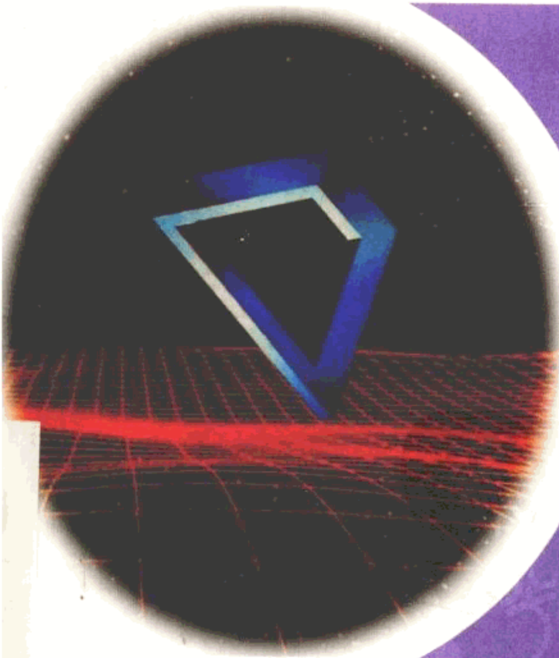
高中数学
解题方法与技巧

牛德胜 编



提高学生应试能力与解题技巧是本书的根本目的．书中设有选择、填空、解答、计算、实验、信息给予等题型．是您取得最佳成绩的理想丛书．

AOZHONG SHUXUE GAOZHONG SHUXUE

北京师范大学出版社

高中数学解题方法与技巧

牛德胜 编

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题方法与技巧/牛德胜编.—北京:北京师范大学出版社,1995.12重印

ISBN 7—303—02559—6

Ⅰ.高…　Ⅱ.牛…　Ⅲ.数学课—高中—解题—数学参考资料　Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第16923号

北京师范大学出版社出版发行

(100875　北京新街口外大街19号)

北京昌平兴华印刷厂印刷　全国新华书店经销

开本:787×1092　1/32　印张:8　字数:166千

1996年3月北京第1版　1996年3月北京第1次印刷

印数:1—30 000册

定价:7.60元

前　言

为了帮助广大中学生更好地学习和掌握国家教委颁发的教学大纲规定的基础知识和基本技能，提高学生的解题和应试能力，我们以中学生学习报社主办的《试题研究》杂志中“解题方法探讨”专栏八年来刊发的各地专家、教研员和中学教师的优秀文章为主要内容，选编了“解题方法与技巧”丛书。这套丛书主要包括《高中数学解题方法与技巧》、《高中物理解题方法与技巧》、《高中化学解题方法与技巧》、《初中数学解题方法与技巧》、《初中物理解题方法与技巧》、《初中化学解题方法与技巧》等6册。

《高中数学解题方法与技巧》一书，分“客观性试题的解法与技巧”、“主观性试题的解法与技巧”、“典型问题的解法”、“高中数学知识检测”四部分。本书根据大纲的要求和目前高考改革的动向，以及高考数学的测试热点，系统介绍了各种题型和热点问题的解题方法与技巧，指明探寻解题方法的具体途径，帮助读者提高分析问题和解决问题的能力。本书的第四部分针对当前高考数学的命题趋势，为读者提供了数学“应用问题”和“探索性问题”的检测题和高考模拟试题（均含答案），可作复习自测之用。

此丛书可供中学生平时学习、复习应试和中学教师教学参考。

这套丛书自 1992 年出版以来，深受读者欢迎，现又补充、修订再版。

感谢各位读者的合作与支持，欢迎批评指导。

编者

1995.4

目　录

第一部分　客观性试题的解法与技巧

第二部分　主观性试题的解法与技巧

第三部分　典型问题的解法

第四部分　高中数学知识检测

第一部分 客观性试题的解法与技巧

数学选择题的常用解法

花煜宽

数学教育现代化的一个重要问题是，在充分使学生理解有关数量、图形的基本概念、原理、法则的基础上，进而培养学习数学的思想方法，特别是培养创造性思维能力。近年来，除了适当更新教材内容外，在考试题型方面也发生了变化，常见的题型有：判断题、填充题、选择题、表格题、程序题、系列题等。随着考试中标准化系列化命题的深入进行，选择题已占着显要地位。

一个数学选择题的原型就是一个数学命题，有“题设”与“题断”两个部分，它与一般数学命题不同之处，仅在于把正确的“题断”混迹在几个“形是实非”的结论中，不直接给出。这些供选择的结论通常称为“题断”的“选择支”。如何正确地排除错误选择支的干扰，找到正确的题断，从而“还原”成一个正确的数学命题，这就是选择题的最大特点。

选择题具有构思巧妙、概念性强、灵活性大、知识覆盖面广的特点。它具有较强的针对性，每题待选的答案中，有些是教材的重要结论，有些是容易混淆的判断。通过比较，可以开

阔学生的思路，提高学生思维的灵活性，使学生从模仿解题发展到思维解题。此外，从选择题的正误式、比较式等类型题目来看，题目的灵活性较大，解答时既要辨别正误，又要选择最优，还要考虑如何正确而简捷地解答。所以采用这类题目进行题解训练，对培养学生的思维能力起着更大的作用。必须熟练掌握选择题一般解法，以提高学生判断能力，发展学生的智力。

选择题的解法较多，现简单介绍一些常用的方法，即直接法、淘汰法、特殊值法、验证法、分析法、图象法和逆推法七种。

一、直接法

直接从题设条件出发，通过正确的运算或推理，得出正确的结论，作出正确选择的方法。大多数选择题都可以用这种方法来解，亦称为常规法。

例 1 给出函数奇偶性的三个答案：(A) 奇函数；(B) 偶函数；(C) 非奇非偶函数。那么，下列函数的奇偶性属于哪一种？

(1) $f(x)=x^4\lg|x|$；　　(2) $f(x)=2^x+\sin x$；

(3) $f(x)=1+x+x^2+x^4$；

(4) $f(x)=\operatorname{arctg}x+x+x^3+\sin x$；

(5) $f(x)=x^2\cdot e^{|x|}\cdot\lg(x+\sqrt{x^2+1})$。

解：根据函数奇偶性的概念进行判断。

(1) $f(-x)=(-x)^4\cdot\lg|-x|=x^4\cdot\lg|x|=f(x)$。应选(B)；

(2) $f(-x)=2^{-x}+\sin(-x)=2^{-x}-\sin x$。应选(C)；

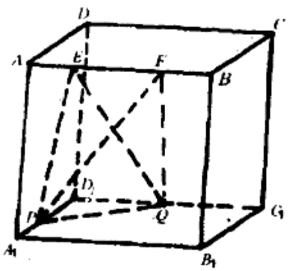
(3) $f(-x)=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3$
$=1-x+x^2-x^3$。应选(C)；

(4) $f(-x)=\operatorname{arctg}(-x)+(-x)+(-x)^3+\sin(-x)=-\operatorname{arctg}x-x-x^3-\sin x=-(\operatorname{arctg}x+x+x^3+\sin x)=-f(x)$。选(A)；

(5) $$f(-x)=(-x)^2\cdot e^{|-x|}\cdot\lg(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$$
$$=x^2\cdot e^{|x|}\cdot\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$$
$$=x^2\cdot e^{|x|}\cdot\lg\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=x^2\cdot e^{|x|}\cdot\lg\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=-x^2\cdot e^{|x|}\lg(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x).$$

∴　选(A)。

例 2　$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体，EF 是在棱 AB 上的一条线段，且 $|EF|=b<a$，若 P 是 A_1D_1 上的定点，Q 是在 C_1D_1 上滑动的动点，那么四面体 $PQFE$ 的体积(A) 是变量，且有最大值；(B) 是变量，且有最小值；(C) 是变量，但无最值；(D) 是常量。



解：把四面体 $PQEF$ 看成是以 P 为顶点，$\triangle QEF$ 为底面的三棱锥。P 是定点，则 P 到对角面 AD_1C_1B 的距离，即是 P 到底面 $\triangle QEF$ 的距离，亦即三棱锥的高为定值。而底面 $\triangle QEF$ 中，$|EF|=b$(定值)，Q 到 EF 的距离即是 Q 到 AB 的距离即是棱 C_1D_1 与棱 AB 的距离，也是定值，所以 $S_{\triangle QEF}$ 是定值，应选(D)。

二、淘汰法

利用已知条件或提供选择答案所提供的信息与“有且只有一个正确答案”的提示，从 n 个答案中淘汰 $n-1$ 个错误答案的选择方法。这种将错误的选择支逐一否定、逐一排除，留下唯一正确的选择支的方法也可称为排除法或筛选法。

例 3 两条异面直线指的是(A) 在空间不相交的两条直线；(B) 不在任何一个平面内的两条直线；(C) 分别位于两个不同平面内的两条直线；(D) 某一个平面内的一条直线和这个平面外的一条直线。

解：空间不相交的两条直线，也有可能平行，故筛掉(A)；分别位于两个不同平面内的两条直线，也有可能相交，故淘汰(C)；某一个平面内的一条直线和这个平面外的一条直线，也有可能平行，故排除(D)。故此应选(B)。

例 4 对于三个实数 $\sin\theta$、$\sin2\theta$、$\sin3\theta(\theta \in R)$，试指出下列判断中不正确的是(A) 至少可选取一个 θ 值，使它们能组成等差数列；(B) 至少可以选取一个 θ 值，使它们按顺序 $\sin\theta$、$\sin2\theta$、$\sin3\theta$ 组成等比数列；(C) 至少可以选取一个 θ 值，使它们能作为抛物线 $x = 2y^2 - y - 1$ 上三个不同点的横坐标；(D) 至少可以选取一个 θ 值，使它们能作为三角形三边的长。

解：$\because\ \sin\theta + \sin3\theta = 2\sin2\theta\cos\theta$，当 $\theta = \pi$ 时，$2\sin2\theta \cdot \cos\theta = 2\sin2\theta$，即 $\sin\theta + \sin3\theta = 2\sin2\theta$，组成等差数列，则应排除(A)；由于 $x = 2y^2 - y - 1$ 中，$x \in [-\frac{9}{8}, +\infty]$，对于 $\theta(\neq n\pi, n \in Z)$ 的任一值 $\sin\theta$、$\sin2\theta$、$\sin3\theta$ 都可表示抛物线上不同三点的横坐标，(C) 应被排除；当 $\sin\theta$、$\sin2\theta$、$\sin3\theta$ 为三角形三边时，得不等式 $\sin\theta + \sin3\theta > \sin2\theta \Rightarrow 2\sin2\theta\cos\theta >$

$\sin 2\theta$，当 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 时，此不等式成立，则(D) 也予筛掉，故此选(B)。

三、特殊值法

取适合题设条件的某些特殊值，进行验算，获得正确判断的方法。特殊值的选取，带有一定的技巧，选得恰当，往往使运算简化。

例 5 x、$y \in R$，则 $f(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^6 - y^6$ 的值满足(A) 小于等于 0；(B) 小于 0；(C) 大于 0 或小于 0；(D) 大于 0。

解：用特殊值 $x = y = 0$ 代入检验，得到 $f(x,y) = 0$。则作为全判断的(B)、(C)、(D) 均被排除，所以正确的答案只能是(A)。

例 6 a、$b \in R^+$，且 $a \neq b$，三个代数式(1)$(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b})$，(2)$(\sqrt{a+b} + \frac{1}{\sqrt{ab}})^2$，(3)$(\frac{a+b}{2} + \frac{2}{a+b})^2$ 中最大的一个是：(A) 必定是(1)；(B) 必定是(2)；(C) 必定是(3)；(D) 不能确定。

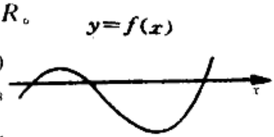
解：令 $a = 1$，$b = 2$，此时(1) 式为 5，(2) 式为 $3\frac{1}{2} + \sqrt{6}$，(3) 式为 $4 + \frac{25}{36}$，这样就可以将(B)、(C) 去掉，再令 $a = 1$，$b = 10$，此时(1) 式为 $20 + \frac{1}{5}$，(3) 式为 $(\frac{125}{22})^2 > 5^2$，而 $5^2 > 20 + \frac{1}{5}$，即将(A) 也排除，$\therefore$ 选(D)。

四、图象法

根据所给条件作出图象，再根据有关定理、性质，找出正

确答案的方法。

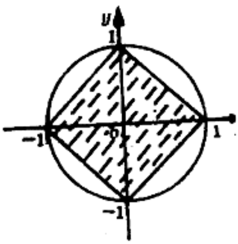
例 7 方程 $x^3-x^2-x+m^3=0$ 有三个相异的实根，则 m 的取值范围是：(A) $\frac{\sqrt[3]{5}}{3}<m<1$；(B) $m>1$ 或 $m<-\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$；(C) $-\frac{\sqrt[3]{11}}{3}<m<1$；(D) R。



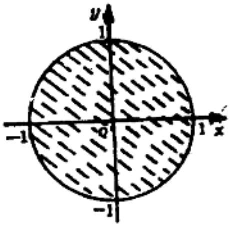
解：方程 $x^3-x^2-x+m^3=0$ 有三个不同实根，则可得函数 $y=x^3-x^2-x+m^3$ 的图象大约是：(如图) 借助图象推出题中的隐含条件。$\because$ $f(x)=0$ 有三异实根，$\therefore$ $y=f(x)$ 具有一极大值、一极小值，且两极值异号，而 $f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$。令 $f'(x)=0$，可知 $f(x)$ 在 $x=-\frac{1}{3}$，$x=1$ 处取极值，其极值分别为 $f(-\frac{1}{3})=\frac{5}{27}+m^3$，$f(1)=m^3-1$。于是 $f(-\frac{1}{3})\cdot f(1)=(m^3+\frac{5}{27})\cdot(m^3-1)<0\Rightarrow(m-1)\cdot(m^2+m+1)\cdot(m+\frac{\sqrt[3]{5}}{3})(m^2-\frac{\sqrt[3]{5}}{3}m+\frac{\sqrt[3]{25}}{9})<0\cdots(1)$ 在二次函数 $y=m^2+m+1$ 中，$\triangle=b^2-4ac<0$，$a>0$，$\therefore$ $y=m^2+m+1>0$。同理，$m^2-\frac{\sqrt[3]{5}}{3}m+\frac{\sqrt[3]{25}}{9}>0$，于是不等式(1)等价于 $(m-1)(m+\frac{\sqrt[3]{5}}{3})<0\Rightarrow-\frac{\sqrt[3]{5}}{3}<m<1$，$\therefore$ 选择(A)。

例 8 $M=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，$P=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1, x\in Z, y\in Z\}$，则正确的包含关系是(A)$P\subset M\subset N$；(B)$P\subset N\subset M$；(C)$M\subset N\subset P$；(D)$N\subset M\subset P$。

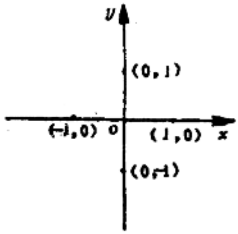
解：根据题给条件，分别画出图象。集合 M 是以(0,1)，(1,0)，(−1,0)(0,−1) 为四个顶点的圆内接四边形的边界及其内部，如图(1)；集合 N 是以原点为圆心，1 为半径的圆及其内部，如图(2)；集合 $P=\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$，为五个孤立的点，如图(3)。∴ $P\subset M\subset N$，选(A)。



图(1)



图(2)



图(3)

五、验证法

由题设找出合适的验证条件，再通过验证找出正确答案的选择方法。这种方法还可以把供选择的答案代入已知条件中去验证。

例 9 若 x,y 为关于 m 的方程 $m^2-2am+a+6=0$ 的二实根，则 $k=(x-1)^2+(y-1)^2$ 的最小值是

(A) $-12\frac{1}{4}$； (B)18； (C)8； (D) 无最小值。

解：由韦达定理 $\begin{cases}x+y=2a\\xy=a+6\end{cases}$ 代入下式：

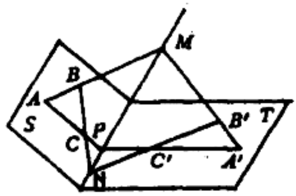
$$
\begin{aligned}
k&=(x-1)^2+(y-1)^2\\
&=x^2-2x+1+y^2-2y+1\\
&=[(x+y)^2-2xy]-2(x+y)+2
\end{aligned}
$$

$= 4a^2 - 6a - 10$,

当 $a = \frac{3}{4}$ 时，$k = -\frac{49}{4}$。至此，就贸然地下结论 $k_{\min} = -\frac{49}{4}$，而选择(A) 其实这是错误的，只要进一步探究就可发现：

$\because$ x、$y \in R$，则 $m^2 - 2am + a + 6 = 0$ 的判别式 $\Delta = (-2a)^2 - 4(a+6) \geqslant 0 \Rightarrow 4(a-3)(a+2) \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 3$ 或 $a \leqslant -2$。但 $a = \frac{3}{4}$ 不在此范围内，则 $k = -\frac{49}{4}$ 就无法取得。当 $a = 3$ 时 $k = 4 \times 3^2 - 6 \times 3 - 10 = 8$；当 $a = -2$ 时 $k = 4 \times (-2)^2 - 6(-2) - 10 = 18$；故 $k_{\min} = 8$，因此应选择(C)。

例10 $\triangle ABC$ 在平面 S 内，$\triangle A'B'C'$ 在平面 T 内，若 AB 和 $A'B'$，BC 和 $B'C'$，AC 和 $A'C'$ 所在直线分别交于 M，N，P 三点，则



(A) $MN \cap NP = N$，但三点不共线；

(B) M，N，P 三点共线；

(C) NP，MP 分别在平面 S、T 内；

(D) M、N，P 三点共圆。

解：$\left.\begin{array}{l} \because\ AB \cap A'B' = M \\ AB \subset S \\ A'B' \subset T \end{array}\right\} \Rightarrow M \in S$，

且 $M \in T \Rightarrow M \in (S \cap T)$，同理 $N \in (S \cap T)$，$P \in (S \cap T)$，即 M、N，P 在平面 S，T 的交线上，$\therefore$ M，N，P 三点共线，选择(B)。

六、分析法

通过分析确定正确答案的选择方法。有些选择题可以通

过对题意的认真分析，无需直接计算或详细推理，便能确定正确的结论。用这种方法解题时，必须具有分析能力强，知识面广，思维清晰，善于联想等良好素质。

例 11 对于问题“求函数 $f(x)=1+(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)^2$ 的最大值和最小值”，某甲是这样解的：“设 $t=\sin x+\cos x$，原函数即为二次函数 $F(t)=1+t-t^2$，$\because$ 二次项系数为 $-1<0$，故当 $t=-\dfrac{1}{2(-1)}=\dfrac{1}{2}$ 时，$F(t)$ 有最大值 $\dfrac{5}{4}$，而无最小值，即 $f(x)_{\max}=\dfrac{5}{4}$，无最小值”。这个结论是不对的，其主要错误在于(A) 用换元法解，设 $t=\sin x+\cos x$ 是不妥当的；(B) 不应该把原函数化为二次函数；(C) 没有考虑 t 的取值范围．由于 $-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，$\therefore$ $t=\sqrt{2}$ 时，函数有最大值；当 $t=-\sqrt{2}$ 时，函数有最小值，而与顶点坐标无关；(D) 没有考虑 t 的取值范围，因 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，故函数的最大值和最小值应通过直接比较 $F(\dfrac{1}{2})$，$F(-\sqrt{2})$，$F(\sqrt{2})$ 的大小得出。

解：通过分析，本题采用换元法，设 $t=\sin x+\cos x$ 是可行的，利用二次函数的性质求极值，而把原函数化为二次函数也是对的，故此排除(A)、(B)。但在(C) 中，没有考虑顶点坐标的因素，应直接比较 $F(\dfrac{1}{2})$，$F(-\sqrt{2})$，$F(\sqrt{2})$ 的大小求得函数的最大值和最小值，$\therefore$ 选(D)。

例 12 已知 $E=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，$Q=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$，那么使 $E\cap Q=Q$ 成立的充分必要条件是 (A) $a\geqslant\dfrac{4}{5}$；(B) $a=\dfrac{5}{4}$；(C) $a\geqslant 1$；(D) $a>0$。

解：$E\cap Q=Q$成立的充分必要条件是$Q\subseteq E$，既要求圆$x^2+(y-a)^2=1$，当$a>0$时与抛物线$y=x^2$不相交或恰好相切，也要求方程组$\begin{cases}y=x^2\\x^2+(y-a)^2=1\end{cases}$无解或恰有重根，亦即要求$y+(y-a)^2=1\Rightarrow y^2-(2a-1)y+(a^2-1)=0$的判别式$\triangle=(2a-1)^2-4(a^2-1)\leqslant 0\Rightarrow a\geqslant\frac{5}{4}$，∴选(A)。

七、逆推法

先假设结论成立，逆推看是否满足条件，从而作出判断的选择方法。逆推是一种考虑问题的思路，在实际运用时，常常与其它方法结合联系，交叉使用，才能迅速找到正确的选择支。

例 13 抛物线$\begin{cases}x=t\\y=t^2\end{cases}$ （t 为参数）

与圆$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta\\y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的交点坐标有(A)(1,1)；(B)(1，－1)；(C)(－1，－1)；(D)(－1,1)。

解 $\begin{cases}x=t\\y=t^2\end{cases}\xrightarrow{\text{消参数}}y=x^2$ (1)

若交点为(－1,1)，(－1，－1)，因$-1\neq(\pm 1)^2$，不能满足(1)式；

从$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta\\y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）$\xrightarrow{\text{消参数}}x^2+y^2=2$ (2)

而(1,1)，(－1,1)均满足(1)，(2)，∴ 选择(A)、(D)。

例 14 若$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1$ （A,B,C为$\triangle ABC$的内角），则$\triangle ABC$的形状为(A)正三角形；(B)等腰