

全日制十年制学校

高中数学第二册
教学参考书

湖北人民出版社

全日制十年制学校
高中数学第二册
教 学 参 考 书

湖北省中小学数学教材研究室编

湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行
孝感地区印刷厂印刷

1980年1月第1版 1980年1月第1次印刷
统一书号：7106·1533 定价：0.37元

第五章 空间图形

I 目的要求	1
II 教材说明	1
一 平面	6
二 空间两条直线	12
三 空间直线和平面	17
四 空间两个平面	23
五 多面体和旋转体及其面积	31
六 多面体和旋转体的体积	43
七 正多面体, 多面体的变形*	51
III 附录	
关于欧拉公式的一些资料	59

第六章 二次曲线

I 目的要求	61
II 教材说明	61
一 曲线和方程	63
二 圆的一般方程, 坐标轴的平移	74
三 椭圆	84
四 双曲线	94
五 抛物线	103
六 坐标轴的旋转	117

目 录

- 1 关于二次曲线轨迹充分性的证明.....132
- 2 关于二次曲线的范围.....133
- 3 用反证法证明抛物线不存在渐近线.....134

第七章 极坐标和参数方程

- I 目的要求.....135

- II 教材说明.....135

- 一 极坐标.....137

- 二 参数方程.....148

III 附录

- 1 关于直线参数方程的标准形与非标准形.....164

- 2 关于直线参数方程应用举例.....165

第五章 空间图形

I 目的要求

1. 使学生掌握空间两元素（直线、平面）之间（线、线；线、面；面、面）的位置关系以及一些简单立体（柱、锥、台、球）的有关概念和性质。

2. 使学生理解解决立体几何问题的基本思想是化立体为平面，再利用平面几何的有关知识去解决。化立体为平面的基本方法在本教材中归纳起来有三种：作平面（包括作截面）、展开（柱、锥、台的表面）和趋压（多面体变形）成平面。

3. 要求学生会绘制简单空间图形的直观图；发展和培养学生的逻辑思维能力 and 空间想象能力；培养学生综合运用所学知识解决有关实际问题的能力。

II 教材说明

本章教材是根据大纲的精神编排的，全章分为七节。即：

一、 平面

二、 空间两条直线

三、 空间直线和平面

四、 空间两个平面

五、 多面体和旋转体及其面积

六、 多面体和旋转体的体积

七*、 正多面体，多面体变形

其中一——四节主要研究空间图形的基本元素，平面及空间直线的基本概念和相互位置关系；而五一七节则是研究简单立体的

性质及体积面积的计算。

学生在初中阶段已学过平面图形的性质，现在来学习空间图形的性质，这就从二维空间进入到三维空间，因而几何图形的性质也就有所继承和发展。所谓继承就是说的在三维空间里任何一块平面上的平面图形都具有初中阶段已学过的那些几何性质，例如两直线间的平行、垂直、相交、重合以及平面图形的全等与相似等等；所谓发展，就是说的在三维空间里增添了新的几何元素——平面，因此首先就应详细地研究平面的重要性质；至于直线和点虽然都是二维空间内的几何元素，本来不是新东西，可是一进入三维空间，情况就变得复杂了：点成了空间（即三维空间，下同）的点，直线也成了空间的直线，几何图形也成为立体的了，于是就出现了许多在平面（即二维空间，下同）上所未见过的新现象和新问题，这就要求人们从理论上提出解决这些问题的新方法。因此，在第一节着重研究平面的基本性质，即平面的概念，平面的表示法（画法），确定平面的条件：点与平面的关系、直线与平面的关系等，这些都是研究空间图形的重要基础，在二、三、四节依次研究“线线关系”、“线面关系”和“面面关系”等，而这些又是研究任何立体图形的重要基础。因为任何立体图形归根结底都是由空间的点、线、面组成的（空间点集），离开了这些重要基础，我们是无法认识立体图形的性质的。五、六两节着重研究简单立体——多面体和旋转体的概念、性质和计算公式（至于复杂形体的研究则属于高等数学），这些在生活、生产和进一步学习等各方面都有广泛的应用价值。很明显，如果不把前面四节的道理弄清楚，要想学好五、六节的内容，那是很困难的，可见前面部分的内容正是五、六节的重要基础。当然，五、六节内容又是今后进一步学习的基础。

由此可见，本章教材的重点应放在空间直线和平面的位置关系上面，特别是平行、垂直的关系要搞清楚；而教材的落脚点自

应放在简单立体的计算上面。

本章教材的难点在于帮助学生建立正确的空间概念，发展空间想象能力。逻辑推理与合理计算那在数学学科中任何一个章节里都应作要求，亦为教学难点。

为了解决这些问题，建议在教学中采用下面的一些措施：

1. 在空间图形的开头课教学中，应充分运用直观性这个教学原则，以符合人们认识事物的客观规律：由感性到理性。开始时应运用实物、模型、挂图等，尽量做到问题从实际提出，概念通过分析实例引入，使学生看得见，摸得着，画得出，做得到，从而消除其神秘感，在获得感性认识的基础上形成正确的概念。

2. 要让学生多动手。俗话说：“眼过千遍，不如手过一遍。”最好让每个学生准备十根左右长为10cm的细铁丝（或竹签），二、三块纸板或铁皮，将一块橡皮切成若干小块（或用别的软东西代替）便于课内外组装一些简单立体模型，随时可以用来演示，以便更好地领会教材和发展空间想象能力。此外更应画图，使能从“平面”图形中看出立体的形象来。

3. 在一定的时间以后，逐步有意识地减少模型的作用，增强图形的作用，再后就不用模型，完全利用图形，培养学生通过图形来想象各种元素在空间的位置情形，最后甚至不用图形也能解决较简单的问题。这个过程可能需要较长的时间，要求教师循序渐近地耐心要求才能做到。这是学好本章教材的“基本功”，千万不能忽视。

4. 应随时注意平面图形的性质和立体图形的性质之间的联系与区别，防止学生滥用平面几何的定理于空间。例如：过已知直线上的一定点作这直线的垂线，学生往往认为只有一条等等。以“防患于未然”，采取预防措施。

5. 要随时注意发展学生的逻辑思维和培养他们独立思考的能力。要求教师在教学定理或例题时，要教会学生一定的解题原

则，要指导学生思考问题的方法，使学生掌握正确的解题步骤。还要注意立体图形与平面图形的联系，把空间问题归结为平面问题并合理运用平面几何的知识来解决空间图形的问题。至于更高的要求那就是综合运用代数、三角的知识来解决空间图形的问题了。那可以放在稍后一点进行，例如上总结复习课时。

6. 要解足够数量的习题。在课堂练习中可多做一些基本题，教师务必不要每堂课一讲到底。尽可能让学生当堂消化。

本章教学时间约需45课时，具体分配如下：

5.1	平面	}	约 2 课时
5.2	平面的基本性质		
5.3	平面图形的画法		约 2 课时
5.4	两直线的位置关系	}	约 3 课时
5.5	平行直线		
5.6	两条异面直线所成的角		
5.7	直线与平面的位置关系	}	约 5 或 6 课时
5.8	直线与平面平行的判定和性质		
5.9	直线与平面垂直的判定和性质		
5.10	直线的射影、直线和平面所成的角		
5.11	两个平面的位置关系	}	约 2 课时
5.12	两个平面平行的判定和性质		
5.13	二面角		约 1 课时
5.14	两个平面垂直的判定和性质		约 2 课时
5.15	棱柱		约 3 课时
5.16	棱锥		约 2 课时
5.17	棱台		约 3 课时
5.18	圆柱、圆锥、圆台		约 3 课时

5.19 球	} 约 4 课时
5.20 球冠	
5.21 体积概念与公理	} 约 2 课时
5.22 棱柱、圆柱的体积	
5.23 棱锥、圆锥的体积	约 2 课时
5.24 棱台、圆台的体积	约 2 课时
5.25 球的体积	约 1 课时
5.26 球缺的体积	约 2 课时
5.27 正多面体*多面体变形	约 2 课时
小结和复习	约 1 课时

（其中5.27中*多面体变形是选学内容，教学与否可根据学生的具体情况决定）。

一、平 面

5.1 平面

1. 在引言中说明了本章的任务是研究空间图形的性质。什么是空间图形？它和平面图形是有区别的。平面图形上的各点全在一块平面上，因此我们把平面图形理解为平面上的点的集合。我们可以把空间图形理解为不全在同一平面上的点的集合。教学中可用柱、锥、台等模型说明它们的点不全在同一平面上。正因为如此，研究空间图形的性质时，不能完全照搬平面几何的方法，指出这一点是很重要的。

2. 为了引起学生的重视，应说明在实现祖国四个现代化中要用空间图形的知识，还可简单地谈一下学习上的注意事项和要求，但不宜占很多的时间。

3. 平面是空间图形中的基本元素，要让学生建立正确的概念。平面是一个基本概念，不下定义，但可联系实际加以描述，如黑板面、玻璃板、平静的水面等，都是平面的形象。但这些只是几何中平面的一部分。几何中的平面可以向四周无限延展，正象直线可向两个方向无限延长一样。这是教学中的一个难点，必须加以重视。

4. 关于平面形象的表示法，在空间我们用矩形平板表示，在纸上画图，我们用一个平行四边形表示。这是利用了画法几何中的平行投影的性质。当太阳光线从长方形窗户照到地板上时，得到一个平行四边形的样子，我们就用这个办法来画平面的形象。

在空间，一个平板的放置不外三种情形即：直立的、水平的、斜放的，这只需画一个长方体并将其中一个对角面画出来，就可以看得很清楚，教师不妨事先画一张挂图来说明。

至于象课本中图 5—1 中的那些简单的图形，完全可以在课堂上临时用粉笔画出来。最好让学生跟着老师一起画，关于用字母表示平面的方法，可按课本上的规定办理。

5.2 平面的基本性质

1. 平面的基本性质是研究空间图形的理论基础，必须要求学生牢固掌握。

2. 公理和推论中的数学语言“有且只有”，对学生来讲是比较生疏的，应该讲清楚。第一个“有”字说明符合条件的平面是存在的，它保证了平面的存在性；后面那个“只有”说明符合条件的平面有多少个，“只有一个”就保证了平面的唯一性；当中一个“且”字说明这样的平面是存在的并且只有一个，因而这样的平面是唯一确定的。可见“有且只有一个”和“唯一确定”乃是同义语，并且都是数学文献中的惯用语言。

3. 公理 1 除可用来判定直线是否在平面内之外，还可用来判断一个面是否为平面。例如木工常用曲尺来检查工作物的表面是否平滑，他们将尺的边缘紧靠在所检查的面上按几个方向任意滑动，如果尺的边缘与面不能密合，这个面肯定不是平面；如果能够密合，这个面就肯定是平面无疑了。于是得到一种判定平面的方法：经过面内任意二点的所有的直线如果都在面内，这个面就是平面。（反例：圆柱面）

如果点 A 在直线 l 上，就记作 $A \in l$ ，点 A 在平面 α 上，就记作 $A \in \alpha$ ，这是因为直线 l 和平面 α 都是点的集合，点 A 与直线 l 、平面 α 的从属关系是元素与集合的关系，故用“ $\in$ ”（属于）这个符号。如果直线 l 在平面 α 上，就记为： $l \subset \alpha$ ，这是集合与集合间的关系，且直线 l 是平面 α 的真子集，故用符号“ $\subset$ ”（包含于），不得混淆。

4. 讲公理 2 时应紧紧抓住平面是无限的这个概念来讲。应使学生明确：如果平面 α 和平面 β 有一个公共点 A ，即 $\alpha \cap \beta \in A$ ，

则它们相交于过 A 的直线 l , $\alpha \cap \beta = l$ 。这就保证了两条:(1)平面 α 、 β 只要有了一个公共点 A ,就必然还有其他的公共点;(2)这些公共点全部集中在过 A 的直线 l 上。换言之:两平面若有公共点,则全部的公共点都在它们的交线上。这一点在今后分析问题时很重要。

5. 公理3是点与平面的结合关系,它实际上给出了确定平面的条件。讲解时应该突出“不在同一直线上的三点”这个根本条件。不难验证:经过一点,经过二点或经过一条直线的平面有无穷多个,因而这些条件都不能确定唯一的平面,唯有经过不在同一直线上的三点才能确定一个平面。实际问题中有很多这方面的例子。如:测量仪器、照相机的三脚架在任何地形上都可放稳,把门关好后把插销插上,门就固定了等等,都可帮助学生领会这个公理。

公理3的三个推论,教师最好当堂示范,证明其中一个,另两个可让学生证明。另外,不难证明下述命题:(1)平行四边形 $ABCD$ 若有三个顶点 A 、 B 、 C 在平面 M 上,证明:它的第四个顶点 D 必定也在平面 M 上;(2)如果一个圆周上有三个点在某一平面上,则此圆上各点均在这个平面上。

确定平面的几个条件是研究空间图形性质的重要工具。因为今后许多空间问题往往要转化成平面上的问题来处理。因此应让学生熟练地掌握公理及其推论的应用。

5.3 平面图形的画法

1. 所谓平面图形的画法,教材中指的是用斜二轴测投影法将直立投影面内的平面图形投影到水平投影面内的一种画法。它是后面画简单立体(柱、锥、台等)的直观图的基础。因此,教学中除要求掌握其一般画法外,还应培养学生熟练地迅速地画出正三、四、五、六边形和圆的水平投影图来。

2. 直观图一词的含义教材中未作解释,教师可参阅任何一

本机械制图或建筑制图的课本即可找到有关的参考资料。在这里我们只能简单介绍一下。

所谓直观图是指：将一个立体的轮廓线按照一定的角度投影到一块平面上去，所得的投影图就是这个立体的形象。它既富有立体感，又能表达这个立体的各主要部分的相互位置关系和度量关系，因此这种图形通常就称为直观图，而教材中所说的“画正六边形的直观图”“画圆的直观图”都是指的画出它们水平投影图。

3. 直观图有各种画法（可参阅有关画法几何的书籍）。但比较常用的有两种：第一种叫斜二轴测投影，简称“斜二测”；第二种叫正等轴测投影，简称“正等测”。两者的主要区别有二点：

（1）轴间角不同：在空间我们用三根坐标轴（两两垂直）来表示物体的长、宽、高，即水平轴 OX ，直立轴 OZ ，前后轴 OY 。（图5—1）

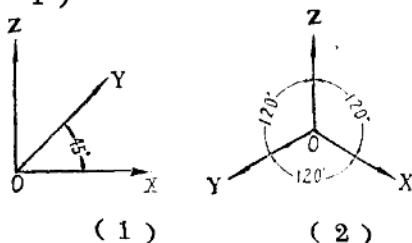


图 5—1

在斜二测（1）中， $\angle XOZ = 90^\circ$ ， $\angle XOY = \angle YOZ = 45^\circ$ 。在正等测（2）中， $\angle XOY = \angle YOZ = \angle ZOZ = 120^\circ$ ，它们都表示在空间里 $OX \perp OY$ ， $OY \perp OZ$ ， $OX \perp OZ$ 而 45° （或 135° ）、 120° （或 60° ）、 90° 即坐标轴投影后的轴间角。（1）和（2）是不同的。

（2）缩短系数不同：在空间将立体的轮廓投射到投影面上

时,某些线段的长度要改变,因而在三条坐标轴上的长度也有所改变。设 P 为空间一点,坐标为 $P(X, Y, Z)$,则在斜二测中,坐标长度之比为: $X:Y:Z=1:\frac{1}{2}:1$ 即平行于 OX 、 OZ 轴的线段画实长,而平行于 OY 轴的线段只能画实长的一半(按比例);而在正等测中则为: $X:Y:Z=1:1:1$,即长、宽、高都按实长(按比例)画出。这就叫做缩短系数不同。

4. 关于两种轴测投影法的用法一般原则如下:画直线形(如多边形)的水平投影时,一般采用斜二测,画多面体的直观图时也以用斜二测为宜;画圆形(包括圆弧、扇形、弓形等)的水平投影时一般采用正等测,画旋转体的直观图时也以用正等测为宜。这是因为圆的轴测投影图在正等测中比斜二测中简便得多的原故。(圆的水平投影在两种轴测投影中都得到椭圆,但在正等测中可用“四心法”近似作图,即本节例3的作法)。但须注意,在空间图形学习中画的图以表达空间元素相互位置关系为主,对度量性的要求不宜过严。

【部分练习、习题提示和答案】

练习 (P_4)

2 已知:三直线 a 、 b 、 c , $a \cap b = C$, $b \cap c = A$, $c \cap a = B$
(图5—2)

求证: a 、 b 、 $c \subset$ 平面 ABC

证明: $\because a \cap b = C$, $b \cap c = A$,
 $c \cap a = B$

故 A , B , C 是不在同一直线上的三点,

$\therefore A$, B , C 确定平面 ABC 。

又 $A \in b$, $C \in b$, $\therefore b \subset$ 平面 ABC 。

同理 $a \subset$ 平面 ABC , $c \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore a$ 、 b 、 $c \subset$ 平面 ABC 。

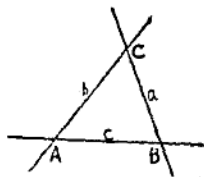


图 5—2

习题一

5 [解] 设 $A \in l$, 则过 A 及直线 l 可确定平面 α , 又设 $B, C, D \in l$, 则 $B \in \text{平面}\alpha$, 同样, $A \in \text{平面}\alpha$, $\therefore$ 直线 $AB \subset \text{平面}\alpha$.

同理, 直线 $AC, AD \subset \text{平面}\alpha$.

故 线段 AB, AC, AD 在平面 α 内

6 答: 不一定. 当这个图形的两条对角线相交时, 便是平面图形 (公理 3 之推论 2), 否则不是的.

7 利用公理 3 的推论 3: “经过两条平行线, 有且只有一个平面.”

二、空间两条直线

5.4 两条直线的位置关系

1. 学生在平面几何中已学过同一平面上两条直线的位置关系，即：相交、平行、重合。到了空间，就会遇到第四种位置关系：异面直线，即不在同一平面上，既不平行也不相交的两条直线。实即空间二直线交错而过。如长江大桥的中心线与长江水面的中心线。

2. 本节的重点和难点都是异面直线的概念。这是由于学生长期以来惯于在一个平面上考虑两条直线的位置关系的原故。从现在起教师应随时提醒和帮助学生处处从空间来考虑问题和处理问题，逐步改变学生只在一个平面内考虑问题的习惯。

在讲异面直线的定义之前，可先复习一下在同一平面内两条不重合的直线的位置关系，进而通过对实物的观察，使学生了解：在空间两直线相错而过的事例是大量存在的。这样的一些直线，既不平行，又不相交，当然不能在同一个平面内。这是在三维空间内的新问题，应当特别加以研究，以便进一步研究空间几何元素的各种性质。讲解时可向学生指出下列各点：

(1) “不在同一平面内的两条直线”是指不能在同一平面内的意思，千万不能理解成为“处在两个平面内的两条直线”，因为两条相交直线或平行线都可处在两个不同的平面内。例如教室内墙角处就有三条交线都过一点，而它们都处在三个不同的平面内。这种反例是很多的。

(2) 画异面直线的直观图时，在一般情形下，应该画出辅助平面作为背景以显示出两直线不共面，如图 5-3。

(3) 证明两条空间的直线是异面直线的办法是：证明它们

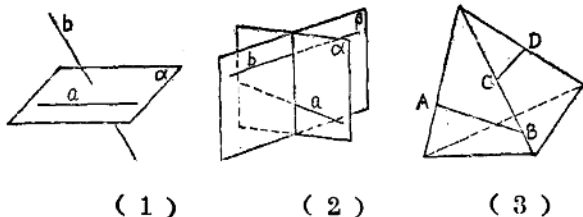


图 5 — 3

不可能在同一平面内或者证明它们不是相交直线同时也不是平行直线（通常用反证法）。这是一个难点，要重视。

例题：设 $A, B, C \in \text{平面}\alpha$ ，且 A, B, C 不在同一直线上，又 $D \notin \text{平面}\alpha$ （图 5—4）。

求证：直线 AD 和 BC 是异面直线。

证明：用反证法。

如果 AD 和 BC 不是异面直线，则 AD 和 BC 平行或相交，于是 A, B, C, D 四点应在同一平面上。

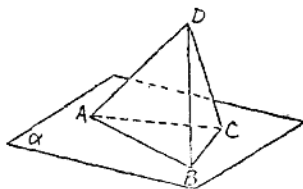


图 5 — 4

已知 A, B, C 不在同一直线上，且它们都在平面 α 上， $\therefore D \notin \text{平面}\alpha$ ，而这样的平面是唯一的。这与已知 $D \notin \text{平面}\alpha$ 相矛盾。

$\therefore$ 直线 AD 和 BC 是异面直线。

5.5 平行直线

1. 两直线平行的性质，在平几中已详细研究过。这是我们研究空间直线平行的基础。

在空间，判定两直线平行，必须抓住两个基本条件：（1）两直线在同一平面内；（2）它们没有公共点。而在平几中，只要条件（2）就行了，这一点必须引起学生重视。

至于两条以上的直线互相平行的情形（例如棱柱体的各侧棱