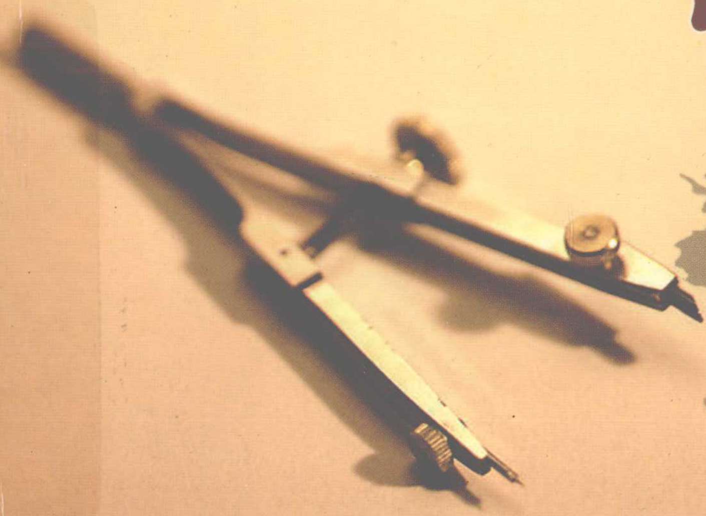
数学思维方法

李冬胜 著



山西出版集团
山西人民出版社

ISBN 978-7-203-06762-7

9 787203 067627 >

定价:26.00元

数学思维方法

李冬胜 著

山西出版集团
山西人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

教学思维方法 / 李冬胜著.—太原：山西人民出版社，2010.4

ISBN 978-7-203-06762-7

Ⅰ.①教… Ⅱ.①李… Ⅲ.①教学课—中学—教学参考资料 Ⅳ.①C634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 043128 号

教学思维方法

著　　者：李冬胜
责任编辑：苏岳明　冯　昭
装帧设计：王聚金

出 版 者：山西出版集团·山西人民出版社
地　　址：太原市建设南路 21 号
邮　　编：030012
发行营销：0351-4922220　4955996　4956039
0351-4922127（传真）　4956038（邮购）
E - mail：sxskcb@163.com（发行部）
sxskcb@126.com（总编室）
网　　址：www.sxskcb.com

经 销 者：山西出版集团·山西人民出版社
承 印 者：山西三联印刷厂

开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：8
字　　数：230 千字
印　　数：1—5000 册
版　　次：2010 年 4 月　第 1 版
印　　次：2010 年 4 月　第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-203-06762-7
定　　价：26.00 元

序 言

思维是人类认识问题,解决问题的基本形式,是认识概念,理解规律,发现定律,解决问题的出发点。其间涉及众多的思维方法,思维形式和思维品质,这些是我们能够顺利到达认知目的地的基本操作程序和策略。

学习数学,离不开数学思维,可以说数学的本质特性就是思维。我们经历了数学概念的引入,定理的发现,规律的探求等诸多过程。在这些认识活动过程中,是什么促使你能够一步一步向前走,又是什么使你的智慧逐步提升?用李老师的话说就是数学思维能力的作用。

李冬胜老师,是我省当年最年轻的数学特级教师,从教近三十年来,兢兢业业,持之以恒,孜孜以求,刻苦钻研,一直坚持数学思维的理论与实践研究,发表了许多有份量有价值的学术和教学论文,提出了一些数学思维方面的观点,受到国内外数学教育界同行的关注与肯定。同时,在教学实践中,坚持对学生进行思维教育,取得了优异的成绩,受到学生和家长的一致好评,在我省乃至全国数学教育界有着广泛的声誉。

《数学思维方法》,是他在教学过程中开展思维教育的经验总结,也是近年来他在中学开设选修课程所试用的教材。相信本书的出版,对于提升读者的数学思维能力,优化数学思维品质,具有重要的作用,同时也为学校开设选修课程提供了一本非常好的教材。

是为序。

张奠宙

2010年2月22日

目 录

第一章 数学学习与思维 …… 1

1.1 什么是思维 …… 1

1.2 数学学习与思维 …… 5

第二章 数学思维方法 …… 11

2.1 观察与试验 …… 11

2.1.1 观察 …… 12

2.1.2 试验 …… 14

2.2 抽象与概括 …… 20

2.2.1 抽象 …… 20

2.2.2 概括 …… 23

2.3 分析与综合 …… 27

2.3.1 分析 …… 27

2.3.2 综合 …… 30

2.4 联想 …… 33

2.5 分类 …… 41

2.6 比较 …… 45

2.7 类比 …… 51

2.8 不完全归纳法 …… 61

2.9 完全归纳法 …… 65

2.10 一般化 …… 69

2.11 特殊化 …… 74
第三章 数学思维形式 …… 78
3.1 逻辑思维 …… 78
3.2 直觉思维 …… 85
3.3 发散思维 …… 95
3.4 聚合思维 …… 125
3.5 形象思维 …… 133
3.6 创造性思维 …… 143
第四章 数学思维品质 …… 153
4.1 思维的深刻性 …… 153
4.2 思维的灵活性 …… 157
4.3 思维的广阔性 …… 165
4.4 思维的敏捷性 …… 170
4.5 思维的批判性 …… 177
4.6 思维的独创性 …… 185
第五章 中学数学解题思维模式 …… 193
5.1 构造式解题思维模式 …… 193
5.2 变更问题的思维模式 …… 202
5.3 集合观点解题思维模式 …… 208
5.4 分解与结合的思维模式 …… 214
5.5 整体思维模式 …… 218
5.6 以退为进的思维模式 …… 227
5.7 开放型问题的思维模式 …… 234
5.8 递归的思维模式 …… 240
主要参考文献 …… 248

第一章　数学学习与思维

1.1　什么是思维

如何给思维下定义,心理学家尚无一致的意见。人们在认识世界、解决问题的过程中,人脑要通过思考问题的内部活动,来认识事物的本质、认识事物间的相互联系及其规律。人脑的这种活动就是思维.实际上,也就是人们用智能寻求问题的答案或寻求达到实际目的的手段.

人们通过思维,探求解决问题的方案和策略,探索大自然的规律,形成多种多样、丰富多彩的精神产品——概念或思想.因此,人类认识发展的历史,就是人类思维发展的缩影.

在心理学中,普遍认为,思维是人脑借助语言实现的对客观事物概括的、间接的反映,是反映对象本质和规律的认识过程.

思维具有问题性、间接性、概括性和逻辑性.

1. 思维的问题性

思维的问题性又称目的性.有目的的认识、了解和解决问题,是人类思维独有的本领.有意识地、能动地改造自然,改造社会,只有人类

思维才具有这样的目的性. 正如马克思所说:"蜜蜂建造蜂房,不管怎样精巧,但它和人类建筑师最大不同之处在于,人类建筑师在建筑一栋房子之前,这座房子已在他的观念中完成了."所以,目的性是人类思维的根本特征.

如果没有问题就不会导致思维的产生,因此,问题对思维具有激励(或刺激)作用. 如许多科学家的发现、发明和创造正是在解决人类提出问题的基础上,通过解决问题而产生的. 同时,问题对思维具有定向作用,它是探索活动中的方向标.

例 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R,且对任意实数 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,当 $x>0$ 时,$f(x)<0$. $f(3)=-4$.

(1)证明:函数 $y=f(x)$ 的奇函数;

(2)求 $f(x)$ 在 $[-9,9]$ 上的最值.

解析:(1)欲证 $y=f(x)$ 是奇函数,只须证明 $f(-x)=-f(x)$. 这是思维的目的性,由已知 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,需要 $f(-x)$ 的出现!

怎么办? 令 $y=-x$(从一般到特殊,或称特殊化).

$\therefore f(0)=f(x)+f(-x)$.

由我的所要证明的结论知,只须证明 $f(0)=0$ 即可.

怎么办? 令 $x=y=0$,即 $f(0)=f(0)+f(0)$,$\therefore f(0)=0$,$\therefore f(-x)=f(x)$.

评:①证明 $f(0)=0$ 还有别的办法吗? 回答是肯定的. 如令 $y=0$,则 $f(x)=f(x)+f(0)$,$\therefore f(0)=0$.

②令 $y=x$,$f(2x)=2f(x)$,可以推广吗?

即有:$f(nx)=nf(x)$ $(n\in N*)$.

③进一步思考:$nf(\frac{1}{n}x)=f(x)$ 成立吗?

$\frac{1}{n}f(x)+\frac{1}{m}f(x)=f(\frac{x}{n})+f(\frac{x}{m})$ 成立吗?

④如果②,③成立,你猜 $y=f(x)$ 是什么类型的函数?

(2)由于 $y=f(x)$ 为抽象函数,且 $x>0$ 时,$f(x)<0$,则 $x<0$,$f(x)>0$,可猜想 $y=f(x)$ 为减函数.

下面给出证明:

设 $x_1,x_2\in R$,且 $x_1<x_2$.

$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=f(x_1-x_2)>0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

$\therefore y=f(x)$ 为减函数.

$f(9)=3f(3)=-12,\therefore f(-9)=12$

$\therefore f(x)$ 在 $[-9,9]$ 上的最大值为 12,最小值为 -12.

评:①这里从已知 $x>0$,$f(x)<0$,再结合 $y=f(x)$ 的奇偶性,从特殊到一般可归纳出 $f(x)$ 的单调性.

②如果说你确实没有想到用单调性怎么办?

可由 $f(3)=f(1)+f(2)=-4$,而 $f(1)<0$,$f(2)<0$.

$\therefore f(1)>f(3)$,$f(2)>f(3)$,同理可得 $f(1)>f(2)$,这样"以退为进"可实现问题的解决.

③解题之后,你的收获是什么?进而测试一下你的思维水平,哪些方面需要强化?

2. 思维的间接性

思维能借助已有的知识和经验,对客观事物进行间接的反映,作出正确的判断. 如:由炮声推及战争;小学生可以通过思维了解光在一秒内走过的路程,相当于高速飞驰的汽车(100 千米/时)毫不停息地奔驰 125 个日日夜夜的路程,从而把握光速之快;我们常说的,举一反三、闻一知十就是指间接性的认识.

3. 思维的概括性

思维不仅能认识个别事物的本质属性，而且能从个别推及一般，主要靠思维的概括性. 如数 1，它可以是一个苹果、一支铅笔、一副手套等等，而抽象出来的一般概念——数量 1. 又如，我们通过研究一系列特殊的指数函数，抽象出指数函数的一般性质. 因此概括是在已有的知识和经验的基础上，舍去某类事物个别的特点，抽象出其共有的东西而形成的. 没有抽象——概括的活动，也就没有概括性的认识，就没有思维.

4. 思维的逻辑性

所谓思维的逻辑性是指人脑在思维过程中是按照一定的形式、方法和规律进行的.（详见 4.1）

1.2　数学学习与思维

数学是研究现实世界中空间形式和数量关系的科学. 通过什么途径与方法将现实问题转化为数学问题,再用数学方法解决这些实际问题,数学家做了大量的探索和研究. 他们借助于试验、分析、抽象和概括等思维方法形成了一套较为完整的数学理论体系,这套理论体系的形成就是通过数学思维来实现的.

那么,什么是数学思维呢? 张乃达先生认为:数学思维就是以现实的数学问题为研究对象,通过发现问题、解决问题的形式,达到对现实世界空间形式和数量关系的本质的一般性的认识的思维过程. 它有以下几个特点:

1. 抽象性

在数学研究过程中,数学家往往抛弃研究对象的特性,只保留事物的空间形式和数量关系. 如数学中的点是没有大小的,线是没有粗细的,即这些点、线不同于现实中的点、线,而是一种抽象的"事物". 又如集合 $A=\{x|p\}$、函数 $y=f(x)$,它们不是指具体意义的集合、函数,而是指一般抽象之后的集合、函数. 这些例子说明,在数学思维过程中,舍去了思维对象非本质的属性,而是抽取出具有一般意义的数学量来研究的. 可见,抽象之后的数学内容具有高度的概括性,深化了对事物的本质和规律的认识.

2. 严密性

表现为数学思维过程中的逻辑性和精确性. 数学思维是按照一定的形式和方法进行的,它的理论是按照严格的逻辑推得的. 如几何的推理过程要求步步有理,言必有据. 此外,数学思维要求定量把握事物间的量的关系,要求具有一定的精确性. 爱因斯坦曾这样描述数学:"为什么数学比其他一切科学受到特殊的尊重,一个理由是,它的命题是绝对可靠和无可争辩的."可以这样讲,没有数学的科学是不可靠和不完善的.

3. 探索性与创造性

数学来源于实际问题,同时又用来解决这些实际问题. 数学思维总是围绕解决某一问题而展开,如数学概念的建立,一个定理的推证,一种新的算法的形成都是通过数学思维寻找、探索其解决问题的方法来实现的. 因此,数学思维就被赋予探索的性质. 探索的结果,必然有新的联系的产生,新的规律的出现,这就是创新的结果.

例 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,且满足 $f(mn)=f(m)+f(n)$.

证明:①$f(1)=0$;②$f(x^3)=3f(x)$;③$f(\sqrt{x})=\frac{1}{2}f(x)$;④$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$.

分析:本题的已知是一个关于抽象函数的等式,但从所要证明的等式来看,以特殊形式居多,不妨我们从一般到特殊的思维方式来思考.

证明①:令 $m=n=1$,(思维方向选择)

则 $f(1\times1)=f(1)+f(1)$,$\therefore f(1)=0$.(从一般到特殊)

评:你的困难是什么?没有取特殊值吗?如果是这样,检查一下自己在思考本题过程中,是不是对所要证明的结果没有进行认真的思考,没有选择好思维方向.

证明②:令 $m=x^2,n=x$.(思维方向的选择)

$f(x^3)=f(x^2\cdot x)=f(x^2)+f(x)$,

同理　$f(x^2)=f(x\cdot x)=f(x)+f(x)$,

$\therefore f(x^3)=3f(x)$(从一般到特殊)

评:②的证明与①的证明方式,在思维方式上是一致的,只是特殊化的形式不一样,你还能取一些特殊值产生不同的等式吗?本题可以推广吗?如 $n\in N*$,$f(x^n)=nf(x)$成立吗?不妨一试.(这就是思维的深刻性.这个结论成立)

证明③:令 $m=n=\sqrt{x}$(思维方向的选择)

$f(x)=f(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})=f(\sqrt{x})+f(\sqrt{x})=2f(\sqrt{x})$

$\therefore f(\sqrt{x})=\frac{1}{2}f(x)$(特殊化)

评:③的证明好像是逆向思维!

其实与②的思维方式相似,$\because f(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n}f(x)$成立吗?大家可以探索一下.

证明④:$\because f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

证法 2:$f(x)=f(y\cdot\frac{x}{y})$(等价转化思维模式)

$=f(y)+f(\frac{x}{y})$

$\therefore f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

评:思维模式在第五章要详细讲解,这里分别用正向思维和等价转化思维模式实现了问题的转化.这里不妨从不同角度,用发散思维的方式再提供一种证法:

证法3:$\because f(\frac{x}{y})+f(y)=f(\frac{x}{y}\cdot y)=f(x)$

$\therefore f(x)-f(y)=f(\frac{x}{y})$

4. 统一性

统一性是指数学思维有本质上的一致性.许多数学知识表面看上去没有明确的联系,但我们通过深入的分析和研究,发现他们是有一定的内在联系性的.如数与形之间的联系,数与数之间的联系,形与形之间的联系,可以从不同的角度作不同层次的抽象,经过一定层次的抽象之后,往往经历(或产生)相同或相似于其他已有的数学模式,然后用已有的模式及方法解决问题.

例 解不等式$\frac{1}{2}\leqslant\frac{x^3+2x+3}{2x^3+x+1}<1$.

分析:联想到定比分点公式:P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成比 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$,若 $\lambda>0$,则点 P 在 A、B 之间,当 $\lambda<-1$ 时,点 P 在有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的延长线上,当 $-1<\lambda<0$ 时,点 P 在有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的反向延长线上,反之亦真.

解:设$\frac{1}{2}$,$\frac{x^3+2x+3}{2x^3+x+1}$,3 为数轴上的三点的坐标,由定比分点公式

$\lambda=\dfrac{\dfrac{x^3+2x-3}{2x^3+x+1}-\dfrac{1}{2}}{3-\dfrac{x^3+2x+3}{2x^3+x+1}}=\dfrac{3x+5}{2x(5x^2+1)}>0$,易得原不等式解为 $x(-\infty,-$

$\frac{5}{3})\cup(0,+\infty)$.

统一性体现了数学模式之间的转化,强化了各分支之间的关联性,反映了"大数学"的整体观念,拓展了思维空间.在问题解决过程中,运用联想类比等我们熟知的数学对象的结构特征和思维策略,往往能实出"柳暗花明".

数学学习与数学思维有密切的关系.数学学习主要是通过数学思维来实现的,数学思维的发展有利于数学学习能力的提高,从而又促进数学思维更进一步的发展.因此,数学学习不仅要学习数学知识本身,更重要的是学习思维的方式、方法,因为方法论是最重要的知识.我们知道,呈现在我们面前的数学知识都是数学家思维活动的结果,许多实际问题的解决不仅仅是依赖数学知识,更重要的是运用了合理的数学思维方法.

数学中的思维材料极其丰富,思维方法非常齐全,为我们提高思维能力提供了很好的教材,它不仅仅是概括性特别高,间接性特别强,特别是作为思维载体的数学语言的精炼与形式化,使得它不同于一般的思维.

"千姿百态的几何图形,变幻无穷的数的世界,却能被为数极少的几条公理所穷竭;成百上千条定理、公式在它的基础上令人信服地展现在眼前,怎能不叫人惊奇;看起来完全不同的对象却有着本质上的一致;无关的事物之间有着深刻的联系;复杂、多变、形态各异的式子、图形存在着不变的规律和简捷的结果."(引自《数学学习论》)

数学思维方法是数学乃至科学技术中的美丽花朵,只要我们用心去领悟它,运用它,一定会结出丰硕的果实.

了解数学思维,做一个明白的人;

懂得数学思维,做一个聪明的人;