$中的一个线性无关向量集,则$\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$在${}_{\mathbb{C}}V^+$中也为关于$\mathbb{C}$的线性无关向量集,因此不难发现$\dim_{\mathbb{R}}V=\dim_{\mathbb{C}}V^+$.

现将${}_{\mathbb{R}}V$中的每个线性变换$\mathbb{A}$,按如下方式扩展为${}_{\mathbb{C}}V^+$中的线性变换$\mathbb{A}^+$:

$$\mathbb{A}^+:{}_{\mathbb{C}}V^+\to{}_{\mathbb{C}}V^+$$
$$\alpha+\mathrm{i}\beta\to\mathbb{A}\alpha+\mathrm{i}\,\mathbb{A}\beta$$

则有映照$\Gamma:L({}_{\mathbb{R}}V,{}_{\mathbb{R}}V)\to L({}_{\mathbb{C}}V^+,{}_{\mathbb{C}}V^+)(\mathbb{A}\to\mathbb{A}^+)$保持加法、乘法以及关于实数的纯量乘法.倘若$\mathbb{A}$在${}_{\mathbb{R}}V$的某基$\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$下的表示阵为$A$,则有$\mathbb{A}^+$在$\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$下的表示阵也为$A$.对实向量空间进行复化,一个直接的应用是,我们能轻易地证得如下结论:

定理 1.3.2　n维实向量空间V中的每一个线性变换$\mathbb{A}$,都有一个维数等于 1 或 2 的子空间作为$\mathbb{A}$的不变子空间.

证明: 设$\mathbb{A}^+$的一个特征值为$x+\mathrm{i}y$,相应于此特征值的一个特征向量是$\alpha+\mathrm{i}\beta$,则由

$$\begin{aligned}\mathbb{A}\alpha+\mathrm{i}\,\mathbb{A}\beta&=\mathbb{A}^+(\alpha+\mathrm{i}\beta)=(x+\mathrm{i}y)(\alpha+\mathrm{i}\beta)\\&=(x\alpha-y\beta)+\mathrm{i}(x\beta+y\alpha)\end{aligned}$$

得:

$$\begin{cases}\mathbb{A}\alpha=x\alpha-y\beta\\\mathbb{A}\beta=x\beta+y\alpha\end{cases}$$

因此,$\mathrm{span}\{\alpha,\beta\}$作为${}_{\mathbb{R}}V$的子空间是$\mathbb{A}$的不变子空间.

□

当被复化的实向量空间为欧氏空间$\langle V,\langle\cdot\rangle\rangle$时,$_{\mathbb{C}}V^{+}$ 还可通过引进下列内积,从而使之成为酉空间:$\langle \alpha_1+\mathrm{i}\beta_1,\alpha_2+\mathrm{i}\beta_2\rangle=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle+\langle\beta_1,\beta_2\rangle+\mathrm{i}(\langle\beta_1,\alpha_2\rangle-\langle\alpha_1,\beta_2\rangle)$,其中 α_1,$\beta_1,\alpha_2,\beta_2\in V$.此时,$\|\alpha+\mathrm{i}\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$ 对任何 $\alpha,\beta\in V$ 皆成立.

有了以上知识,现着手研究正交矩阵的标准型问题.设 U 为 n 阶实正交阵.我们考察 n 维实内积空间 V 相应于 U 的正交变换$\mathbb{U}$.将 V 复化为酉空间$_{\mathbb{C}}V^{+}=V+\mathrm{i}V$,同时也将$\mathbb{U}$复化为$\mathbb{U}^{+}$,则有$\mathbb{U}^{+}$仍为酉变换.稍作推导即知,$\mathbb{U}^{+}$还有以下性质:

(1)$\mathbb{U}^{+}$的非实特征值必共轭成对出现.若用$(V^{+})_{\lambda}$表示$\mathbb{U}^{+}$关于 λ 的特征子空间,则映照 $\psi:(V^{+})_{\lambda}\to(V^{+})_{\bar\lambda},v\to\bar v$ 为一一对应.

(2)$\mathbb{U}^{+}$的酉性保证了$\mathbb{U}^{+}$的任两个互异特征子空间相互垂直.进一步,当特征值 λ 不为实数时,若 $\alpha+\mathrm{i}\beta\in(V^{+})_{\lambda}$,则由$\overline{\alpha+\mathrm{i}\beta}=\alpha-\mathrm{i}\beta\in(V^{+})_{\bar\lambda}$及$\langle\alpha+\mathrm{i}\beta,\overline{\alpha+\mathrm{i}\beta}\rangle=0$得:

$$\begin{cases}\alpha\perp\beta\\ \|\alpha\|=\|\beta\|=\dfrac{1}{\sqrt2}\|\alpha+\mathrm{i}\beta\|\end{cases}$$

因此,若$\{\eta_1=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1,\cdots,\eta_k=\alpha_k+\mathrm{i}\beta_k\}$为$(V^{+})_{\lambda}$的标正基,则$\{\bar\eta_1,\cdots,\bar\eta_k\}$为$(V^{+})_{\bar\lambda}$的标正基,进而$\{\sqrt2\alpha_1,\cdots,\sqrt2\alpha_k\}\cup\{\sqrt2\beta_1,\cdots,\sqrt2\beta_k\}$为 V 中一个标准正交系.

(3)$\mathbb{U}^{+}$的特征值均坐落在单位圆周上.若用 V_1 表示$\mathbb{U}$关于 1 的 V 的特征子空间及 Y_1 为 V_1 的一组标正基;V_{-1}表示$\mathbb{U}$关于 -1 的 V 的特征子空间及 Y_{-1}为 V_{-1}的一组标正基,则由于

$$\begin{cases}(V^{+})_1=V_1+\mathrm{i}V_1\\(V^{+})_{-1}=V_{-1}+\mathrm{i}V_{-1}\end{cases}$$

得:Y_1,Y_{-1}分别也是$(V^{+})_1$及$(V^{+})_{-1}$的标正基.

综上所述有:

$$V^{+}=(V^{+})_1\oplus(V^{+})_{-1}\oplus\overbrace{(V^{+})_{\lambda_1}\oplus(V^{+})_{\bar\lambda_1}}\oplus\cdots\oplus\overbrace{(V^{+})_{\lambda_l}\oplus(V^{+})_{\bar\lambda_l}}$$

取 V_1 的$\downarrow$标正基 …… 取标$\downarrow$正基 ……

$$Y_1\qquad\cdots\cdots\qquad\begin{cases}\eta_{\lambda_1 1}=\alpha_{\lambda_1 1}+\mathrm{i}\beta_{\lambda_1 1}\\ \eta_{\lambda_1 k_{\lambda_1}}=\alpha_{\lambda_1 k_{\lambda_1}}+\mathrm{i}\beta_{\lambda_1 k_{\lambda_1}}\end{cases}\qquad\cdots\cdots$$

则有:

$$Y_1\cup Y_{-1}\cup\{\sqrt2\alpha_{\lambda_1 1},\cdots,\sqrt2\alpha_{\lambda_1 k_{\lambda_1}}\}\cup\{\sqrt2\beta_{\lambda_1 1},\cdots,\sqrt2\beta_{\lambda_1 k_{\lambda_1}}\}\cup\cdots$$
$$\cup\{\sqrt2\alpha_{\lambda_l 1},\cdots,\sqrt2\alpha_{\lambda_l k_{\lambda_l}}\}\cup\{\sqrt2\beta_{\lambda_l 1},\cdots,\sqrt2\beta_{\lambda_l k_{\lambda_l}}\}$$

构成 V 的一组标正基,$\mathbb{U}$ 在基:

$$Y_1\cup Y_{-1}\cup\{\sqrt2\alpha_{\lambda_1 1},\sqrt2\beta_{\lambda_1 1};\ \cdots\ ;\sqrt2\alpha_{\lambda_1 k_{\lambda_1}},\sqrt2\beta_{\lambda_1 k_{\lambda_1}}\}\cup\cdots\cup\{\sqrt2\alpha_{\lambda_l 1},\sqrt2\beta_{\lambda_l 1};\ \cdots\ ;\sqrt2\alpha_{\lambda_l k_{\lambda_l}},\sqrt2\beta_{\lambda_l k_{\lambda_l}}\}$$

下的表示阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & \cos\theta & \sin\theta & & \\ & & & & & & -\sin\theta & \cos\theta & & \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

这就是正交矩阵在正交相似下的标准型.

(Ⅳ)秩为 1 的自伴变换的表示阵

对有限维内积空间$\langle V,\langle\cdot\rangle\rangle$上的一个线性变换$\mathscr{A}$,记其在 V 的一组标正基下的表示阵为A.若满足$\mathscr{A}^*=\mathscr{A}$,则$\mathscr{A}$ 称为一个**自伴变换**.此时 A 为熟知的自共轭阵.一般地,我们知道有下列对应:

(1)严格正变换(即$\mathscr{A}$ 自伴且$\langle \mathscr{A}x,x\rangle>0,\ \forall\, 0\neq x\in V$)$\longleftrightarrow A$ 为半正定阵;

(2)正变换(即$\mathscr{A}$ 自伴且$\langle \mathscr{A}x,x\rangle\geqslant 0,\ \forall\, 0\neq x\in V$)$\longleftrightarrow A$ 为半正定阵;

(3)规范变换(即$\mathscr{A}^*\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{A}^*$)$\longleftrightarrow A$ 为规范阵(即可酉相似对角化的矩阵).

定理 1.3.3　设$\mathscr{A}$ 为秩是 1 的 n 维内积空间$(V,\langle\cdot\rangle)$上的自伴变换,则$\mathscr{A}$ 在 V 的每个标正基下的表示阵 A 均可写成

$$k\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}(\bar{\beta}_1\quad\cdots\quad\bar{\beta}_n)\ (0\neq k\in\mathbb{R},\beta_1,\cdots,\beta_n\ \text{不全为 }0)$$

之形式.反之,给定 n 维内积空间$(V,\langle\cdot\rangle)$上的一个线性变换$\mathscr{A}$,若$\mathscr{A}$ 在 V 的某标正基下的表示阵具有上述之形式,则$\mathscr{A}$ 必为秩是 1 的自伴变换.

证明: 只需证前半部分.由于 A 为秩是 1 的自共轭阵,故 A 可酉相似于对角阵:

$$A=U\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^*$$

其中 k 为实数.令 U 的第一列为$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$,则

$$A=kU\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^*=k\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}(\bar{\beta}_1\quad\cdots\quad\bar{\beta}_n)$$

□

该定理 1.3.3 有一个直接的推论:

推论 1.3.1　(Hadamard 定理)两个半正定阵的 Hadamard 积仍为半正定阵.

证明: 设 A,B 均为半正定阵,秩 $A=r$,秩 $B=s$,则 A 可分解为r 个秩为 1 的半正定

阵之和,B 可分解为 s 个秩为 1 的半正定阵之和.

因此,只须对两个秩为 1 的半正定阵证明其 Hadamard 积仍为半正定阵即可.故不妨设秩 $A=1$,秩 $B=1$.

由定理 1.3.3 知:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}(\bar{\beta}_1 \quad \cdots \quad \bar{\beta}_n)$$

$$B=(b_{ij})=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}(\bar{\gamma}_1 \quad \cdots \quad \bar{\gamma}_n)$$

$$a_{ij}\cdot b_{ij}=\beta_i\bar{\beta}_j\cdot\gamma_i\bar{\gamma}_j=\beta_i\gamma_i\,\overline{\beta_j\gamma_j}$$

结果,$A\cdot B=(a_{ij}\cdot b_{ij})=\begin{pmatrix}\beta_1\gamma_1\\ \vdots\\ \beta_n\gamma_n\end{pmatrix}(\overline{\beta_1\gamma_1} \quad \cdots \quad \overline{\beta_n\gamma_n})$为半正定阵.

□

习题一

1. 任给单位向量 $\omega\in\mathbb{C}^{n\times1}$, $\|\omega\|=1$,矩阵 $H(\omega)=I_n-2\omega\omega^*$ 称为一个初等 Householder 阵或 Householder 变换阵.证明初等 Householder 阵具有下列性质:

(1)$H(\omega)$为自共轭酉阵,行列式为 -1;

(2)$\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{C}^{n\times1}(n>1)$,存在 n 阶 Householder 阵 $H(\omega)$使 $H(\omega)\alpha=\beta$ 的充要条件是等式组$\begin{cases}\alpha^*\alpha=\beta^*\beta\\ \alpha^*\beta=\beta^*\alpha\end{cases}$成立.

2. 设 $\alpha\in\mathbb{C}^n$.证明:存在 Householder 阵 $H(\omega)$使得 $H(\omega)\alpha=a\cdot e_1$,其中 $a\in\mathbb{C}$, $e_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm T}\in\mathbb{C}^{n\times1}$.

3. 设 A,B,C 是 n 阶复方阵,满足 $CAA^*=BAA^*$,证明 $CA=BA$.

4. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,证明 Hadamard 不等式:$|\det A^2|\leqslant\prod\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$.

5. 设 U 为酉阵,$A=\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}$.证明:$UA$ 的特征值μ 满足 $m\leqslant|\mu|\leqslant M$,其中 $m=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|$, $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|$.

6. 证明: 复数域上每个正规矩阵 $A=(a_{ij})$至少有一个特征值 λ_t 满足 $|\lambda_t|\geqslant\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$.

7. 证明: 每个交错的 k-线性型必为斜对称的;反之,当线性空间 V 的系数域F 的特

征不为 2 时，每个斜对称的 k - 线性型也必为交错 k - 线性型.

8. 设 B 是正定矩阵，A 为与 B 同阶的矩阵. 若有 $\alpha \neq 0$ 满足 $A\alpha = \lambda B\alpha$，则称 λ 是 A 关于 B 的相应特征值，α 是使 A 关于 B 的相应于 λ 的相对特征向量. 试证明：当 A 是 Hermite 矩阵时，A 关于 B 的相应特征值为实数且相应的相对特征向量可组成完全集.

9. 设 B 是实正定矩阵，S 是实反对称矩阵. 证明 $\det(B+S) \geqslant \det B$.

10. 设 G 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶非奇异矩阵全体，H 是由 n 阶对称矩阵组成的 G 的乘法子群. 证明存在 H 中所有矩阵共有的非零特征向量.

11. 设 B 是实正交正定矩阵，则 $B = I$.

12. 设 n 个不全为 0 的实常数为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 求 n^2 个未知数 $x_{jk}(j,k = 1,2,\cdots,n)$ 的如下线性方程组的解空间：$x_{jk}a_ia_l - x_{il}a_ja_k = 0(i,j,l,k = 1,2,\cdots,n)$.

13. 证明：酉空间中两个可换的酉算子有公共特征向量组成的标正基.

第2章　矩阵分解

给定 $m \times n$ 阶矩阵 A，A 可化为 $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$，其中 $r = \text{rank}A$，P,Q 皆可逆．显然 A 还可以写成 $A = P\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}(I_r \quad 0)Q$．让 P 的前 r 列记为 G，Q 的前 r 行记为 H，于是 $A = GH$，GH 便是我们熟知的满秩分解，它是众多矩阵分解中的一种．综观矩阵代数，矩阵分解是解剖矩阵结构的重要手段之一，其本质是，通过建立相应的矩阵分解，从而使某些问题得以简化和分解，进而更加清晰地获取矩阵的相关特性．本章主要讲述几种常见而又重要的矩阵分解，他们中有些在矩阵计算中发挥重要的作用，有些则在理论证明中扮演着关键的角色．

2.1　Jordan 分解与 Frobenius 分解

矩阵的 Jordan 分解定理在某种意义上可看成是矩阵分解理论的制高点，其定理内容如下：

定理 2.1.1　设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则存在可逆矩阵 $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$A = TJT^{-1}$$

其中 $J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$，$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$，$n_1 + \cdots + n_k = n$，

$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 可以相同，也可以不同．进一步，J 除了若当块顺序外是唯一的．

一般地，称 $A = TJT^{-1}$ 为 A 的 **Jordan 分解**，J 是 A 的 **Jordan 标准型**．该定理的证明可以有多种途径：

途径一：使用 λ－阵理论．

设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则在 $\mathbb{C}$ 上有：

$A \sim B \Leftrightarrow \lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 在 $\mathbb{C}$ 上等价；

$\Leftrightarrow A$ 与 B 有相同的不变因子组；

$\Leftrightarrow \lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 有相同的行列式因子组；

$\Leftrightarrow$ 在 $\mathbb{C}$ 上 A 与 B 有相同的初等因子组．