实用经济数学基础学习指导（修订本）

林宗振　钱志大
李树香　李文献　周冰　编

暨南大学出版社

实用经济数学基础
学 习 指 导
（修订本）

林宗振 钱志大 周 冰编
李树香 李文献

暨南大学出版社
1993 · 广州

粤新登字 13 号

实用经济数学基础
学 习 指 导
（修订本）

林宗振　钱志大
李树香　李文献　周冰编

*

广东省新华书店经销
暨南大学出版社出版
蓝图排版部电脑排版
广东番禺印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米　1/32　印张：7.75　字数：16.8 万
1993 年 9 月第 2 版　1993 年 9 月第 2 次印刷
印数：5001—13000 册
ISBN7－81029－240—4/O・12
定价：5.20 元

内 容 简 介

《学习指导》是《实用经济数学基础》的配套用书。经修订再版，内容包括：①各章书的基本要求，重点、难点的详细讲述；②分析、讲解、纠正学习中容易产生的错误；③适当编入一些有代表性的题目选解，以提高读者的分析能力和解题能力；④编入少量超过原教材要求的内容，以提高学习兴趣，并为有志于进入本科深造的读者提供必要的基础知识；⑤提供了全部习题的答案，便于自学。本书可供教师、学生以及自学《实用经济教学基础》者作参考用书。

前　　言

为了便于自学，配合教材，编写这本《实用经济数学基础学习指导》，同时考虑到学员们继续深造的需要，我们编入少量超过教材的部分内容，如级数、方程的近似解等。

参加本书编写的有李文献（一、二章）、李树香（三、四章）、周冰（五、六章）、钱志大（七、八章）、林宗振（九、十、十一章）等几位教授、副教授。

中山大学卢文教授指导了编写工作。全书由卢文教授和冼其尤副教授审校。暨南大学数学系的领导大力支持本书的编写，特别是冯志刚、林德荫、黎镇銮、甘露如、张春汉、柏元淮等教师对本教材提出了宝贵意见，在此表示感谢。

本书是应教学的需要编写的，加上我们水平有限，缺点和错误在所难免，尚祈专家们和读者加以指正。

编者

一九八九年八月于暨南园

目　　录

第一章　函　数

一、基本要求

通过本章学习，要求读者做到下列几个方面：

1. 对函数概念有一个正确的认识。构成函数有两个要素，即其对应关系和定义域。给出一个函数要同时给出这两个方面。两个函数也只有具有相同的定义域和对应规律才能说他们是相等的。

2. 在牢记几个基本初等函数的性质和图形的基础上，结合复合函数和初等函数的概念，能够计算某些函数的函数值和指出其定义域。

3. 会把几个函数复合成为一个复合函数；对于一个复合函数，能弄清其结构，并能把它分解开来。

二、重点与难点

本章的重点是函数概念，求函数的函数值和定义域，复合函数的分解。

难点是复合函数的分解。

三、例题选解与分析

今后所遇到的函数，主要是初等函数和分段函数。这些函数或者是由基本初等函数经过有限多次四则运算以及复合

而得到的，或者能分成几段，在每一段上，是由基本初等函数经过有限多次四则运算以及复合而得到的。因此，熟悉基本初等函数、弄清函数的结构、分解复合函数是完成本章习题的关键。

1. 函数的复合

例1 分别把下列函数复合成一个复合函数。

(1)$y=1+u^2$， $u=\sin x$

(2)$y=e^{-u}$， $u=1-v^3$， $v=\sin x$.

解 (1) 对于 x 的任何值，$u=\sin x$ 取值在 $[-1, -1]$ 上，这样的 u 值，$y=1+u^2$ 总是有意义的。因此，可以通过复合的方法建立 y 与 x 的函数关系。

将 $u=\sin x$ 代入 $y=1+u^2$，得复合函数

$$y=1+(\sin x)^2=1+\sin^2 x$$

(2) 对于 x 的任何值，$v=\sin x$ 取值在 $[-1, 1]$ 上，这样的 v 值，$u=1-v^3$ 取值在 $[0, 1]$ 上，在这范围内，$y=e^{-u}$ 总是有意义的。因此，把 $v=\sin x$ 代入 $u=1-v^3$ 中，得 $u=1-\sin^3 x$，再把它代入 $y=e^{-u}$ 中，得复合函数

$$y=e^{-(1-\sin^3 x)}=e^{-1+\sin^3 x}.$$

必须指出，并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数，例如，$y=\arcsin u$ 的定义域是 $[-1, 1]$，而 $u=2+x^2$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意值 x，相应的函数值 u 都大于或等于 2，对 $y=\arcsin u$ 都没有意义。因此，它们不能复合成一个复合函数。

2. 复合函数的分解

复合函数的分解，是对一个复合函数引入适当的中间变

量，使得该复合函数是几个简单函数的复合。所谓简单函数是指通常的六类基本初等函数或他们之和、差、积、商所组成的函数。因此，把一个复合函数进行分解的关键在于：弄清函数的结构，即从自变量的每一个值要得到相应的函数值需要经过哪些运算？运算的次序如何？哪些运算已经符合简单函数的要求？哪些运算可以合并起来？从而引入适当的中间变量使复合函数分解开。

例 1 指出函数 $y=e^{e^{x^2}}$ 是由哪些简单函数复合而成的。

我们知道，对于每一个 x 值，首先取 x 的平方运算得 x^2，然后取指数运算得 e^{x^2}，再取指数运算即得 $y=e^{e^{x^2}}$，而且其中每一步运算都符合简单函数要求，所以可令 $v=x^2$，$u=e^v$，$y=e^u$ 使函数分解开。

解 $y=e^{e^{x^2}}$ 可看成由 $y=e^u$，$u=e^v$，$v=x^2$ 所复合而成的。

例 2 指出函数 $y=e^{e^{-x^2}}$ 是由哪些简单函数复合而成的。

对于函数 $y=e^{e^{-x^2}}$，它的运算情况是：

$$x \to x^2 \to -x^2 \to e^{-x^2} \to e^{e^{-x^2}} = y.$$

检查每一步运算，发现从 $x \to x^2 \to -x^2$ 可以归并为 $x \to -x^2$，仍符合简单函数的要求，从而就中只用一个中间变量就可以了。

解 $y=e^{e^{-x^2}}$ 是由 $y=e^u$，$u=e^v$，$v=-x^2$ 复合而成的。

例 3 指出函数 $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ 是由哪些简单函数复合而成的。

解 $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ 是由 $y=\operatorname{arc\,tg} u$，$u=v^{\frac{1}{2}}$，

$v=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$复合而成的。

注意 $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ 是基本初等函数间的四则运算，故 $v=\frac{\sin x}{1-\text{xin}x}$是简单函数。

例 4 指出 $y=-\cos^2(e^{3x})$是由哪些简单函数复合而成的。

解 $y=-\cos^2(e^{3x})$是由 $y=-u^2$，$u=\cos v$，$v=e^w$，$w=3x$复合而成的。

3. 函数的定义域

决定函数的定义域，一定要注意到：

(1) 只有非负数才能进行开偶次方根运算；

(2) 分母不能为零；

(3) 零和负数没有对数；

(4) 其他初等函数的定义域；

(5) 对于复合函数，分解以后，每个简单函数的定义域和值域，以及每相连接的两个简单函数中，前面函数的值域与下一个函数的定义域的公共部分。

例 试指出下列函数的定义域

(1) $y=\frac{1}{1+x^2}$；

(2) $y=\frac{x-4}{x+4}$；

(3) $y=\lg(x-2)$；

(4) $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$；

(5) $y=\lg[\lg(\lg x)]+\sqrt{15-x}$。

解 (1) 因为对任何的 $x\in(-\infty,+\infty)$，$1+x^2\neq 0$，所以函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

(2) 要使函数 $y=\dfrac{x-4}{x+4}$ 有意义，必须 $x+4\neq 0$，即

$$x\neq -4$$

所以，函数 $y=\dfrac{x-4}{x+4}$ 的定义域为

$(-\infty,-4)\cup(-4,+\infty)$。

(3) 要使函数 $y=\lg(x-2)$ 有意义，必须 $x-2>0$，即

$$x>2$$

所以，函数 $y=\lg(x-2)$ 的定义域为$(2,+\infty)$

(4) 要使函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$ 有意义，必需

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ x-3>0,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x+1\leqslant 0,\\ x-3<0.\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}x\geqslant -1,\\ x>3.\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x\leqslant -1,\\ x<3.\end{cases}$$

故定义域为$(-\infty,-1]\cup(3,+\infty)$

(5) 要使函数 $y=\lg[\lg(\lg x)]+\sqrt{15-x}$ 有意义，必需

$$\begin{cases}\lg(\lg x)>0, \\ 15-x\geqslant 0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\lg x>1, \\ x\leqslant 15,\end{cases}$$

也就是

$$\begin{cases}x>10, \\ x\leqslant 15,\end{cases}$$

所以，函数 $y=\lg[\lg(\lg x)]+\sqrt{15-x}$ 的定义域为$(10,15]$。

4. 函数值的计算

分段函数在不同的区间用不同的式子分段表示自变量与因变量之间的函数关系，在求这种函数在某点的函数值时，必须注意该点所在范围。

例 1 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 1, \\ 2, & 0\leqslant x<1, \\ x+2, & x<0,\end{cases}$$

求函数值 $f(3),f(1),f(0),f(0.5),f(-1)$.

解 $f(3)=2\cdot 3-1=5$,

$f(1)=2\cdot 1-1=1$,

$f(0)=2$,

$$f(0.5)=2,$$
$$f(-1)=-1+2=1.$$

例 2 已知

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 2, & x<0,\end{cases} \quad \text{和 } g(x)=\begin{cases}2x+1, & x>1,\\ x-1, & x\leqslant 1,\end{cases}$$

求 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)-g(x)$.

解 由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是分段函数，且分段不同，它们之间的代数运算需要分别在区间 $(-\infty,0)$、$[0,1]$ 和 $(1,+\infty)$ 三个区间内进行。因此，

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}x^2+2x+1, & x>1,\\ x^2+x-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & x<0.\end{cases}$$

$$f(x)-g(x)=\begin{cases}x^2-2x-1, & x>1,\\ x^2-x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -x+3, & x<0.\end{cases}$$

5. 建立函数关系

例 1 某工厂生产某种产品，日产量最多为 150 吨，固定成本为 130 元，每多生产一吨，成本增加 5 元. 求每日产品的总成本 C(元)关于日产量 x(吨)的函数关系。

解 由假定，日产量为 x 吨时，每日产品的总成本是固定成本与变动成本之和，其中

固定成本 $=130$(元)，

变动成本 $=5x$(元)。

所以，总成本

$$C=130+5x\text{(元)}。$$

定义域为[0,150]

例 2　某工厂生产某型号汽车，年产量为 a 部，分若干批进行生产，每批生产准备费为 b 元；设产品均匀投放市场，即年平均库存量为批量的一半；又设每年每部汽车的库存费为 C 元。试求出一年中库存费与生产准备费之和与批量之间的函数关系。

解　设批量为 x(部)，生产准备费与库存费之和为 y。

由假定，批量为 x 时，批数为$\frac{a}{x}$，从而生产准备费为

$b \cdot \frac{a}{x}$.

因均匀投放市场，每年平均库存量为$\frac{x}{2}$，故库存费为

$C \cdot \frac{x}{2}$.

所以，它们之间的函数关系为

$$y = \frac{ab}{x} + \frac{C}{2}x\,(\text{元}),$$

定义域为$(0,a]$。

例 3　制作一个容积为 V 立方米的无盖圆柱形蓄水池，已知池底每平方米的造价为 a 元，而周围每平方米的造价为$\frac{a}{2}$元，试建立蓄水池的总造价与底面半径的函数关系。

解　设底面圆半径为 r（米），水池的高为 h（米），总造价为 y（元）。

由假定，得 $h = \frac{V}{\pi r^2}$，

底面的造价为 $\pi r^2 \cdot a$，

周围的造价为$(2\pi rh)\cdot\frac{a}{2}=\frac{Va}{r}$,

所以，造价

$$y=a\pi r^2+\frac{Va}{r}\quad(\text{元})$$

定义域为$(0,+\infty)$.

第二章 极限与连续

一、基本要求

1. 函数的极限，本质上是指在考察的过程中，函数无限逼近于某个确定的常数。因此，谈到一个函数的极限时，必须指出所考察的过程，以及在这过程中，函数无限逼近的常数。从而，理解函数极限的概念，必须从这两方面着手，然后，进一步弄清楚什么叫做无限逼近某个常数，由此体会到引出该定义的精确描述的意义。

2. 在理解和牢记极限的运算法则的基础上，掌握一些必要的求极限的方法。

3. 正确理解函数的连续性概念，明确初等函数在定义域上是连续的这一结论的意义。

二、重点与难点

本章的重点和难点是函数的极限概念，极限的运算法则和求极限的方法。

三、例题选解与分析

1. 用定义证明函数的极限

例 1 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$，此处 C 为一个常数。

证 $f(x)=C$，$A=C$ 对于任意指定的正数 ε，恒有正数 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总能使不等式

$$|f(x)-A|=|C-C|=0<\varepsilon$$

成立，即

$$\lim_{x\to x_0}C=C.$$

例 2 证明

$$\lim_{x\to 1}(2x-1)=1$$

证明 $f(x)=2x-1$，$A=1$，因为 $|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|$，为了使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，只要

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

如取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，对于适合不等式

$$0<|x-1|<\delta$$

的 x，不等式

$$|f(x)-A|=2|x-1|<\varepsilon$$

恒成立，即

$$\lim_{x\to 1}(2x-1)=1.$$

例 3 证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$