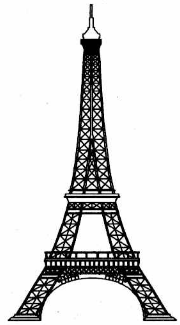
法兰西数学
精品译丛

广义函数论

L. 施瓦兹 著
姚家燕 译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



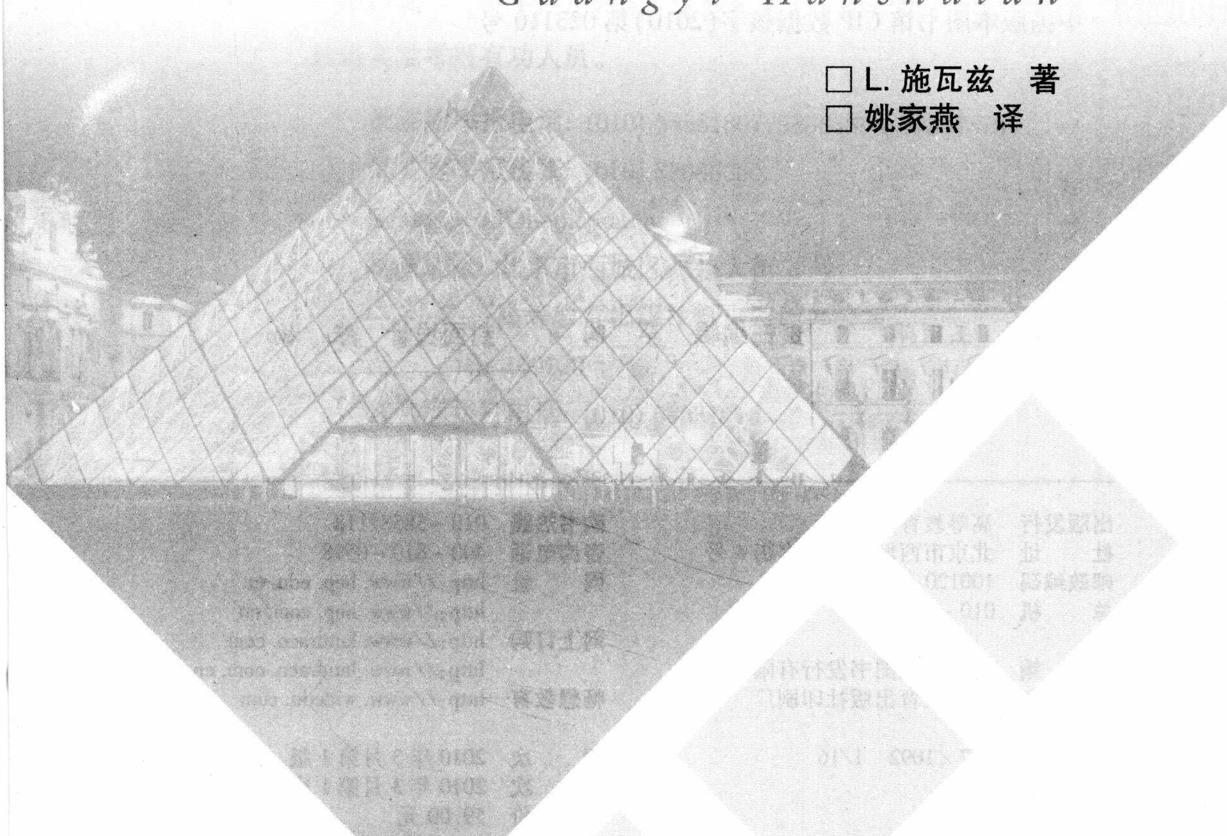
法兰西数学
精品译丛

数学天元基金资助项目

广义函数论

Guangyi Hanshulun

□ L. 施瓦兹 著
□ 姚家燕 译



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字: 01-2008-2671

Laurent Schwartz

Théorie des distributions

图书在版编目(CIP)数据

广义函数论 / (法)施瓦兹著;姚家燕译. —北京:
高等教育出版社,2010.3

(法兰西数学精品译丛/李大潜主编)

ISBN 978-7-04-028417-1

Ⅰ.广… Ⅱ.①施… ②姚… Ⅲ.①广义函数-研
究 Ⅳ.①O177.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 023110 号

策划编辑 王丽萍　　责任编辑 李 陶　　封面设计 张 楠

责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	高等教育出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　本	787×1092 1/16	版　次	2010年3月第1版
印　张	22	印　次	2010年3月第1次印刷
字　数	400 000	定　价	59.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 28417-00

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦兹及利翁斯等等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的薰

陶与感召，而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍，用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议，并取得了部分法国著名数学家的热情支持，高等教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》，将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书，有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助，对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就，进一步提升我国数学（包括纯粹数学与应用数学）的教学与研究工作的水平，将是意义重大并影响深远的，特为之序.

李大潜

2008 年 5 月

译者的话

翻译是苦事, 也是乐事. 揣摩原著者的真实思想不得其解是苦事, 传神地转述书中精髓使读者得以分享数学之美则是乐事.

本书的作者 Laurent Schwartz (洛朗・施瓦兹, 1915 – 2002) 为法国科学院院士, 第二代布尔巴基学派的重要成员, 广义函数 (distribution) 理论的奠基人. 正是由于他在广义函数方面的原创性工作使他于 1950 年获得"菲尔兹奖". Laurent Schwartz 是获得该奖的第一位法国人, 被认为是 20 世纪最伟大的法国数学家之一 ①.

本书是关于广义函数的第一本专著. 全书共分九章, 第一章定义并讨论了广义函数的各种基本性质, 指出局部可积函数和测度均为特殊的广义函数, 尤其阐明了著名的"Dirac 函数 δ"其实是一个测度而不是函数, 从而为 Dirac 测度在量子力学以及其它学科中的广泛应用打下了坚实的数学基础; 第二章研究广义函数的导数, 证明了任意广义函数均无穷可导且有无穷多个原函数; 第三章研究广义函数空间的各种拓扑性质以及广义函数的局部结构, 证明了任意广义函数在局部上均为某一个连续函数的导数; 第四、五、六章分别讨论广义函数之间的张量积、乘法和卷积, 指出任意两个广义函数之间一般无法做乘法; 第七章研究周期广义函数的 Fourier 级数, 引入了缓增广义函数并研究了它们的 Fourier 变换; 第八章讨论广义函数的 Laplace 变换; 第九章研究微分流形上的广义函数 – 微分形式, 也即所谓的"流".

本书系统总结、高度概括了当时与广义函数论有关的许多重要理论和原始思想, 在其法文版第一版出版 59 年后的今天仍有理论价值和参考价值, 尤其适合于数学专业高年级本科生或研究生研读.

① Laurent Schwartz 同时也是法国著名的政治活动家和蝴蝶标本收藏家. 关于他的传奇人生, 有兴趣的读者也可阅读他的自传: Un mathématicien aux prises avec le siècle. Odile Jacob (1997). 该书有英文版: A mathematician grappling with his century. Birkhäuser Basel (2000).

限于当时的排版条件, 原书中有不少打印错误, 我们在翻译过程均不加说明地予以纠正. 我们也给出了不少脚注来帮助读者理解正文的内容. 另外, 我们还借助网络搜索工具检索了原著中的所有参考文献, 尽可能订正了所发现的错误, 并按照现在通用的文献格式进行了重新编排.

在我们翻译本书的各个不同阶段, 法国南巴黎大学的 Alano Ancona 教授和 Jacques Peyrière 教授曾帮助解决许多数学上的困惑, 林莉老师和田庆生教授在语言修饰方面给予了许多指导和帮助, 杨明先生在 Latex 排版方面提供了不少技术支持, 高等教育出版社的李陶老师和胡乃冏老师仔细通读了本书的全文并给出许多有益的建议和修改意见. 在这里对他 (她) 们一并表示最诚挚的谢意! 最后我们还要感谢高等教育出版社的王丽萍老师, 没有她的不懈努力和卓有成效的工作, 本书的中文版可能永远也不会问世!

引 论

1. 五十多年以前, 工程师 Heaviside[1] 在一篇大胆的学术论文中引入了他的符号计算法则, 利用一些没有得到证实的数学计算来求解物理问题. 此后, 这种符号计算或者说是运算演算, 得到了不断发展, 并成为电学家们理论研究的基础. 工程师们系统地使用此方法, 虽然每个人对它都有各自的理解, 但在使用时均或多或少地感到心安理得; 于是上述符号计算方法就成了一种"虽不严格但却很成功的"技巧. 自 Dirac[2] 引入在 $x = 0$ 以外处为零而在 $x = 0$ 处为无穷且使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = +1$$

的著名函数 $\delta(x)$ 后, 符号计算公式就更不为强调严格性的数学家们所接受. 不但声称在 $x < 0$ 时等于 0, 而在 $x \geqslant 0$ 时等于 1 的 Heaviside 函数 $Y(x)$ 的导函数就是其定义本身在数学上就矛盾的 Dirac 函数 $\delta(x)$, 还要谈论这个缺乏实际存在意义的函数的导数 $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, ..., 所有这些都超出了我们的容忍极限. 但怎么解释这些方法所取得的成功呢? 每当这种矛盾现象出现时, 很少不因此产生一种新的、经过修改后就可以用来解释物理学家们的语言的数学理论; 那甚至是数学和物理取得进步的重要源泉. 事实上, 已有许多关于符号计算的解释; 而这主要归功于 Carson 和 van der Pol[3]. 然而, 虽然这些解释在数学上是完全严格的, 但它们并不能够满足物理学家们的要求, 因为它们或者借助于 Laplace 变换, 由此完全改变了问题, 或者排除了函数 δ 及其各阶导数并使得一些已取得不容置疑成功的方法不再有效.

① HEAVISIDE [1].

② DIRAC [1].

③ CARSON [1], VAN DER POL – NIESSEN [1].

2. 我们将函数的概念, 首先是推广到测度, 随后是推广到广义函数. 可知 δ 是一个测度而不是一个函数, 而 δ' 则是一个广义函数而不是一个测度. 此外, 磁位势的理论研究者在很久以前就已开始使用偶极子, 双层等等, 但这都是些比较孤立、其定义还值得怀疑的东西, 与电学家们的符号计算没有什么联系. 我们将在本书的第一章中给出广义函数的一般定义.

3. 接下来需建立与通常微分计算法则以及符号计算法则协调一致的广义函数的计算法则. 首先须引入好的导数定义. 相当奇怪的是, 完全独立于前面的考虑, 上述新定义早已被一点一点地引入到偏微分方程理论中. 我们可将偏微分方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$

的解的一般表达式写成 $U=f(x+y)+g(x-y)$; 但仅当 f 和 g 均两阶可导时, 这样的函数 U 才能满足上述偏微分方程. 在相反的情形, 我们可约定称 U 为上述方程的“广义解”. 许多作者都曾独立地给出了这些广义解的一般定义 (当广义解是一个函数时, 这些定义与我们的定义一致): Leray ① (在其关于偏微分方程的“湍流”解的博士论文中), Hilbert – Courant ②, Bochner ③ (“弱解”) 和本人工作 ④. 须指出的是, 虽然我们如前面所说那样将 U 定义为偏微分方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$

的广义解, 但我们却没有给记号 $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ 赋予一个确切的意义. 同样是关于偏微分方程, 基于类似想法, Soboleff, Friedrichs 和最近的 Kryloff ⑤ 都研究了函数的“广义导数”(该定义同我们的一致, 但仅限于函数的广义导数还是函数这一情形). 我们将在第二章中定义广义函数的求导并研究其性质. 在那里我们将会十分自然地重新得到 Hadamard 先生 ⑥ 同样还是在偏微分方程理论中所引入的“有限部分”: 发散积分的有限部分定义了与位势理论中的多层很不一样的、新的广义函数.

4. 为处理 Fourier 级数与 Fourier 积分理论中依然还是十分困难的收敛性问题, 非常有必要引入重要的数学工具. Fourier 级数引发了求和方法的发展, 但这些方法却并没有带来一个令人满意的解决方案, 因为总是需要区分 Fourier 级数与不是 Fourier 级数的三角级数. 就 Fourier 积分而言, 无论是以直接还是隐晦方式, 广义函数的引入都是不可避免的. Bochner 方法, Carleman 方法 (解析 Fourier 变换),

① LERAY [1], pp. 204 – 209.

② HILBERT – COURANT [1], 第 2 卷, p. 469.

③ BOCHNER [2]; 以及 [3], pp. 158 – 182.

④ SCHWARTZ [5]. 该论文正好发表在广义函数出现之前, 甚至可以说是广义函数的源头.

⑤ SOBOLEFF [1], [2]; FRIEDRICHS [1]; KRYLOFF [1]. 在前面注记中所指出的那些论文当中的某些出现在广义函数之后, 但由于印刷、国际交流、或者是本人工作发表的滞后等方面的原因所产生的时间差, 导致这些论文的作者并不知道广义函数. 也见 SOBOLEFF [4] 中的泛函.

⑥ HADAMARD [1], pp. 184 – 215.

Beurling 方法 (调和 Fourier 变换)[①] 均与我们的十分接近. Bochner 的"广义函数"实际上是被定义成在通常意义下不一定可导的连续函数的导数; 而我们第三章中的定理 21 正是表明, 广义函数在局部上就是连续函数的导数. 我们觉得这样的性质作为定理而得到比作为定义而得到更可取 (因为求导顺序以及涉及的连续函数均不能唯一确定, 尤其在多变量的情形)[②]. 我们将在第七章中讨论广义函数的 Fourier 变换: 就运算 $\mathscr{F}$ 和 $\overline{\mathscr{F}}$ 的连续性与互反性而言, 所得结果不可能更好了.

5. 最后, 广义函数也在一个完全不同的领域中起作用. 在代数拓扑中, 微分流形的同调或者由"奇异链"给出或由微分形式给出, 其中一边是"边缘"运算, 而另外一边则是"外微分"运算. 由此产生的自然想法是将这两类东西进行综合. 正是 de Rham 先生[③] 产生了引入"流"以及一种求导运算的想法, 前者同时包含链和微分形式作为其特殊情形, 而后者则恰好使得对链的求导为边缘运算而对微分形式的求导为外微分运算 (或许会相差一个符号). 流的理论被简化、改进成流形上的广义函数 - 微分形式理论, 后一理论同样也包含了 P. Gillis 的结果[④]. de Rham 在他最近的一本书中讲述了关于 (广义函数 - 微分形式意义下的) 流的一整套理论[⑤]. 我们将在这个新版的第九章中讨论流.

6. 我们所列举的广义函数的祖先和近亲肯定是不完全的 (比如说, 变分计算中所用到的 L. C. Young[⑥] 的广义曲面, Fantappié[⑦] 的解析泛函, Mikusinski[⑧] 的算子, 均源于类似的思想).

我们想通过这些例子来说明广义函数不完全是一个"革命性的创新". 许多读者将在其中发现一些他们所熟悉的思想. 该理论以简单、正确的方式并入了一些应用在各种不同领域中、非常繁杂但时常却是错误的方法; 这是一种综合和简化. 当然这种综合需从头做起. 首先要正确定义广义函数这类新东西, 系统地研究它们使它们能在日常使用中站住脚. 更有甚者. 在我们所给的那些例子中, 广义函数常以隐晦方式出现在针对专家的著作中 (由此导致同样的广义函数在不同理论中使用时, 有时会被同一作者认为是不同的). 我们的广义函数则相反比较初等, 这使得它们可用来作为每个理论开始时的基础. 我们认为, 就教学角度而言, 初学者首先从广义函数的角度来学习偏微分方程, 位势和调和函数, 卷积, Fourier 级数和积分, 会比较有利. 特别是我们讨论这些问题的章节仅需很少的预备知识. 另外我们已出版针对理工类大学三年级学生的教程《物理中的数学方法》(SCHWARTZ [14]), 其中就包含了关于广义函数及其主要性质的一个比较初等的介绍.

① BOCHNER [1], pp. 110 – 140; CARLEMAN [1], pp. 36 – 52; BEURLING [1], pp. 9 – 14.
② H. KÖNIG [1] 和 S. SILVA [1] 重新借助 Bochner 的定义对广义函数作了一个纯代数的介绍.
③ DE RHAM [1], [2].
④ GILLIS [1].
⑤ DE RHAM [3]. 也见 KODAIRA – DE RHAM [1].
⑥ YOUNG [1].
⑦ FANTAPPIÉ [1].
⑧ 特别是 MIKUSINSKI [1], [2].

7. 本著作不是一篇学术论文而是一本书, 一本关于广义函数的专著. 这就解释了其篇幅之长. 就这点而言, 它甚至还不够长; 很多性质都只是作了介绍而没有证明. 特别是许多定理常利用一些非常类似仅需在技术上做些微改动的方法来证明; 此时我们将只证一次, 当然, 如果让读者自己来做那些必要的修改, 我们事实上没有叙述任何未经完全证明的东西. 对于重要的定理, 我们会出证明的所有细节, 而对于那些更为精细和次要的定理, 我们的证明将会比较简练; 因此我们有时会对容易的东西给出详细证明, 而对难的却只是给出证明概要, 这看起来有些矛盾, 但由此却使得表述更加清楚明白, 整体上看起来也更为容易. 同样地, 在叙述定理时, 我们更喜欢那些简单、结果也较弱的陈述而不是那些结论很强 (因此也更难懂) 的定理; 不过我们会在评注或证明过程中给出相关定理更为精细的表述.

须指出的是, 我们对例子中的那些计算并没有作详细解释. 它们当中的某些曾在一些经典著作[①] 里讨论过, 但其余的则是无处可见. 如果我们给出相关细节将会极大地增加本书的篇幅, 而所涉及的困难却都只是技术层面上的.

我们在每章开始的内容提要中指出了该章最重要的结果, 其余的则可在第一次阅读时一览而过, 也就是说它们在使用时仅有参考文献的价值.

节和定理按章编号. 用三元记号来标记公式, 依次表示章, 节及公式的编号.

8. 阅读本书任何理论部分均需相当好的点集拓扑和泛函分析 (拓扑向量空间) 的知识. 从事技术工作的人员可忽略这些问题. 但在此方面仍有一个严重的困难: 这里遇到的向量空间决不会是 Banach 空间, 而是一些有可数邻域基的局部凸完备向量空间 (Fréchet 空间) 或者甚至是一些更为复杂的空间 (Fréchet 空间的正向极限), 以及这些空间的对偶空间.

我们曾经不得不经常应用一些这样的定理, 它们在 Banach 空间里是经典的, 在上述更为一般的空间里依然成立, 但其证明在本书第一版出版时尚未发表. 这个缺陷现已被填补上, 而我们则将始终给出一些非常恰当的参考文献. 事实上, 如今已有大量讨论上述空间的泛函分析方面的书.

9. 就此而言, 有必要在这里明确地指出某些说法的含义. 要想保证完全正确, 必须要在所有收敛性问题中使用 H. Cartan[②] 的滤子. 但为了不加重正文的负担, 我们则采用了比较“朴素的”语言.

我们将会说: “广义函数 T_j 收敛于 0”, 就好像所涉及的是一列序列 T_j (该序列依赖于整数参数 j 且当 $j \to \infty$ 时趋近于 0), 但大家应该将之理解为所讨论的是一个任意的收敛滤子. 相反地, 某些定理仅对序列成立, 此时我们则会说: “若一列广义函数列 T_j 收敛于 0”. 在许多实际的问题中, 序列 (或至少是基有界或可数的滤子) 就足够用了, 而针对一般滤子的定理比针对序列的更难证明; 因此我们有时会对任意滤子来陈述定理的内容但只满足于对序列给出证明.

① 比如说 WATSON [1].

② BOURBAKI [1], 第 1 章第 2, 6 节.

我们曾针对双线性型引入了亚连续[①]的概念 (第三章, 定理 11); 大多数遇到的双线性型都为亚连续但不连续. 很可能在所有的应用中只要有亚连续性就足够了. 这就解释了为什么当也有连续性时, 我们有时在叙述中指出连续性但仅证明更为简单的亚连续性. 另外, Dieudonné – Schwartz 的一篇论文[②]给出了从一个过渡到另外一个的方法 (*若 E, F, G 三个都是 Fréchet 空间或都是自反 Fréchet 空间的对偶空间, 则从 $E \times F$ 到 G 的任意亚连续双线性映射均为连续*).

10. 我们之前关于广义函数的出版物都是一些包含主要结果但不带任何证明的摘要[③]. 在此还可加上 Halperin 的书[④]. 另外, König 和 Sebastião e Silva 的一些论文[⑤]也借助抽象代数的方法给出了广义函数的定义和性质.

我们认为在这里列出仅在其中应用了广义函数的著作并没有什么益处, 不过我们将会指出那些研究广义函数本身的工作.

1° 无穷可微流形上的流, 即广义函数 – 微分形式, 在 de Rham 的一本书[⑥]中得到了详细讨论, 在那里大家还可找到关于微分流形本身, 以及 Riemann 空间上的调和形式的研究; 在这个新版中, 它们构成了第 9 章的内容.

2° 局部紧群上的广义函数曾先后被 Riss 和 Bruhat 所研究[⑦].

3° 广义函数的变量替换曾经被 Cugiani 和 Albertoni, 以及 Scarfiello 所研究[⑧]. 我们将在这个新版的第 9 章第 5 节里讨论这部分内容.

4° 关于广义函数的乘法, 提请大家注意我们的一篇短文[⑨]以及 König 的一篇论文[⑩], 前者证明了广义函数之间一般不能做乘法 (甚至在可能异于广义函数论的任何理论中, 只要假设总可以求导并存在一个元素 δ, 则一定不能做乘法运算), 后者则给出了建立在完全不同想法之上的乘法. 如今看来, 乘法运算的普遍不存在性是量子场论最主要的数学困难之一.

5° 广义函数的 Laplace 变换出现在本书第一版出版之后; 相关论文发表在纪念 Marcel Riesz 的书[⑪]中. 在此我们感谢 Lund 大学非常友好地允许我们将该文再现在这个新版的第 8 章中.

6° 核, 即与算子相关的两个变量的广义函数, 拓扑张量积以及核空间, 都曾被 Grothendieck 和我们自己所研究[⑫].

---

① 我们现在将以前第一版中所谓的“分别连续”改称为“亚连续”.
② DIEUDONNÉ – SCHWARTZ [1], p. 96, 定理 9.
③ SCHWARTZ [1], [2], [3].
④ HALPERIN [1].
⑤ KÖNIG [1], SEBASTIÃO E SILVA [1].
⑥ DE RHAM [3].
⑦ RISS [1]; BRUHAT [1].
⑧ ALBERTONI – CUGIANI [1]; SCARFIELLO [1].
⑨ SCHWARTZ [6].
⑩ KÖNIG [2].
⑪ SCHWARTZ [7′].
⑫ SCHWARTZ [7], [9], [10], [11]; GROTHENDIECK [1], [2].

7° Gel'fand 及其学派的"广义函数"是我们的广义函数的拓广, 它们在偏微分方程中得到了大量应用. 关于它们, 现在已有好几本内容详实的优秀著作 ①, 同时介绍它们以及广义函数的丰富性质.

8° Martineau 的解析泛函 ②, Roumieu 的广义广义函数 ③, 以及 Sato 的超广义函数 ④ 都是广义函数或一些平行理论的各种拓广, 它们均出现在本书第一版之后, 并构成了对我们在前面第 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6° 条中关于先前或当代发展所作介绍的补充. 另外, 许多现代著作也介绍了广义函数, 它们或是为了讨论广义函数本身, 或是为了某些应用的目的 ⑤.

11. 本书第三版的第 2 章至第 7 章与第二版的相同; 但第 8 章与第 9 章是新的.

① Gel'fand, Shilov, Graev, Vilenkin [1].

② Martineau [1].

③ Roumieu [1].

④ Sato [1].

⑤ 除了在本页及前面所有被引用的文献之外, 我们还在下面指出另外的一些, 但我们并不号称囊括了所有的相关文献: Arsac [1]; A. Friedman [1]; B. Friedman [1]; Courant – Hilbert [1]; Edwards [1]; Erdelyi [1], [2]; Garsoux [1]; Hörmander [3]; Liverman [1]; Marinescu [1]; Treves [1]; Yosida [1]. (译者注: A. Friedman [1], B. Friedman [1], Erdelyi [1], [2], Garsoux [1], Liverman [1], Marinescu [1] 并没有被作者列在书后的参考文献中.)

目　录