大学高等数学类规划教材

丛书主编　王立冬

线性代数

LINEAR ALGEBRA

主　编　张　友　王立冬

副主编　齐淑华　袁学刚

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

大学高等数学类规划教材

丛书主编　王立冬

线性代数

LINEAR ALGEBRA

主　编　张　友　王立冬

副主编　齐淑华　袁学刚

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张友,王立冬主编.—大连:大连理工大学出版社,2010.2
ISBN 978-7-5611-5371-0

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张…②王… Ⅲ.①线性代数 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 019532 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
电话:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:170mm×240mm　　印张:14.5　　字数:230 千字
2010 年 2 月第 1 版　　2010 年 2 月第 1 次印刷

责任编辑:王　伟　　责任校对:骁　杰
封面设计:宋　蕾

ISBN 978-7-5611-5371-0　　定　价:25.00 元

"大学高等数学类规划教材"题词

高等数学诸分支知识及技巧，是通往现代科技诸领域的钥匙和通用语言。

徐利治

2009年8月于大连

序

21世纪已出现了高等教育向大众化教育转化的趋势.我国高等教育也开始呈现出了多层次与多样性的特点.这些特点正是反映了现代科技与文化教育发展形势的客观要求.

上述发展形势的启示下,具有多科性的大连民族学院的数学教师们,近年来一直致力于数学教材的建设,已相继编写出高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门基础课讲义,这三门课曾分别被评选为省级精品课与校级精品课.

在上述讲义的基础上,进行改进和修订后产生的这套"大学高等数学类规划教材"丛书,可以作为普通高校理工科与经济及管理学科各专业的通用教材或教学参考书.

这套教材并不以"英才教育"为特殊目标,其根本旨趣是要力求反映高校大众化数学教育的基本要求,并希望教材中能渗透人文素质教育的精神.因此简要说来,这套教材希冀和呈现的主要特点,约有下列三点.

一、尽可能从实践经验与直观背景出发,提出数学问题,以便于学生了解数学知识的源流与背景.

二、教材内容的安排与表述方式上,力求深入浅出、易教易学、简明实用.注重讲清基本概念,适度淡化理论证明,并适当反映数学所蕴含的素质教育与美育教育.

三、例习题的选取与安排力求体现理论联系实践的原则,多数例题选自实践、应用与生活.

凡是具有生命力的教材，总是处于不断适应客观要求和不断更新改进的过程中，这套教材丛书自然也不例外. 我为本书作序，诚挚希望本教程使用者与读者的任何指正或改进建议，将能直接函告丛书主编或教材编著者为幸.

徐利治

2009年8月于大连

前 言

线性代数是理工类和经管类学科各专业的一门重要的基础课，在自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域有着广泛的应用.

线性代数课程的特点是：

第一，概念抽象.例如，行列式的定义、矩阵乘法的定义、矩阵的初等变换规则，尤其是线性相关及线性无关的定义等；刚开始学习时，学生的主要困难集中在对一些概念的接受和理解.

第二，概念、结论、运算比较多，而且很多的概念、结论、运算联系紧密.例如，一个方阵满秩与该方阵所对应的行列式值不为零、列向量组线性无关、齐次线性方程组只有零解都是等价的.

大部分教材一般按逻辑顺序——定义、公理、引理、定理、推论来编写，但在实际教学中，往往使学生抓不住知识的主干，“只见树木，不见森林”，不知开始学习的知识如何应用，只是被动地一步一步跟着走.

根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求，针对线性代数课程的特点和学生在学习中遇到的问题，编者在自编讲义的基础上，结合多年来从事线性代数课程教学的体会编写了本书.本书在编写过程中，借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理方法，内容上突出精选够用，表达上力求通俗易懂，并具有以下特色：

(1)以线性方程组为主线，把行列式、矩阵和向量作为研究线性方程组的一种工具.有利于学生理解线性代数的基本概念和基本原理，把抽象变具体、变简单.使学生对线性代数有整体的把握，

目标明确.

(2)将初等变换作为贯穿全书的计算工具,强调它是矩阵的同秩变换,是向量组的同线性关系变换,是线性方程组的同解变换.可以把各个章节的知识非常紧密地联系在一起,使线性代数中比较多的概念、结论、运算变得易教易学.

(3)在教材内容和习题的处理上充分考虑到易教易学,实用简明.做到深入浅出,通俗易懂,讲清基本概念,淡化理论证明.

(4)在每一节都安排思考题的基础上,还为每章配备了作业题和补充题.作业题是学生必做的题目.补充题是为考研的同学和对线性代数有更高要求的同学而设计的.

(5)在重点的数学概念后附英文.这样可以扩大学生的专业词汇量,提高学生学习专业英语的能力.

本书可作为高等学校理工类和经管类学科各专业的教材或教学参考书,适合 32～48 学时课程教材使用.

本教材由大连民族学院理学院组织编写,主编张友、王立冬,副主编齐淑华、袁学刚.参加编写的还有刘满、铁军、周文书、王书臣、梁学忠、楚振艳、董丽、谢丛波、周庆健、刘强、刘恒等.

由于编者的水平有限,错误和不妥之处在所难免,希望大家在使用的过程中多提宝贵意见.

编　者

2010 年 1 月

目 录

第 1 章 行列式

在中学我们学过用消元法求解未知数个数较少的线性方程组. 本章我们利用 n 阶行列式求解具有 n 个未知数, 由 n 个方程构成的线性方程组. 行列式是人们在解线性方程组的过程中根据需要建立起来的, 是线性代数中的重要概念之一, 也是研究线性代数的一个重要工具, 它在数学的许多分支和工程技术中有着广泛的应用.

行列式是一个数, 它是由一些数字按一定方式排成的方阵所确定的. 这个思想分别早在 1683 年和 1693 年就由日本数学家关孝和德国数学家莱布尼茨提出. 在 1750 年, 瑞士数学家克莱姆出版的《线性代数分析导言》一书中给出了行列式的定义, 并给出了利用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组, 即克莱姆法则.

本章内容提要

1. 行列式的定义、基本性质及其计算方法;

2. 利用行列式求解 n 元线性方程组, 即克莱姆法则.

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶、三阶行列式的定义

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1) 有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为了进一步讨论方程组(1.1) 的解与未知量的系数和常数项之间的关系，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

并称之为**二阶行列式**(second-order determinant)，它表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a}_{11} & \overset{-}{a}_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

等于主对角线两个元素乘积与次对角线两个元素乘积之差. 其中横排的叫做行，纵排的叫做列，$a_{ij}(i,j = 1,2)$ 称为行列式的元素，i 为行标，j 为列标.

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则方程组(1.1) 的解用二阶行列式可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D} (D \neq 0)$$

【例 1】 解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases}$.

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \times (-2) - 3 \times (-3) = -7$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 8 \times 1 = -14$$

因为 $D = -7 \neq 0$，所以，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-7} = 1,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$$

■

类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.2}$$

在一定条件下，通过消元法求出它的解也可以由相应的三阶行列式简化表示.

我们称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

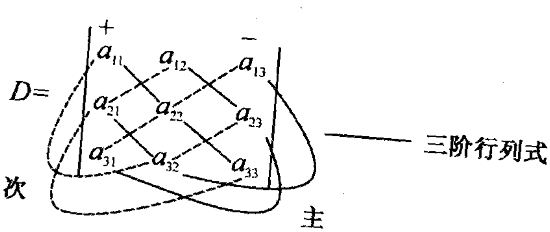
为**三阶行列式**(third-order determinant)，它由三行三列共 $3^2 = 9$ 个元素组成，表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.3}$$

可以借助下面图形来理解：主对角线上 3 个数相乘取正，次对角线上 3 个数相乘取负.



若记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

用消元法容易验证，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.2)的唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}$$

【例 2】 计算$\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-2\\0&3&1\end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-2\\0&3&1\end{vmatrix}=1\times1\times1+(-1)\times2\times3+0\times(-2)\times0-$

$(-1)\times1\times0-1\times(-2)\times3-0\times2\times1$

$=1$ ■

【例 3】 解线性方程组$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0\\3x_1+2x_2-5x_3=1.\\x_1+3x_2-2x_3=4\end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&-5\\1&3&-2\end{vmatrix}=28$, $D_1=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&2&-5\\4&3&-2\end{vmatrix}=13$

$D_2=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&-5\\1&4&-2\end{vmatrix}=47$, $D_3=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&2&1\\1&3&4\end{vmatrix}=21$

因为 $D=28\neq 0$，所以方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28},x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$$ ■

1.1.2 n 阶行列式的定义

引入二阶、三阶行列式的概念之后，二元、三元线性方程组的解可以很方便地由二阶、三阶行列式表示出来. 对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1.4}$$

在一定条件下，它的解是否有类似的结论？回答是肯定的. 为此，我们引入 n 阶行列式的定义. 根据前面的讨论，我们暂且把记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

称为 n **阶行列式**(n-order determinant)，记作 $\det(a_{ij})$. 它是由 n 行 n 列 n^2 个元素构成. 在明确式(1.5) 的具体含义之前，我们先给出 n 阶行列式中元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的余子式、代数余子式的概念.

定义 1 在 n 阶行列式(1.5) 中，划去元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 所在的第 i 行和第 j 列后，剩下的元素按原来的顺序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**(cofactor)，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的**代数余子式**(algebraic cofactor).

例如,三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 第一行元素 a_{11},a_{12},a_{13} 的代数余子式分别为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

利用以上结果可将式(1.3)化为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \tag{1.6}$$

表明三阶行列式的值等于它的第一行元素 a_{11},a_{12},a_{13} 与所对应的代数余子式 A_{11},A_{12},A_{13}乘积之和.这种用低阶行列式表示高一阶行列式的方法具有一般性.按照这样的思想方法,我们给出 n 阶行列式(1.5)的递归定义.

定义 2 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

其中 $A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}$ 为第一行的元素 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$ 的代数余子式.

注 (1) 上式也称为 n 阶行列式按第一行的展开式.

(2) 行列式的递归定义表明,n 阶行列式可以由 n 个 $n-1$ 阶行列式表示,而每一个 $n-1$ 阶行列式又可由 $n-1$ 个 $n-2$ 阶行列式来表示,…….如此进行下去,可将 n 阶行列式用$(n-1)$,…,3,2 阶行列式表示,最后表示成 $n!$项的代数和.

(3) 由行列式定义知,如果行列式中第一行元素除 a_{1j} 外都为零,则行列式等