

GAODENGXUEXIAO
SHIYONGJIAOCAI



初 等

几 何

初等数学研究与教学法

初 等 几 何

毛信实 邓鹤年 胡连三 主编

王有顺 胡连三 邓鹤年
王秋海 马尔迈 程光铭 编
罗廷元 褚庆义

湖北教育出版社

初等数学研究与教学法

初等几何

毛信实 邓鹤年 胡连三 主编

王有顺 胡连三 邓鹤年 王秋海

马尔迈 程光铭 罗廷元 诸庆义 编

*

湖北教育出版社出版发行 新华书店经销

孝感地区印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 8.75印张 184,000字

1986年7月第1版 1987年3月第2次印刷

印数：8,700—10,200

ISBN7—5351—0103—8/G·94

统一书号：7306·510 定价：1.50元

前 言

《初等数学研究与教学法》共分初等代数、初等几何、教学法三册，是全国师专数学教学研究会组织编写并审定的高等学校教学用书。全书主编是毛信实、邓鹤年两位副教授，各分册由辽宁大连师专、天津师专、吉林四平师院、云南玉溪师专、甘肃兰州师专、福建宁德师专、辽宁本溪师专、陕西安康师专、浙江舟山师专、云南曲靖师专，山东枣庄师专、湖南娄底师专、湖北黄冈师专、安徽宿州师专、浙江湖州师专、辽宁朝阳师专、广东嘉应师专、辽宁锦州师专、辽宁鞍山师专等十九所院校的同志共同讨论，分工编写。初稿完成后，研究会理事会在舟山主持召开了审稿会，全国五十余所学校的理事和特邀审稿代表对初稿逐章进行了讨论，提出了修改意见。会后，部分编委又分别对全书各分册进行认真的统审和修改，再经毛信实、邓鹤年等主编复审定稿。

在编写中，我们根据师专初等数学研究课程的教学大纲，力求突出师范性，用高等数学的观点指导本书的编写并密切联系当前中学数学教学实际，在教材中指出了中学数学教学注意的主要问题和学生易犯的错误，以供师专、教育学院数学专业及在职中学教师使用、参考。

本分册是初等几何部分，主编是毛信实、邓鹤年、胡连三同志。各章分别由云南曲靖师专王有顺、福建宁德师专胡连三、吉林四平师院邓鹤年、王秋海、浙江舟山师专马尔

迈、天津师专程光铭、辽宁鞍山师专罗廷元、山东枣庄师专褚庆义执笔编写。最后由毛信实、邓鹤年、胡连三、马尔迈统审修定。

参加本书审稿的学校还有江西上饶师专、辽宁大连师专、吉林白城师专、内蒙包头师专、福建南平师专、广东韩山师专、安徽徽州师专、陕西渭南师专等。

参加本分册编写的工作人员还有林宝龙等同志。

在编写过程中得到天津师专、舟山师专等有关各校领导的大力支持，在此表示感谢。

由于时间仓促，编写中难免有缺点和错误，望读者给予批评指正。

编者

1985年12月

目 录

绪论	1
第一章 初等变换	7
§ 1.1 合同变换	7
一、合同变换的定义及其性质	7
二、平移、旋转和轴反射的定义及其性质	11
三、全等形和自对称图形	19
四、合同变换在解题中的应用	21
§ 1.2 相似变换	26
一、相似变换的定义及其性质	26
二、位似变换的定义及其性质	29
三、相似形和位似形	33
四、相似变换在解题中的应用	33
§ 1.3 教学中应注意的问题	36
习题一	40
第二章 几何证明	44
§ 2.1 证明的概述	44
一、证明的含义和作用	44
二、证明的组成	45
三、证明中应注意的事项	46
§ 2.2 几何证明的一般方法	51
一、反证法	51
二、同一法	55
三、综合法	59

四、分析法	61
§ 2.3 几何证题步骤的分析	64
§ 2.4 几何证题的基本思路	68
一、引用适当定理	68
二、转换证题结论	74
三、变换图形位置	88
四、形数结合, 利用计算	94
§ 2.5 典型例题证法分析	116
§ 2.6 初中几何证明教学应注意的事项	121
习题二	123
第三章 几何计算	131
§ 3.1 线段与角的度量	131
一、线段的长度与角的角度概念	131
二、广义勾股定理、斯蒂瓦特定理及其应用	135
三、解三角形	139
§ 3.2 圆周率, 圆周长与弧长的概念及其计算	142
§ 3.3 面积	145
一、面积的概念、矩形面积公式的证明	145
二、圆面积的概念、圆面积公式的证明	148
三、计算面积常用的方法	151
§ 3.4 初中几何计算教学应注意的事项	153
习题三	157
第四章 轨迹	161
§ 4.1 轨迹的基本知识	161
一、轨迹概述	161
二、轨迹命题的类型及解题步骤	165
§ 4.2 轨迹的探求	171
一、探求轨迹的一般途径	171

二、轨迹问题的解法举例	173
§ 4.3 轨迹问题的其它解法	177
一、应用解析几何方法求轨迹	177
二、应用变换求轨迹	179
三、应用集合运算求轨迹	179
§ 4.4 轨迹教学中应注意的几个问题	181
习题四	183
第五章 几何作图	186
§ 5.1 几何作图的基本知识	186
一、尺规作图与作图公法	186
二、基本作图题	188
三、解作图题的步骤	190
§ 5.2 常用的作图方法	192
一、交轨法	192
二、三角形奠基法	194
三、变位法	197
四、位似法	202
五、代数分析法	203
* § 5.3 尺规作图不能问题简介	208
一、尺规作图可能与不可能问题的判别准则	208
二、三大尺规作图不能问题	209
5.4 教学应注意的事项	211
习题五	214
* 第六章 立体几何	217
§ 6.1 若干典型解题方法举例	217
§ 6.2 空间作图和截面图的画法	233
一、空间作图公法	233
二、简单作图题	234

三、截面图的画法	240
§ 6.3 三面角与多面角	243
一、三面角及其性质	243
二、多面角及其性质	247
§ 6.4 多面体	248
一、四面体的一些性质	248
二、凸多面体的欧拉定理	251
三、正多面体	254
§ 6.5 体积的计算	255
一、体积的概念	255
二、长方体体积公式的证明	256
三、祖暅原理	258
四、计算体积的常用方法	259
§ 6.6 立体几何教学应注意的一些事项	263
习题六	268

绪 论

一、初等几何研究的对象、目的和方法

任何科学体系的产生、形成和发展，都取决于它自身是否能成为人类认识世界和改造世界的武器，几何学也不例外。人类为了自身的生存和发展，必须认识她生活所在的三维空间。在日常生活、生产实践和科学研究中，人们需要了解自身和各种物体相互间的位置关系，各种物体的形状和大小，各种物体在运动中所经过的路径，需要定方向、测距离、算地积、求容积等，在长期的实践中，经过观察、实验、抽象、概括，逐步形成了点、线、面、体等几何图形的概念，认识了角度、长度、面积、体积等几何量的本质，掌握了计算方法，从而逐步建立起一门科学体系——几何学。由此可知，几何学的研究对象就是从现实世界中抽象出来的各种几何图形。初等几何主要研究最基本最常用的规则图形——直线形、圆、柱、锥、台、球等。

在实践，观察、实验基础上所积累起来的几何知识，形成了实验几何。我国古代、古埃及、巴比伦所研究的几何，大体上就是实验几何。古希腊的文明促使几何研究取得重大的进展。欧几里得所著的《几何原本》，集当时几何研究之大成，用逻辑推理的方法，把几何图形的各种性质，整理成一个初步完整的演绎体系，这种几何人们称为推理几何。《几何原本》是一部早期的几何经典巨著，许多数学家和数

学工作者都从中得到教益。

当前我国中等学校所采用的几何教材，从其内容和所用的研究方法看，仍属于欧氏几何的体系。为什么要保留这样体系的教材作为中等数学教育的一项内容呢？这是因为它所研究的基本内容是认识现实三维空间的有力工具，是参加生产劳动所必备的基础知识，也是进一步学习高维空间必备的基础知识；它是培养学生逻辑推理能力和空间想象力的良好教材，也是训练学生正确使用数学语言的好教材；它所使用的方法——公理法、演绎法，是现代数学的基本研究方法之一。

《初等数学研究和教学法》是培养合格初中数学教师的一门重要的专业课。本教材是根据1982年部颁《初等数学研究和教学法》大纲的基本要求编写的。供师专数学专业使用。编写时，注意从理论和实践两方面密切联系中学几何教学，体现师专特点；以综合法为主，体现欧氏几何特点；突出变换观点、形数结合观点，体现高等数学观点指导的特点。尝试改变以研究证题术为传统的模式，着重研究通性通法和剖析解题思路的一般规律。注意精选教材，力争份量适度。对标有“*”号的内容，可灵活掌握。对大纲中规定的小平板测量和制图基本知识等内容，因其实践性强，教学时必须占用较多的时间，我们觉得难于兼顾，只好割爱。我们希望通过使用本教材进行教学，能在提高师专学生的几何素养和几何教学能力方面有所裨益。

二、中学几何教材的逻辑结构特征

现行中学通用几何教材，是在传统中学几何教材的基础上，通过“增加”、“精简”、“渗透”等办法，采用观

察、实验、抽象、概括、演绎推理（以演绎推理为主）等方法，把实验几何和推理几何有机结合起来，以实验几何为基础，推理几何为主体的演绎体系。从科学观点看，它是不甚严格的；从教育观点看，它是比较适合我国当前中学实际的。我们说它不甚严格，主要表现不定义的概念多，公理体系既不完备也不独立，论证时，常需借助于直观和经验。对此我们谈谈以下一些看法。

1. 在概念方面的逻辑结构特征

中学几何教材中的概念可分不定义概念（原始概念）和定义概念两大类。定义概念必须借助原始概念和已定义的概念来定义。对于定义概念，大家比较熟悉，在这里就不说了。对于不定义概念，在教学中往往不被重视，因而影响教学质量。不定义概念并不是没有意义，我们可以从总结实践经验入手，帮助学生正确理解它们的含义。

例如：“点”、“直线”、“一旁”、“之间”、“位置相同”、“位置交错”、“长度”、“重合”、“旋转”等，在中学几何教材中，这种不定义概念为数不少，不合公理法的严格要求。但为了照顾学生年龄特征，增加一些不定义概念也是可行的。因为这些概念，学生并不陌生，在日常生活中已多次使用过。必须指出学生已形成的概念是经验概念，并非科学概念，两者之间既有共同点，也有可能存在着差异，甚至可能是质的差异。如能恰当地借助学生已有的知识进行教学，将会收到好的效果。

如讲解“点”的概念时，告诉学生，在几何中我们用“点”来标记“位置”。例如在一张地图上，我们就用小圆点来表示各地的位置。你可能发现在地图上北京用“★”，

南京用“○”来表明。这只是为了把首都和地方城市区别开来。其实北京、南京的位置与地图上印制的图形“★”或“○”的形状和大小是没有关系的，这样只考虑“位置”的图形就是“点”。又如学生在日常生活中，对“长度”有着丰富且准确的实践经验，只要准确加以总结，就能形成正确的概念。再如学生对“位置相同”、“之间”等概念，也有实践经验，但和几何中的准确含义有差异，在教学中就要把学生的实践经验进一步精确化。

2. 在公理方面的逻辑结构特征

严格的公理体系要求满足和谐性、独立性和完备性。中学几何教材公理体系只满足和谐性，不满足独立性和完备性。顺序公理和连续性公理均不提及，而借助经验和直观予以默认，结合公理、合同公理也不完整，同时把一些可以证明的命题改作公理（如三角形全等判定命题和矩形的面积公式等）。采取这些措施的目的在于减少过繁的论证，降低难度，使初中学生易于接受。又由于有学生的实践经验和图形直观为基础，无损于学生对有关命题真实性的确信程度。这样处理有利于教学。在教学中，对于公理和未明确提及的顺序关系、连续性问题要多挖掘、总结学生已有的经验知识，加强实践活动，增加感性认识，以保证学生充分理解有关内容。

三、初中平面几何教学应注意的事项

关于数学教学的一般原则、方法和注意事项，在总论中已有专述，在这里不予重复。在这里仅针对几何教学的特殊性，提出如下一些注意事项。

1. 重视平面几何入门教学，注意打好基础。

平面几何入门教学，就内容来讲，一般指第一章基本概念，第二章相交线、平行线，第三章三角形等。这三章是平面几何的基础，它已全面涉及平面几何教学中的基本问题，如概念、命题、推理论证和作图等教学问题。在这个时期中，学生要完成由数到形、由运算到推理的转变，要克服叙述几何语言、绘制几何图形和进行推理论证等困难。所以这个时期的教学至关重要，必须抓紧抓好。

对几何语言要抓早、抓细、抓严。

几何语言有文字语言、符号语言和图形语言三种表示形式。这三种语言的有机结合是几何的重要特征。文字语言说理透彻、表达意思准确，是表述概念、定理、论证、几何符号、图形等的主要工具。因此使学生正确掌握并应用文字语言，是学好几何的关键之一，而掌握几何常用词和范句，又是学好几何语言的核心，所以要下功夫抓好。符号语言简明、精炼，且使用方便，能使叙述化繁为简条理清晰。让学生尽快掌握和使用符号语言，将会收到良好的效果，但要防止形式主义。几何图形直观、形象，一些抽象内容由图形表示出来，能收到一目了然之效，正确的图形还可起到启发思路的作用。所以对常见的基本图形，应要求学生做到会看、会画、会想、会用。因具体图形有一定局限性，要注意防止以特殊代替一般。

对于推理证明，要有计划、分阶段循序渐进。具体问题将在第二章论述。

2. 正确处理传授基础知识和培养能力的关系。

知识和能力既有区别又有密切联系。没有知识，能力不能产生，缺乏知识的人，其能力是低层次的能力；而能力又

是人们获得知识应用知识的必备条件，缺乏能力的人，不可能学习更高层次的知识，已掌握的知识也往往是僵化的，这种知识很难转化为认识自然、改造自然的力量。

学习和应用平面几何知识，需要较强的抽象思维能力和空间想象能力，而这些能力只能在平面几何教学过程中有计划地加以培养。

特别值得一提的是：学生的空间想象力的培养，是初中平面几何教学的任务之一。平面几何是研究二维空间的图形。在研究中，要求学生能识别处于不同位置上的基本图形，要求学生能从复杂的图形中分解出所需要的基本图形，要求学生能根据文字的叙述，正确地想象并画出图形，要求学生能在不完整的图形中，通过添引辅助线，构造出所需要的基本图形，要求学生能运用图形去解决一些实际问题……等，都需要有一定的空间想象力。同时在解决这些问题的过程中，也是培养和发展学生空间想象力的良好时机。只要我们重视这个问题，就一定能达到预期的目的。

第一章 初等变换

几何变换群观点是德国数学家克莱因 (F·Klein) 于 1872 年在爱尔兰根 (Erlangen) 大学开学致词中提出的著名观点。在这篇论文中，他总结了射影、仿射及其他各种几何学发展的结果，明确地表达了构成这些几何学的普遍原则。这种观点认为，每一种几何学都可以看做是在某种变换群下几何图形不变性质和不变量的科学体系。

初中平面几何主要研究全等形和相似形。从变换群观点看，全等形和相似形的性质和有关的量分别是在合同变换群下图形的不变性质和不变量。

本章将介绍合同变换和相似变换的基础知识，并运用这些变换的观点来认识初中平面几何的实质，用变换的方法来剖析若干典型问题的解题思路，以开阔读者视野，开拓读者思路，起居高临下的指导作用，也为学习以后的课程打好基础。

§ 1·1 合同变换

一、合同变换的定义及其性质

合同变换有着广泛的实际应用，例如各种建筑物上装饰图案的设计绘制，花布上的图案设计印制，各种建筑物、机器零件的结构设计，运动、舞蹈的队列变换，…等，都可用到合同变换的原理。为了便于读者理解合同变换的概念，我们先看下面两例。

例1·1 体育老师把全班同学排成三列横队，这时每位同学所站的位置，看做平面上一个点，全班同学所站的位置就组成一个平面几何图形 F 。接着体育老师下口令“向前五步走”，每位同学都向前移动了五步，（当然要求所有的步子都一样大）站到新的位置上，全班同学所站的新位置，也组成一个新的平面几何图形 F' ，由图形 F 到 F' 的点与点之间建立了一种一一对应关系或称双射（就是每位同学的初始位置与终止位置的对应），具有这样的性质：任意一对对应点所连线段的长都等于“五步”； \rightarrow 方向向前，我们还可以进一步知道，任意两位同学初始位置间的距离和终止位置间的距离相等。

例1·2 儿童乐园中的转椅，儿童们坐好时，可以把全体儿童所坐的位置看成一个平面图形 F 。支撑所有转椅的中心轴可以看成平面内一个点，记为 O 。转椅开动后，每位儿童都朝着一个方向绕 O 旋转，旋转停止时，全体儿童的终止坐位也组成一个平面图形 F' ，由图形 F 到 F' 的点与点之间建立了一个双射（就是每位儿童的初始坐位与终止坐位的对应），它具有这样的性质：任一对对应点 A 与 A' 到 O 点的距离相等且 $\angle AOA'$ 定向定值。进一步还可知道，任意两儿童的初始坐位间的距离和终止坐位间的距离相等。

例1·1和例1·2中的图形 F 与 F' 之间的双射既有它们各自的特性，也有它们的共性，当我们研究它们的共性时，就形成合同变换的概念。

定义1·1 如果 W 是平面 π 到自身的一个双射，它使平面 π 内任意两点间的距离和对应两点间的距离都相等，那么 W 就叫做平面 π 上的一个合同变换，设 A 是 π 的任一点，