偏微分方程理论与实践

吴小庆 著

科学出版社
www.sciencep.com

偏微分方程理论与实践

吴小庆　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要内容分为三篇：算子级数法，Lewy 定理与 Lewy 反例研究，偏微分方程理论的应用实践.

书中首先提出了求解偏微分方程定解问题的新途径——算子级数法，然后将算子级数法拓广到某些微分—积分方程、无穷阶微分方程、无穷维微分方程的定解问题的求解，并将其应用于求解复变系数的偏微分方程. Lewy 定理与 Lewy 反例的研究内容是本书的重要组成部分，书中论证了 Lewy 方程的可解性，用算子级数法、可逆变换法、广义函数法证明了 Lewy 方程当自由项为可微函数(不解析)时局部解和整体解都是存在的，并给出了多种形式的精确解表达式，证明了 Lewy 反例不成立. 书中证明 Lewy 方程的可解性等价于齐次或非齐次复 Cauchy-Riemann 方程的边值问题的可解性，由此发现 Lewy 定理的证明有错误，其结论不成立. 本书最后介绍了作者应用偏微分方程理论解决实际问题的实践.

本书的主要读者对象是应用数学专业本科生、研究生和从事偏微分方程基础理论及应用研究的科研工作者.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程理论与实践/吴小庆著. —北京：科学出版社，2009
ISBN 978-7-03-026323-0

Ⅰ. 偏…　Ⅱ. 吴…　Ⅲ. 偏微分方程-研究　Ⅳ. O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 240497 号

责任编辑：赵　靖　张中兴 / 责任校对：赵桂芬
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 12 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2009 年 12 月第一次印刷　印张：12
印数：1—2 000　字数：240 000

定价：35.00 元

前　言

偏微分方程涉及自然科学和工程技术的各个领域. 本书介绍了作者从事偏微分方程的理论与应用研究的科研成果和心得体会，共分为三篇：算子级数法，Lewy 定理与 Lewy 反例研究，偏微分方程理论的应用实践.

1. 算子级数法

半个多世纪以来，偏微分方程的理论有了重大的发展，这使人们对一些传统的经典方法和理论有了新的认识. 作者通过长期的教学实践，在借鉴经典方法和理论的基础上，提出了求解偏微分方程定解问题的新途径——算子级数法. 关于 Cauchy 问题解析解的研究具有悠久的历史. 偏微分方程解析解的存在性定理最初出现在 1821 年 Cauchy 的讲义中；其后 1842 年 Cauchy 在一系列论文中对该问题做了进一步的研究；1875 年 Ковалевская 用稍加改进的形式独立地做出了同样的结果. Cauchy-Ковалевская 定理证明了 Ковалевская 型方程初值问题解析解的存在唯一性. 作者考虑某类偏微分方程（其中包括了通常的热传导方程、波动方程、拉普拉斯方程、无限梁横振动方程等）的 Cauchy 问题. 根据柯西问题的特点，认为问题中自变量 t 与空间变量 x 的地位是不对等的，因为关于变量 t 有初始条件，把变量 t 称为主变量，而将解析解表示为变量 t 的幂级数形式，从而可以利用方程和初始条件获得简洁的解析解表达式——算子级数公式. 为了研究算子级数公式的收敛可微性，引入了强解析、拟解析等概念，由此获得了强解析解在有界区域和无穷区域存在唯一的充要条件，为 Cauchy 问题的局部解析解与整体解析解提供了简洁的求解方法. 传统方法中对热传导方程、波动方程的柯西问题采用泊松公式计算，往往需要计算多重无穷限积分或曲面积分等，即使初值函数是十分简单的解析函数，计算过程也相当复杂. 应用强解析解公式却能很容易地得到热传导方程、波动方程等更广泛的一类方程的解析解，使那些采用传统方法计算时所出现的难题迎刃而解. 强解析解公式也提供了求泊松方程特解的新方法. 应用强解析解公式，简捷地导出了求柯西问题的基本解、一般解的新途径，导出了求解半无界问题、混合问题的新途径——算子级数法. 算子级数法使定解问题的求解过程简化，使初学者较容易掌握各类定解问题的求解方法和技巧. 本书还将算子级数法拓广到某些微分—积分方程、无穷阶微分方程、无穷维微分方程的定解问题的求解. 并将算子级数法应用于求解复变系数的偏微分方程，获得了 Lewy 方程与广义 Lewy 方程的局部解与整体解的精确表达式.

2. Lewy 定理与 Lewy 反例研究

作者对 Lewy 定理与 Lewy 反例进行了大量的研究，研究结果表明 Lewy 定理的结论是错误的，Lewy 反例是不成立的. 该研究内容是本书的重要组成部分. 1957 年 Hans Lewy 试图用反例来说明具有 C^∞ 系数的偏微分方程也并非总是有解的甚至无广义解. Hans Lewy 给出的例子是一个著名的反例. 这个例子使得 Cauchy-Ковалевская 定理的具有解析系数的偏微分方程有解的结论一般不能推广到具有

C^∞ 系数的偏微分方程. 而且 Harold Jacobowitz 找到了大量的相同性质的例子. 证明的方法用到了 Baire Category 的观点，认为在某一精确意义下，几乎所有这种形式的方程都是不可解的. 作者用算子级数法解出了 Lewy 方程和更复杂的广义 Lewy 方程，获得了其精确解的表达式，Lewy 方程和广义 Lewy 方程的局部解与整体解都是存在的. 大量的求解实践证明了 Lewy 反例不成立. 求解的实践是检验求解理论的试金石. 解是客观存在的，存在决定意识，而不是意识决定存在. 由算子级数法的精确解表达式获得了相应的可逆变换，在此变换下 Lewy 方程简化为可求通解的新方程，而求其通解只需关于实变量进行一次积分即得. 故 Lewy 方程只要求自由项关于实变量 t 连续即可得通解. Lewy 定理的结论把非解析函数推断为解析函数，把有解方程误判为连广义解都不存在的方程，与事实相背离，肯定是错误的. 分析研究 Lewy 定理的证明思想，发现其证明有错误，结论不成立. 作者在现有数学公理体系下否定了 Lewy 定理与 Lewy 反例. 中国科技论文在线将作者的部分研究成果评为优秀精品论文即时发表，为阐述新的学术观点、交流创新思想提供了平台.

3. *偏微分方程理论的应用实践*

在研究自然科学和工程技术中的一些课题时常常会涉及到偏微分方程. 在工程技术中，诸如试井分析、石油勘探、能源节制、大型建筑等方面，都为偏微分方程理论提出了崭新的研究课题. 作者主要从事的研究方向为偏微分方程的理论与应用研究，本书介绍作者关于偏微分方程反问题和算子半群理论在工程技术中的应用实践与偏微分方程在自然科学和工程技术中的一些应用实例.

本书是作者从事偏微分方程理论及应用研究的教学科研成果.

作者 1982 年 1 月毕业于西南石油学院数学师资班 77 级，在大学学习期间所写的第一篇论文《一类偏微分方程柯西问题的特殊解法》是对算子级数法的初始研究，该论文 1981 年发表在《西南石油学院学报》上. 作者的老师江茂泽教授支持了作者对算子级数法的研究，并与作者合作发表多篇学术论文. 作者在中山大学助教进修班学习期间(1984～1986)也得到导师陈宝耀教授的支持和鼓励，并推荐作者论文发表. 1987 年在“全国部分高校偏微分方程研讨会”上就算子级数法研究成果进行了学术交流. 主持人姜礼尚教授充分肯定了该成果，并推荐作者参加了由北京大学、复旦大学和中国科学院数学研究所联合举办的偏微分方程研究生班(1987～1988)的学习. 李大潜、洪家兴、姜礼尚等著名数学家的授课使作者受益匪浅，姜礼尚教授还指引作者结合石油专业做偏微分方程的理论与应用研究. 作者取得的每一点成绩都与老师们的培养、指导分不开.

关于 Lewy 定理与 Lewy 反例研究工作，2006 年作者与美国德州大学廖国钧教授进行了学术交流，得到了他的支持和鼓励，也得到电子科技大学应用数学学院钟守铭教授、西华大学数学研究所所长李顺初教授、内江师范学院数学与信息科学学院王凡彬教授、西南石油大学理学院郭大立教授、刘志斌教授的支持.

在本书的写作过程中，得到了西南石油大学校长杜志敏教授、研究生院院长刘清友教授、化学化工学院副院长叶仲斌教授、理学院院长谢祥俊教授、理学院副院长陈普春教授的大力支持. 本书出版得到西南石油大学资助. 在此一并表示衷心的感谢.

吴小庆
西南石油大学
2009 年 7 月

目　　录

第一篇　算子级数法

本篇考虑某些偏微分方程(其中包括通常的热传导方程、波动方程、拉普拉斯方程、无限梁横振动方程等)的 Cauchy 问题. 根据 Cauchy 问题的特点，认为问题中自变量 t 与空间变量 x 的地位是不对等的，因为关于变量 t 有初始条件，把变量 t 称为主变量，将解析解表示为变量 t 的幂级数形式，从而可以利用方程和初始条件获得简洁的解析解表达式——算子级数公式. 为了研究算子级数公式的收敛可微性，引入了强解析、拟解析等概念，由此获得了强解析解在有界区域和无穷区域存在唯一的充要条件. 为 Cauchy 问题的局部解析解与整体解析解提供了简洁的求解方法. 传统方法对热传导方程、波动方程的 Cauchy 问题采用泊松公式计算，往往需要计算多重无穷限积分或曲面积分，即使初值函数是十分简单的解析函数，计算过程也相当复杂. 应用强解析解公式却能很容易地得到热传导方程、波动方程等更广泛的解析解，那些采用传统方法计算时所出现的难题就迎刃而解了. 强解析解公式也提供了求泊松方程特解的新方法. 应用强解析解公式，简捷地导出了求 Cauchy 问题的基本解及一般解、求解半无界问题及混合问题的新途径——算子级数法. 本篇包括三章. 第 1 章讲述了用算子级数法求 Cauchy 问题的解析解与基本解. 用算子级数法讨论复变系数的偏微分方程，获得复变量广义 Lewy 方程与复变量 Lewy 方程的整体古典解. 用算子级数法获得了 Mizohota 方程的整体古典解，获得了复 Cauchy-Riemann 方程的边值问题的连续可微解. 第 2 章讲述求解定解问题的算子级数法，并把算子级数法拓广到某些微分-积分方程、无穷阶微分方程、无穷维微分方程定解问题的求解. 第 3 章讲述算子级数公式在微积分学中的应用，应用算子级数公式推导出含参变量无穷限积分的计算公式，推导出球面积分的计算公式.

第 1 章 Cauchy 问题的解析解与基本解

关于 Cauchy(柯西)问题解析解的研究具有悠久的历史. 偏微分方程解析解的存在性定理最初出现在 1821 年 Cauchy 的讲义中;其后 1842 年 Cauchy 在一系列论文中对这个问题做了进一步的研究;1875 年 Ковалевская 用稍加改进的形式独立地做出了同样的结果. Cauchy-Ковалевская 定理证明了 Ковалевская 型方程初值问题解析解的存在唯一性.

我们考虑某类偏微分方程(其中包括了通常的 m 维热传导方程、m 维波动方程、$m+1$ 维拉普拉斯方程、无限梁横振动方程等)的 Cauchy 问题. Cauchy 问题中自变量 t 与空间变量 x 的地位是不对等的,因为关于变量 t 有初始条件,把变量 t 视为主变量,而将解析解表示为单个变量 t 的幂级数形式(而不是 Cauchy-Ковалевская 定理证明中将解析解表示为所有变元的幂级数形式),从而可以利用方程和初始条件获得简洁的解析解表达式,称之为算子级数公式. 为了研究该表达式的收敛可微性,我们引入了强解析、拟解析等概念,由此获得了强解析解在有界区域和无穷区域存在唯一的充要条件,为 Cauchy 问题的局部解析解与整体解析解提供了简捷的求解方法. 并将算子级数法应用于求解复变系数的偏微分方程,获得了 Lewy 方程与广义 Lewy 方程的局部解与整体解的精确表达式.

1.1 D^L-□型方程 Cauchy 问题的解析解与基本解

符号说明

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$为重指标.

重指标集 $\mathbf{N}^m=\{\alpha\,|\,\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m),\alpha_j\in\mathbf{N},j=1,\cdots,m\}$,$\mathbf{N}$ 为非负整数集.

$$\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_m^{\alpha_m}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}},\partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j};\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_m!,\ |\alpha|=\sum_{j=1}^m\alpha_j.$$

记区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^m$,$H(\Omega)=\{\varphi\,|\,\varphi$ 在 Ω 实解析$\}$,

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2},x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbf{R}^m,$$

$$o(\xi,\delta)=\{x\mid x\in\mathbf{R}^m,\|x-\xi\|<\delta\},\xi\in\mathbf{R}^m.$$

$C^\infty(\mathbf{E}^m)$表示 $\mathbf{E}^m$ 上的无限次可微的复函数的全体,$\mathbf{E}^m$ 表示 m 维复向量的欧几里得空间.

$C^P(\mathbf{E}^m)$表示$\mathbf{E}^m$上的P次可微的复函数的全体;$C(\mathbf{E}^m)$表示$\mathbf{E}^m$上的连续的复函数的全体.

K 表示$\mathbf{E}^m$上的无限次可微且支集有界的复函数全体,K′表示 K 上的线性连续泛函的全体.

$L(\Omega)$表示Ω上的绝对可积的函数的全体.

1.1.1　D^L-□型方程 Cauchy 问题的解析解

定义 1.1.1　设$\Omega\subset\mathbf{R}^m$是一个开区域,函数$\varphi(x)$是定义在$\Omega$上的实值函数.若对于$\xi\in\Omega$,存在包含点$\xi$的邻域$o(\xi,\delta)\subset\Omega$,使得$\varphi(x)$可表示为在邻域$o(\xi,\delta)$内的收敛幂级数$\varphi(x)=\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^m}A_\alpha(x-\xi)^\alpha$,其中$A_\alpha$是与$x$无关的实数,则称$\varphi(x)$在点$\xi$处实解析.若$\varphi(x)$在$\Omega$内每一点都是实解析的,则称$\varphi(x)$在$\Omega$内实解析,记为$\varphi\in H(\Omega)$.

易知,若函数$\varphi(x)$在点ξ处实解析,则有$\varphi(x)=\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^m}A_\alpha(x-\xi)^\alpha,x\in o(\xi,\delta)$且$A_\alpha=\dfrac{\partial^\alpha\varphi(\xi)}{\alpha!}$.

定义 1.1.2　若函数$\varphi\in C^\infty(\Omega)$,$\Re\subset\Omega\subset\mathbf{R}^m$,且$|\partial^\alpha\varphi(x)|\leqslant\frac{\alpha!}{\delta^{|\alpha|}}M$,$\forall$重指标$\alpha\in\mathbf{N}^m$,$\forall x\in\Re$,则称函数$\varphi$在$\Re$上关于$\delta$拟解析[19],记为$\varphi\in W(\Re,\delta)$. M是与α无关的正常数.

显然,若$\varphi\in W(\Re,\delta)$,$\forall\delta'$,$0<\delta'<\delta$,$\varphi\in W(\Re,\delta')$.

引理 1.1.1　若函数$\varphi(x)$在$x=\xi$处实解析,则存在δ,使得$\varphi\in H(o(\xi,\delta))$,同时

$$|\partial^\alpha\varphi(\xi)|\leqslant\frac{\alpha!}{\delta^{|\alpha|}}M,\qquad\forall\alpha\in\mathbf{N}^m.$$

证明　若$\varphi(x)$在$x=\xi$处实解析,则存在正常数δ_1,使得$\varphi(x)=\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^m}\dfrac{\partial^\alpha\varphi(\xi)}{\alpha!}\cdot(x-\xi)^\alpha$,$x\in o(\xi,\delta_1)$,有$\varphi\in H(o(\xi,\delta_1))$.

记$\delta\triangleq\dfrac{\delta_1}{\sqrt{m}}$,令$\eta=(\delta,\cdots,\delta)\in\mathbf{R}^m$,则$x=\eta+\xi\in o(\xi,\delta_1)$,且级数$\varphi(x)=\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^m}\dfrac{\partial^\alpha\varphi(\xi)}{\alpha!}\eta^\alpha=\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^m}\dfrac{\partial^\alpha\varphi(\xi)}{\alpha!}\delta^{|\alpha|}$绝对收敛.存在正常数$M$,使得$\forall\alpha\in\mathbf{N}^m$,$\left|\dfrac{\partial^\alpha\varphi(\xi)}{\alpha!}\delta^{|\alpha|}\right|\leqslant M$,则

$$|\partial^\alpha\varphi(\xi)|\leqslant\frac{\alpha!}{\delta^{|\alpha|}}M.$$

$\delta=\dfrac{\delta_1}{\sqrt{m}}\leqslant\delta_1$，有 $\varphi\in H(o(\xi,\delta))$.

引理 1.1.2　函数 φ 在 Ω 上实解析的充要条件是：对任意紧集 $\Re\subset\Omega$，存在 δ 使得 $\varphi\in W(\Re,\delta)$.

证明　必要性. 若 φ 在 Ω 上实解析，则对任意紧集 $\Re\subset\Omega$，$\forall\, x\in\Re$，存在 δ_x，使得 $\varphi\in H(o(x,\delta_x))$，$\Re\subset\bigcup\limits_{x\in\Omega}o(x,\delta_x)$，且 $|\partial^\alpha\varphi(x)|\leqslant\dfrac{\alpha!}{\delta_x^{|\alpha|}}M$，$\forall\,\alpha\in\mathbf{N}^m$. 由有限覆盖定理可知存在有限个中心为 $x_i\in\Re$，半径为 δ_{x_i} 的邻域 $o(x_i,\delta_{x_i})(i=1,\cdots,N)$ 覆盖 $\Re\subset\left(\bigcup\limits_{i=1}^{N}o(x_i,\delta_{x_i})\right)\subset\Omega$，且存在 $\delta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\delta_{x_i}$，使得 $|\partial^\alpha\varphi(x)|\leqslant\dfrac{\alpha!}{\delta^{|\alpha|}}M$，$\forall\, x\in\Re$，$\forall\,\alpha\in\mathbf{N}^m$，即有 $\varphi\in W(\Re,\delta)$.

充分性. 对于任意 $x\in\Omega$，存在紧集 $\Re\subset\Omega$，使得 $x\in\Re$，同时存在 δ 使得 $\varphi\in W(\Re,\delta)$，即 φ 在 x 实解析. 从而 φ 在 Ω 实解析.

若定义在 $I\subset\mathbf{R}$ 上的一元实值函数 $f(t)$ 在点 t_0 实解析，则存在 $\delta>0$，使得 $f(t)$ 可表示为在 $|t-t_0|<\delta$ 的收敛幂级数 $f(t)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}f_k(t-t_0)^k$.

若 $f(t)$ 在区间 I 实解析，则 $f(t)$ 在区间 I 内每一点实解析.

定义 1.1.3　若函数 $f\in H(I)$，$I=(-T,T)$ 且 $|f^{(n)}(0)|\leqslant\dfrac{n!}{T^n}M$，$n\in\mathbf{N}$，则称 $f(t)$ 在 I 强解析. M 是与 n 无关的正常数.

定义 1.1.4　若函数 $u(x,t)\in C^\infty(\Re\times(-T,T))$，且对任意固定的 $x\in\Re$，u 关于 t 在 $(-T,T)$ 强解析，则称 u 在 $\Re\times(-T,T)$ 强解析.

定义 1.1.5　若函数 $u(x,t)\in C^\infty(D)$，$D=\{(x,t)\,|\,x\in\Omega,|t|<\rho(x)\}$，且对任意固定的 $x\in\Omega$，u 关于 t 在 $(-\rho(x),\rho(x))$ 强解析，则也称 u 在 D 强解析. 其中 $\rho(x)$ 为 Ω 上的正连续函数.

函数 $u(x,t)$ 强解析，是指函数 u 关于 t 在 $(-\rho(x),\rho(x))$ 强解析（对任意固定的 $x\in\Omega$），u 关于 x 仅要求无穷可微. 由此即知多元函数 $u(x,t)$ 强解析的条件比 $u(x,t)$ 关于每个变元都解析的条件弱. 多元函数强解析的概念削弱了多元函数解析的概念.

D^L-$\square$ 型方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^L u}{\partial t^L}=\square u+f(x,t),x\in\Omega,t>0,\\ \left.\dfrac{\partial^h u}{\partial t^h}\right|_{t=0}=\varphi_h,h=0,1,\cdots,L-1,\end{cases}$$

其中 k 阶偏微分算子 $\square\triangleq\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k}A_\alpha(x)\partial^\alpha$，系数 $A_\alpha(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^m)$，即 $\square$ 仅是关于 x 的

偏微分算子,系数 $A_\alpha(x)$ 也与 t 无关.

先解齐次 D^L-□型方程的 Cauchy 问题Ⅰ,再解非齐次 D^L-□型方程的 Cauchy 问题Ⅱ,由线性方程的叠加原理即可解 D^L-□型方程 Cauchy 问题.

Cauchy 问题Ⅰ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^L u}{\partial t^L} = \Box u, x \in \Omega, t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial^h u}{\partial t^h}\right|_{t=0} = \varphi_h, h = 0,1,\cdots,L-1. \end{cases}$$

引理 1.1.3　Cauchy 问题Ⅰ的强解析解 u 在点$(x,t)=(x_0,0)$处的邻域 $D_\delta=\{(x,t):|t|+\|x-x_0\|<\delta\}$存在唯一的充要条件是 φ_h 在 $\|x-x_0\|<\delta$ 无穷可微,$h=0,1,\cdots,L-1$,且

$$|(\Box^n\varphi_h)(x_0)| \leqslant \frac{(Ln+h)!}{\delta^{Ln+h}}M, \quad n\in\mathbf{N}, h=0,1,\cdots,L-1. \tag{1.1.1}$$

若式(1.1.1)成立,在邻域 D_δ 强解析解可表示为

$$u = \sum_{h=0}^{L-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{Ln+h}}{(Ln+h)!}\Box^n\varphi_h(x). \tag{1.1.2}$$

证明　必要性. 若强解析解在邻域 D_δ 存在,记为 u^*,则

$$u^*(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\frac{\partial^n u^*}{\partial t^n}\right)(x,0), \quad |t|+\|x-x_0\|<\delta, \tag{1.1.3}$$

且

$$\left|\left(\frac{\partial^n u^*}{\partial t^n}(x_0,0)\right)\right| \leqslant \frac{n!}{\delta^n}M, \quad n\in\mathbf{N}. \tag{1.1.4}$$

由于 u^* 满足 Cauchy 问题Ⅰ中的方程,故有$\dfrac{\partial^L u^*}{\partial t^L}\equiv\Box u^*$.

对于 C^∞ 函数而言,算子$\dfrac{\partial}{\partial t}$与算子□的运算满足乘法交换律$\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\Box=\Box\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$,从而有$\dfrac{\partial^{Ln}u^*}{\partial t^{Ln}}\equiv\Box^n u^*$ 和$\dfrac{\partial^{Ln+h}u^*}{\partial t^{Ln+h}}\equiv\Box^n\left(\dfrac{\partial^h u^*}{\partial t^h}\right)$. 利用初始条件即有

$$\left.\frac{\partial^{Ln+h}u^*}{\partial t^{Ln+h}}\right|_{t=0} \equiv \Box^n\varphi_h(x), \quad h=0,1,\cdots,L-1. \tag{1.1.5}$$

由式(1.1.3)右端级数的绝对收敛性,将式(1.1.5)代入之,即得

$$u^* = \sum_{h=0}^{L-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{Ln+h}}{(Ln+h)!}\Box^n\varphi_h(x). \tag{1.1.6}$$

由式(1.1.4),式(1.1.5)即有

$$|\Box^n\varphi_h(x_0)| \leqslant \frac{(Ln+h)!}{\delta^{Ln+h}}M. \tag{1.1.7}$$

充分性. 由级数在点 $x=x_0$ 处的收敛半径为 δ，即在原点 $t=0$ 的邻域 D_δ 存在强解析解. 由引理 1.1.3 立即可得到如下定理.

定理 1.1.1　Cauchy 问题 Ⅰ 的强解析解在 $\Re\times(-\delta,\delta)$ 存在唯一的充要条件是 $\varphi_h\in C^\infty(\Re)$，且

$$|\square^n\varphi_h(x)|\leqslant\frac{(Ln+h)!}{\delta^{Ln+h}}M,\quad x\in\Re,n\in\mathbf{N},h=0,1,\cdots,L-1.\tag{1.1.8}$$

设 Ω 为边界充分光滑的有界区域，对任意充分小的正数 ρ，取紧集 $\Re\subset\Omega$，使得

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega,\Re)=\inf_{x\in\partial\Omega,y\in\Re}\|x-y\|=\rho.$$

由有限覆盖定理，存在有限个中心为 $a_i\in\Re$，半径为 ρ 的小球 $o(a_i,\rho)(i=1,2,\cdots,N)$ 覆盖 $\Re$，同时

$$\Re\subset\left(\bigcup_{i=1}^N o(a_i,\rho)\right)\subset\Omega.\tag{1.1.9}$$

推论 1.1.1　若 $\varphi_h\in C^\infty(\Omega)$，$h=0,1,\cdots,L-1$，同时式(1.1.8)，(1.1.9)成立，则 Cauchy 问题 Ⅰ 的解 $u\in C^\infty\left(\bigcup_{i=1}^N D_\rho(a_i)\right)$，解由式(1.1.2)给出，其中

$$D_\rho(a_i)\triangleq\{(x,t):|t|+\|x-a_i\|<\rho\}.$$

推论 1.1.2　当 $\varphi_h\in C^\infty(\Omega)$，$h=0,1,\cdots,L-1$，且存在 Ω 上的正连续函数 $\rho(x)$，使得

$$|\square^n\varphi_h(x)|\leqslant\frac{(Ln+h)!}{\rho^{Ln+h}(x)}M,\quad x\in\Omega,n\in\mathbf{N}$$

成立，则 Cauchy 问题 Ⅰ 的强解析解在 $D=\{(x,t)\mid x\in\Omega,|t|<\rho(x)\}$ 存在唯一，且由式(1.1.2)表出.

定理 1.1.2　Cauchy 问题 Ⅰ 的强解析解在 $\mathbf{R}^m\times(-\rho,\rho)$ 存在唯一的充要条件是 $\varphi_h\in C^\infty(\mathbf{R}^m)$，且

$$|\square^n\varphi_h(x)|\leqslant\frac{(Ln+h)!}{\rho^{Ln+h}}M,\quad x\in\mathbf{R}^m,n\in\mathbf{N},h=0,1,\cdots,L-1.$$

引理 1.1.4(齐次化原理)　如果 $G(x,t;\tau)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^L G}{\partial t^L}=\square G,x\in\Omega,t>\tau,\\[2mm] \left.\dfrac{\partial^h G}{\partial t^h}\right|_{t=\tau}=0,h=0,1,\cdots,L-2,\\[2mm] \left.\dfrac{\partial^{L-1}G}{\partial t^{L-1}}\right|_{t=\tau}=f(x,\tau)\end{cases}$$

的强解析解，则 $u=\int_0^t G(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^L u}{\partial t^L}=\square u+f(x,t),x\in\Omega,t>0,\\[2mm] \left.\dfrac{\partial^h u}{\partial t^h}\right|_{t=0}=0,h=0,1,\cdots,L-1\end{cases}$$

的强解析解.

验证从略.

考虑非齐次方程的 Cauchy 问题Ⅱ

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^L u}{\partial t^L}=\Box u+f(x,t),x\in\Omega,t>0,\\ \left.\dfrac{\partial^h u}{\partial t^h}\right|_{t=0}=0,h=0,1,\cdots,L-1.\end{cases}$$

定理 1.1.3(齐次化原理) 设 $f(x,t)\in C^\infty(\Omega\times\mathbf{R})$,且存在 Ω 上的正连续函数 $\rho(x)$,使得

$$|\Box^n f(x,t)|\leqslant\frac{(Ln+h-1)!}{\rho^{Ln+h-1}(x)}M,\quad\forall x\in\Omega,n\in\mathbf{N},\ |t|<\rho(x),$$

则 Cauchy 问题Ⅱ有古典解 $u(x,t)\in C^\infty(D)$,且可表示为

$$u(x,t)=\int_0^t\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(t-\tau)^{Ln+L-1}}{(Ln+L-1)!}\Box^n f(x,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

特别地,当 $f(x,t)=g(x)$ 与 t 无关时,

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{Ln+L}}{(Ln+L)!}\Box^n g(x),$$

其中 $D=\{(x,t)\,|\,x\in\Omega,|t|<\rho(x)\}$.

推论 1.1.3 如果 $\varphi,\psi\in H(\Omega)$,则 m 维波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

存在 Ω 上的正连续函数 $\rho(x)$,使得强解析解在区域 D 存在唯一,且可表示为

$$u=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\Delta^n\varphi(x)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}t^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta^n\psi(x),\tag{1.1.10}$$

其中 $D=\{(x,t)\,|\,x\in\Omega,|t|<\rho(x)\},\Delta=\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

证明 只需证明式(1.1.10)右端级数的收敛性.

$$u=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\Delta^n\varphi(x)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}t^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta^n\psi(x),$$

$$u_1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\Delta^n\varphi(x),\quad u_2=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}t^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta^n\psi(x).$$

由 $\varphi,\psi\in H(\Omega)$,任意紧集 $\mathfrak{R}\subset\Omega$,存在 $\delta=\delta_{\mathfrak{R}}$,使得 $\varphi,\psi\in W(\mathfrak{R},\delta)$. 即有 $|\partial^\alpha\varphi(x)|\leqslant\frac{\alpha!}{\delta^{|\alpha|}}M,|\partial^\alpha\psi(x)|\leqslant\frac{\alpha!}{\delta^{|\alpha|}}M,\forall x\in\mathfrak{R}$,故

$$\left|\frac{\partial^{2n}\varphi(x)}{\partial x_1^{2n_1}\cdots\partial x_m^{2n_m}}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\frac{(2n_j)!M}{\delta^{2n}},\quad\left|\frac{\partial^{2n}\psi(x)}{\partial x_1^{2n_1}\cdots\partial x_m^{2n_m}}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\frac{(2n_j)!M}{\delta^{2n}}.$$

故有

$$u_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\Big[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Big]^n \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\Big[\sum_{n_1+\cdots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!\cdots n_m!}\frac{\partial^{2n}\varphi(x)}{\partial x_1^{2n_1}\cdots\partial x_m^{2n_m}}\Big].$$

$$\begin{aligned}
|u_1| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}|t|^{2n}}{(2n)!}\Big[\sum_{n_1+\cdots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!\cdots n_m!}\Big|\frac{\partial^{2n}\varphi(x)}{\partial x_1^{2n_1}\cdots\partial x_m^{2n_m}}\Big|\Big] \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}|t|^{2n}}{(2n)!}\Big[\sum_{n_1+\cdots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!\cdots n_m!}\prod_{j=1}^{m}\frac{(2n_j)!M}{\delta^{2n}}\Big] \\
&\leqslant M\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}|t|^{2n}}{(2n)!\delta^{2n}}\Big[\sum_{n_1+\cdots+n_m=n} n!\prod_{j=1}^{m}\frac{(2n_j)!}{n_j!}\Big] \\
&\leqslant M\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}|t|^{2n}}{(2n)!\delta^{2n}}\Big[\sum_{n_1+\cdots+n_m=n} n!\frac{(2n)!}{n!}\Big] \\
&\leqslant M\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}|t|^{2n}}{\delta^{2n}}\Big[\sum_{n_1+\cdots+n_m=n} 1\Big] \\
&\leqslant M\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}|t|^{2n}}{\delta^{2n}}\Big[\sum_{n_1+\cdots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!\cdots n_m!}\Big] \\
&\leqslant M\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}|t|^{2n}m^n}{\delta^{2n}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} d_n|t|^{2n},\quad d_n = \frac{a^{2n}m^n}{\delta^{2n}}.
\end{aligned}$$

上面推导用到 $\prod_{j=1}^{m}\frac{(2n_j)!}{n_j!}\leqslant\frac{(2n)!}{n!}\Big(\sum_{j=1}^{m}n_j=n\Big)$ 和 $\sum_{n_1+\cdots+n_m=n}1\leqslant\sum_{n_1+\cdots+n_m=n}\frac{n!}{n_1!\cdots n_m!}=m^n$ 两式. 由 $\lim_{n\to+\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{a^{2n+2}m^{n+1}}{\delta^{2n+2}}}{\dfrac{a^{2n}m^n}{\delta^{2n}}}=\frac{a^2m}{\delta^2}$, 令 $\frac{a^2m}{\delta^2}|t|^2<1$, 即有 $|t|<\frac{\delta}{a\sqrt{m}}$. 级数 u_1 在 $|t|<\frac{\delta}{a\sqrt{m}}$, $x\in\mathfrak{R}$ 绝对一致收敛, 由紧集 $\mathfrak{R}\subset\Omega$ 的任意性, 即知当 $|t|<\frac{\delta}{a\sqrt{m}}$, 级数 u_1 在 $x\in\Omega$ 内闭一致收敛. 由于 $\varphi(x)$ 为实解析函数, u_1 对每个变元 $x_j(j=1,2,\cdots,m)$ 皆为解析函数项级数, 由魏尔斯特拉斯关于解析函数项级数内闭一致收敛定理即知 $u(x,t)$ 关于 x_j 解析, 且级数关于 x_j 皆可逐项求任意阶偏导数, 所得级数也是内闭一致收敛的. 即 $u_1\in H(D)$, 同理 $u_2\in H(D)$. 令 $\rho(x)\triangleq\delta_{\mathfrak{R}}$, $x\in\mathfrak{R}\subset\Omega$, 即知存在 Ω 上的有界正函数 $\rho(x)$, 从而易知存在 Ω 上正连续函数 $\rho(x)$, 使得强解析解在区域 D 存在唯一.

例 1.1.1　波动方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta u, (x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3, t>0, \\ u|_{t=0}=\sin(Ax_1+Bx_2+Cx_3), u_t|_{t=0}=0, \end{cases}$$

其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$，$A,B,C$ 为常数.

解　由公式(1.1.10)，即有

$$\begin{aligned}u&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\Delta^n\sin(Ax_1+Bx_2+Cx_3)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}t^{2n}}{(2n)!}[-(A^2+B^2+C^2)]\sin(Ax_1+Bx_2+Cx_3)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(at\sqrt{A^2+B^2+C^2})^{2n}}{(2n)!}\sin(Ax_1+Bx_2+Cx_3)\\&=\cos(at\sqrt{A^2+B^2+C^2})\sin(Ax_1+Bx_2+Cx_3).\end{aligned}$$

例 1.1.2　波动方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2\Delta u,(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3,t>0,\\u\mid_{t=0}=0,u_t\mid_{t=0}=x_1^2x_2^3x_3+5x_1x_2x_3.\end{cases}$$

解　由公式(1.1.10)，即有 $u=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}t^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta^n[x_1^2x_2^3x_3+5x_1x_2x_3]$. 因为

$$\begin{aligned}&\Delta^0(x_1^2x_2^3x_3+5x_1x_2x_3)=x_1^2x_2^3x_3+5x_1x_2x_3,\\&\Delta^1(x_1^2x_2^3x_3+5x_1x_2x_3)=2x_2^3x_3+6x_1^2x_2x_3,\\&\Delta^2(x_1^2x_2^3x_3+5x_1x_2x_3)=\Delta[\Delta(x_1^2x_2^3x_3+5x_1x_2x_3)]\\&\qquad=\Delta(2x_2^3x_3+6x_1^2x_2x_3)=24x_2x_3,\\&\Delta^3(x_1^2x_2^3x_3+5x_1x_2x_3)=0,\end{aligned}$$

从而 $\Delta^n(x_1^2x_2^3x_3+5x_1x_2x_3)=0,n=3,4,\cdots$. 于是

$$\begin{aligned}u&=t(x_1^2x_2^3x_3+5x_1x_2x_3)+\frac{a^2t^3}{3!}(2x_2^3x_3+6x_1^2x_2x_3)+\frac{a^4t^5}{5!}(24x_2x_3)\\&=t(x_1^2x_2^3x_3+5x_1x_2x_3)+\frac{a^2t^3}{3}(x_2^3x_3+3x_1^2x_2x_3)+\frac{a^4t^5}{5}x_2x_3.\end{aligned}$$

推论 1.1.4　如果 $\varphi,\psi\in H(\Omega)$，则 $m+1$ 维拉普拉斯方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=-\Delta u,\\u\mid_{t=0}=\varphi(x),u_t\mid_{t=0}=\psi(x)\end{cases}\tag{1.1.11}$$

存在 Ω 上的正连续函数 $\rho(x)$，使得强解析解在区域 D 存在唯一，且可表示为

$$u=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nt^{2n}}{(2n)!}\Delta^n\varphi(x)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nt^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta^n\psi(x),\tag{1.1.12}$$

其中 $\Delta=\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$，$D=\{(x,t)\mid x\in\Omega,\mid t\mid<\rho(x)\}$.

证明　同推论 1.1.3.