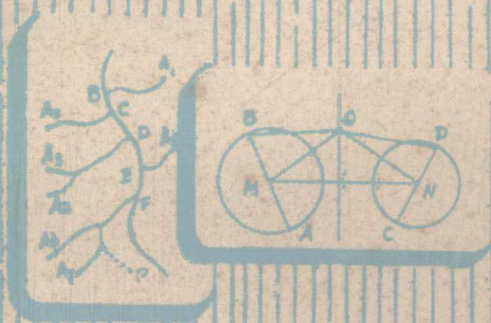


$$\frac{aR^2+bR+c}{dR^2+eR+f} < R - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

中学数学综合题

1000 例



武汉市中小学教材编写组
武汉市教师进修学院 合 编
武汉市洪山区教育局教研室

中学数学 综合题一千例

下 册

武汉市中小学教材编写组
武汉市教师进修学院 合编
武汉市洪山区教育局教研室

目 录

三角部分 (第681—865题)	(1)
解析几何部分 (第866—965题)	(173)
一般部分 (第966—1030题)	(291)

三角部分

681. 若 $x-y$ 为实数, 且 $\sec^2 \theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$, 则 $x=y$,

证: $\because \sec^2 \theta = \frac{4xy}{(x+y)^2} \geq 1$, 则 $4xy \geq (x+y)^2$,

即 $(x-y)^2 \leq 0$.

但已知 $(x-y)^2 \geq 0$. $\therefore$ 只有取等号上式才能成立, 即

$$\frac{4xy}{(x+y)^2} = 1.$$

解之得 $x=y$.

682. 已知 $3x^2 - ax + 1 = 0$ 的两个根是 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$, α 是锐角, 求 a 的值及这两个根.

解: 根据判别式 $a^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 \geq 0$,

得 $a \geq \sqrt{12}$ 或 $a \leq -\sqrt{12}$ (1)

根据韦达定理

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{a}{3} \quad (2)$$

$$\cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{3} \quad (3)$$

$(2)^2 - 2(3)$ 得 $a = \pm \sqrt{15}$.

由 (1) 可知 $a = \pm \sqrt{15}$ 是合条件的, 因 α 是锐角,

把 $a = \sqrt{15}$ 代入原方程或 (2)、(3) 两式得

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}, \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6}, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6}, \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}. \end{cases}$$

683. 求 $x^2 - 2x \sin \frac{\pi x}{2} + 1 = 0$ 的所有实根.

解: 设 x 为实数, 则所给二次方程之判别式应大于或等于零: $(2 \sin \frac{\pi x}{2})^2 - 4 \geq 0$, 即 $(\sin \frac{\pi x}{2})^2 \geq 1$.

因 x 为实数, 故 $(\sin \frac{\pi x}{2})^2 \leq 1$.

比较以上两式, 即知 $(\sin \frac{\pi x}{2})^2 = 1$.

从而 $\sin \frac{\pi x}{2} = \pm 1$.

故 $x = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$.

代入原式, 只有 $x = \pm 1$ 满足, 所以实根为 $x = \pm 1$.

又解: 所给方程可写为

$$(x - \sin \frac{\pi x}{2})^2 + 1 - \sin^2 \frac{\pi x}{2} = 0.$$

$$\text{即 } (x - \sin \frac{\pi x}{2})^2 + \cos^2 \frac{\pi x}{2} = 0.$$

要上式成立, 必须 $x - \sin \frac{\pi x}{2} = 0$ 及 $\cos \frac{\pi x}{2} = 0$.

由 $x - \sin \frac{\pi x}{2} = 0$, 得 $x = 0, x = -1, x = 1$.

由 $\cos \frac{\pi x}{2} = 0$, 得 $x = 2k - 1, k$ 为整数.

于是 $x = -1, x = 1$ 时, 上二式同时成立. 所以原方程的实解为 $x = -1$ 或 $x = 1$.

684. 实数 q 在什么范围内, 方程 $\cos 2x + \sin x = q$ 有实数解?

解: 原方程变形: $1 - 2\sin^2 x + \sin x = q, 2\sin^2 x - \sin x - (q+1) = 0$. 要使 x 取实数值, 必须满足判别式 $\Delta \geq 0, |\sin x| \leq 1$.

在 $\Delta = (-1)^2 + 8(q+1) = 8q+9 \geq 0$ 的条件下

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{8q+9}}{4}.$$

q 的范围应由 $\begin{cases} 8q+9 \geq 0, \dots\dots\dots(1) \\ -1 \leq \frac{1 \pm \sqrt{8q+9}}{4} \leq 1 \dots(2) \end{cases}$ 决定.

由(1) $q \geq -\frac{9}{8}$; 由(2) $-5 \leq \pm \sqrt{8q+9} \leq 3$.

而 $\sqrt{8q+9} \geq -5$ 与 $-\sqrt{8q+9} \leq 3$ 显然成立,

故只需 $\sqrt{8q+9} \leq 3$; 或 $-\sqrt{8q+9} \geq -5$,

即 $\sqrt{8q+9} \leq 5$.

故得 $q \leq 0, q \leq 2$.

故 q 范围为 $-\frac{9}{8} \leq q \leq 2$. 当 $-\frac{9}{8} \leq q \leq 0$ 时,

$\sin x$ 可取两组: $\frac{1 \pm \sqrt{8q+9}}{4}$, 当 $0 \leq q \leq 2$ 时, $\sin x$

仅取 $\frac{1-\sqrt{8g+9}}{4}$ 由

685. 求证 $\frac{\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{ctg} x}$ 之值决不在 3 与 $\frac{1}{3}$ 之间.

$$\begin{aligned}\text{证: } \frac{\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{ctg} x} &= \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot \left(\frac{\operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} x} \right) \\ &= \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \left(\frac{\frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x} \cdot \operatorname{ctg} x - 1}{\frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x} + \operatorname{ctg} x} \right) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1 - 2}{\operatorname{ctg}^2 x - 1 + 2\operatorname{ctg}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 3}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}.\end{aligned}$$

令 $y = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 3}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}$, 则 $(3y-1)\operatorname{ctg}^2 x - (y-3) = 0$.

因 $\operatorname{ctg} x$ 为实数, 则 $\Delta = 4(3y-1)(y-3) \geq 0$.

即 $y \geq 3$ 或 $y \leq \frac{1}{3}$.

686. 当 $a > b > 0$ 时, 求证 $\frac{a \sin x + b}{a \sin x - b}$ 不能介于 $\frac{a-b}{a+b}$

和 $\frac{a+b}{a-b}$ 之间.

证: 设 $y = \frac{a \sin x + b}{a \sin x - b}$, 则 $\sin x = \frac{b(1+y)}{a(1-y)}$.

但 $-1 \leq \sin x \leq 1$, 即 $-1 \leq \frac{b(1+y)}{a(1-y)} \leq 1$,

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{b(1+y)}{a(1-y)} \leq 1 & (1) \\ \frac{b(1+y)}{a(1-y)} \geq -1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ 的解为 } y > 1 \text{ 或 } y \leq \frac{a-b}{a+b},$$

$$(2) \text{ 的解为 } y \geq \frac{a+b}{a-b} \text{ 或 } y < 1.$$

$$\text{又 } a > b, \quad \frac{a+b}{a-b} > 1, \quad \frac{a-b}{a+b} < 1.$$

$$\text{于是 } -1 \leq \frac{b(1+y)}{a(1-y)} \leq 1 \text{ 的解为 } y \geq \frac{a+b}{a-b} \text{ 或 } y \leq$$

$$\frac{a-b}{a+b}.$$

$$\text{故 } \frac{a \sin x + b}{a \sin x - b} \text{ 不能介于 } \frac{a-b}{a+b} \text{ 和 } \frac{a+b}{a-b} \text{ 之间.}$$

$$687. \text{ 求函数 } y = \frac{\sec^2 x - \operatorname{tg} x}{\sec^2 x + \operatorname{tg} x} \text{ 的最小值和最大值.}$$

$$\text{解: 由 } y = \frac{\sec^2 x - \operatorname{tg} x}{\sec^2 x + \operatorname{tg} x}, \text{ 得}$$

$$y[(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \operatorname{tg} x] = (1 + \operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{tg} x.$$

$$(y-1)\operatorname{tg}^2 x + (y+1)\operatorname{tg} x + (y-1) = 0.$$

$$\because \operatorname{tg} x \text{ 为实数, } \therefore (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0.$$

$$[(y+1) + 2(y-1)][(y+1) - 2(y-1)] \geq 0,$$

$$(3y-1)(3-y) \geq 0, (3y-1)(y-3) \leq 0, \text{ 即 } \frac{1}{3} \leq y \leq 3.$$

故函数的最小值为 $\frac{1}{3}$, 最大值为 3.

688. 设 $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y$ ($0 \leq y \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), 试求

$u = x - y$ 之最大值.

解: $\because 0 \leq y \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg} y > 0$.

$$\begin{aligned} \text{于是 } \operatorname{tg} u = \operatorname{tg}(x - y) &= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} y}{1 + 3 \operatorname{tg}^2 y} = \frac{2}{\frac{1}{\operatorname{tg} y} + 3 \operatorname{tg} y} \leq \frac{2}{2 \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg} y} \cdot 3 \operatorname{tg} y}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

此时 $\frac{1}{\operatorname{tg} y} = 3 \operatorname{tg} y$. 即 $y = \frac{\pi}{6}$ 时, $\operatorname{tg} u$ 有极大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $0 \leq y \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 所以这时 $u = \frac{\pi}{6}$,

故 $u = x - y$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

689. 设 x 为实数, 求证:

$$y = \frac{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}{x^2 - 2x \cos \beta + 1}$$

之值在

$$\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} \text{ 与 } \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} \text{ 之间.}$$

证: $\because x$ 为实数,

而 $(1-y)x^2 - 2(\cos\alpha - y\cos\beta)x + (1-y) = 0$,

则 $\Delta = 4[(\cos\alpha - y\cos\beta)^2 - (1-y)^2] \geq 0$.

即 $-(1 - \cos^2\beta)y^2 + 2(1 - \cos\alpha \cos\beta)y - (1 - \cos^2\alpha) \geq 0$.

即 $\sin^2\beta y^2 - 2(1 - \cos\alpha \cos\beta)y + \sin^2\alpha \leq 0$.

这里 y^2 的系数 $\sin^2\beta > 0$, 又这二次三项式之二根为

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2\sin^2\beta} \left[2(1 - \cos\alpha \cos\beta) \pm \sqrt{4(1 - \cos\alpha \cos\beta)^2 - 4\sin^2\alpha \sin^2\beta} \right] \\ &= \frac{1}{\sin^2\beta} \left[1 - \cos\alpha \cos\beta \pm 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\sin^2\beta} \left[1 - \cos\alpha \cos\beta \pm (\cos\beta - \cos\alpha) \right], \end{aligned}$$

$$\text{即 } y_1 = \frac{1}{\sin^2\beta} (1 + \cos\beta)(1 - \cos\alpha) = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}},$$

$$y_2 = \frac{1}{\sin^2\beta} (1 - \cos\beta)(1 + \cos\alpha) = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

$\therefore y$ 之值在 y_1 与 y_2 之间.

690. 求证: 不论 θ 之值为何, 函数

$$y = a\sin^2\theta + b\sin\theta \cos\theta + c\cos^2\theta$$

之值恒在以下二式之间:

$$\frac{a+c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + (a-c)^2} \leq y \leq \frac{a+c}{2}$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + (a-c)^2}.$$

证: $\because a\sin^2\theta - y\sin^2\theta + b\sin\theta \cos\theta + (c-y)\cos^2\theta$

$$= 0.$$

则 $(a-y)\operatorname{tg}^2\theta + b\operatorname{tg}\theta + (c-y) = 0.$

$\because \operatorname{tg}\theta$ 为实数, 则判别式

$$b^2 - 4(a-y)(c-y) \geq 0.$$

即 $4y^2 - 4(a+c)y + (4ac - b^2) \leq 0.$

这里, 二次项系数 $4 > 0$, 而其二根为

$$y = \frac{4(a+c) \pm \sqrt{16(a+c)^2 - 16(4ac - b^2)}}{8}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(a+c) \pm \sqrt{b^2 + (a-c)^2} \right],$$

$\therefore$ 不等式之解为

$$\frac{1}{2} \left[(a+c) - \sqrt{b^2 + (a-c)^2} \right] \leq y \leq \frac{1}{2} \left[(a+c) + \sqrt{b^2 + (a-c)^2} \right].$$

691. a 取什么值时, 函数

$$y = \sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x} + a \sin x \cos x$$

的自变量 x 的定义域是一切实数?

解: $\sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cos x$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x)$$

$$+ a \sin x \cos x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x + a \sin x \cos x$$

$$= -3\sin^2 x \cos^2 x + a \sin x \cos x + 1.$$

设 $t = \sin x \cos x$, 则上式化为

$$f(t) = -3t^2 + at + 1.$$

$$\because t = \frac{1}{2} \sin 2x, \text{ 而 } |\sin 2x| \leq 1,$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

所以, 只需确定 a 值, 使在 $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$-3t^2 + at + 1 \geq 0.$$

上述不等式当 t 在区间 $\left[\frac{a - \sqrt{a^2 + 12}}{6}, \frac{a + \sqrt{a^2 + 12}}{6} \right]$

上恒成立, 为此, 需有

$$\begin{cases} \frac{a + \sqrt{a^2 + 12}}{6} \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{a - \sqrt{a^2 + 12}}{6} \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{解之, 得 } -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

所以, a 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ 内, 函数中的自变量 x 可取任一实数值.

692. 求 $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$ 的极大值.

$$\text{解: } \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2 \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right)$$

$$= 2(\sin 30^\circ \cos \theta + \cos 30^\circ \sin \theta)$$

$$= 2\sin(\theta + 30^\circ).$$

$$\therefore -1 \leq \sin(\theta + 30^\circ) \leq 1,$$

$$\therefore -2 \leq 2\sin(\theta + 30^\circ) \leq 2.$$

故 $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ 的极大值为 2.

693. 试求 $3 - 2\cos\theta + \cos^2\theta$ 的极小值.

解: 原式是关于 $\cos\theta$ 的二次函数, 即

$$y = \cos^2\theta - 2\cos\theta + 3.$$

$$\therefore a = 1, b = -2, c = 3.$$

$$\therefore \text{当 } \cos\theta = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \text{ 时, 函数 } y \text{ 有极小值.}$$

$$y_{\text{极小值}} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{12 - 4}{4} = 2.$$

即 $3 - 2\cos\theta + \cos^2\theta$ 的极小值是 2.

694. 证明: 对于任意角度 θ , 都有 $5 + 8\cos\theta + 4\cos 2\theta + \cos 3\theta \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{证: } 5 + 8\cos\theta + 4\cos 2\theta + \cos 3\theta &= 5 + 8\cos\theta + 4(2\cos^2\theta - 1) + (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ &= 1 + 5\cos\theta + 8\cos^2\theta + 4\cos^3\theta \\ &= (1 + \cos\theta)(4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1) \\ &= (1 + \cos\theta)(2\cos\theta + 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

695. 已知平面上的一组同心圆, 其半径

$$r = |a\cos\beta + b\sin\beta|$$

这里, a, b 为常数, β 为任意角, 所有这些同心圆盖满平面上一个区域, 试求这个区域的面积.

解: 这一组圆所覆盖的区域等于其中半径最大的圆覆盖的区域.

已知 $r = \sqrt{a^2 + b^2} |\sin(\beta + \theta)|$, 这里

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

则 $r_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2}$. 此时 $|\sin(\beta + \theta)| = 1$.

$\therefore$ 这组同心圆所覆盖之面积为 $\pi(a^2 + b^2)$.

696. (1) 如果 α, β 都是锐角, 试比较 $\sin(\alpha + \beta)$ 与 $\sin\alpha + \sin\beta$ 的大小.

(2) 在什么情况下, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$?

解:

(1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$,

而 $0 < \cos\alpha < 1, 0 < \cos\beta < 1$,

$\therefore \sin\alpha \cos\beta < \sin\alpha$,

$\cos\alpha \sin\beta < \sin\beta$.

故 $\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta < \sin\alpha + \sin\beta$.

即 $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$.

(2) 若 $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$,

则 $2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha + \beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$.

$$2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos\frac{\alpha + \beta}{2} - \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 0.$$

$$-4\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} = 0.$$

由此得 $\sin\frac{\alpha + \beta}{2} = 0, \sin\frac{\alpha}{2} = 0, \sin\frac{\beta}{2} = 0$.

$\therefore \alpha + \beta = 2n\pi, \alpha = 2n\pi, \beta = 2n\pi. (n \text{ 为整数})$

只有在上述三种情况下, 才有 $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$.

697. 已知 $\operatorname{tg}x = 2\sqrt{2} \ (180^\circ < x < 270^\circ)$,

求 $\cos 2x, \cos \frac{x}{2}$ 的值.

解: $\because 180^\circ < x < 270^\circ, \therefore \sec x = -\sqrt{1+\tan^2 x}$

$$= -\sqrt{1+8} = -3, \therefore \cos x = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \times \left[-\frac{1}{3}\right]^2 - 1 = -\frac{7}{9}.$$

由 $180^\circ < x < 270^\circ$, 得 $90^\circ < \frac{x}{2} < 135^\circ$,

$$\therefore \cos \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

698. 已知 $\cos 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ 的值.

解 1: $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = (\sin^2 + \cos^2 \theta)^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta = 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{11}{18}.$$

解 2: 由 $\cos 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 得

$$1 - 2\sin^2 \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

因而

$$\sin^2 \theta = \frac{3-\sqrt{2}}{6}, \quad \cos^2 \theta = \frac{3+\sqrt{2}}{6}.$$

所以

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = \left(\frac{3-\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \left(\frac{3+\sqrt{2}}{6}\right)^2 = \frac{11}{18}.$$

699. 求证: $\sin 9^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}})$.

证明: 由 $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$ 得: $\sin(2 \times 18^\circ) = \cos(3 \times 18^\circ)$.

$$2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ.$$

$$\because \cos 18^\circ \neq 0, \therefore 2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3,$$

$$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0. \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. (\sin 18^\circ$$

$> 0)$

因此

$$\begin{aligned} \sin 9^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 18^\circ)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\cos 18^\circ} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \sin 18^\circ) - 2\sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} + (1 - \sin 18^\circ)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{1 + \sin 18^\circ} - \sqrt{1 - \sin 18^\circ})^2} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{1 + \sin 18^\circ} - \sqrt{1 - \sin 18^\circ}) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)} - \sqrt{1 - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)}\right] \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}). \end{aligned}$$

$\therefore$ 原式成立.

700. 求证:

(1) $\sin 50^\circ(1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} 10^\circ) = 1,$

(2) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4.$

证明:

$$(1) \sin 50^\circ (1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} 10^\circ)$$

$$= \sin 50^\circ \times \frac{2 \left(\frac{1}{2} \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ \right)}{\cos 10^\circ}$$

$$= \sin 50^\circ \times \frac{\sin 30^\circ \cos 10^\circ + \cos 30^\circ \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{2 \cos 40^\circ \sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} = 1.$$

$$(2) \text{原式左边} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ}{\frac{1}{4} \cdot 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4$$

= 原式右边.

701. 求 (1) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$ 的值;

(2) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$ 的值;

(3) $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$ 的值.

解: