大学文科数学

实验高等数学

胡建德 阿荣 编著

College Mathematics with Maple

清华大学出版社

胡建德 阿荣 编著

大学文科数学
实验高等数学

清华大学出版社
北京

内容简介

与传统教材不同，本书更多地以数值、图形及数学实验的表现形式表达大学数学的基本概念和方法，适应了文科学生富于感知的特点，也有利于知识的理解和应用．在内容上侧重文科专业的需要，编入了人文、社科、经管等方面的诸多实例．以数学软件 Maple 13 为平台，设计了数学实验，使高等数学的学习成为感受、实践和体验的过程．对使用该教材的教师提供课件．

全书包括一元函数微积分学、级数和微分方程，简单讲述了线性代数和概率统计初步．文科各专业可根据需要选讲．书中部分章节编入了作者的建模研究实例，因此，本书也可供数学建模爱好者参考．

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学：实验高等数学/胡建德，阿荣编著．--北京：清华大学出版社，2010．5
ISBN 978-7-302-22127-2

Ⅰ．①大…　Ⅱ．①胡…　②阿…　Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 030347 号

责任编辑：刘　颖
责任校对：王淑云
责任印制：王秀菊
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社　总　机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：15.5　**字　数**：334 千字
版　　次：2010 年 5 月第 1 版　　**印　　次**：2010 年 5 月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：28.00 元

产品编号：034163-01

前言

FOREWORD

改革开放以来，随着大学的扩招以及大学文科数学教育的广泛开展，针对文科学生的特点如何搞好数学教育成为多年来教育界同行关注的焦点. 其核心是教材、教学方式的改革. 于是产生了不同版本和内容的文科数学教材，对文科学生的数学教育起到了积极的推动作用. 我们在多年从事文科数学教育的工作中，主要有以下的认识和体会.

1. 文科数学教材内容的侧重面应有所转变

为使学生在理解概念和掌握方法的前提下提高解决实际问题的能力(这种能力的训练不应以过多的公式推导和习题演练为主体)，这就要求教材应给予众多的符合文科专业需要的应用模式，供学生学习和训练. 这方面国内的教材近些年来虽有许多发展，但与国外同类教材相比，差距很大.

2. 教学手段上应有较大转变

在教学方式上，可适当地考虑以数学软件(如 Maple、Mathematica 或 MATLAB 等)结合教材中概念、内容的应用实践取代多媒体教学课件的简单演示. 具体地说，在课堂上介绍教学内容的基础上，结合数学软件，演示概念或实践相关的数学方法. 同时，为学生安排一定比例的实验课程，训练学生使用软件解决问题的能力. 结合现代数学技术的教学方式，改变数百年来传统的数学教学方法，必将提高学生的学习兴趣和动手能力，为数学的发展和应用创造条件.

就像统计学为概率论和数理统计的应用开辟了新的教学模式一样，我们认为，要使文科学生的数学教育有较大的发展，可以考虑对现有教材或内容进行一个大的变革，甚至对教材的名称作适当的改变. 如本书副标题使用的“实验高等数学”或“实验微积分学”或以什么其他名字来恰当地表达这个变化(我们虽对本书标以“实验高等数学”的副标题，但内容与这里的设想还相距甚远)，以区别于传统教材. 这里的区别不仅指使用计算机和数学软件，它还应包括教材在结构和内容上有大的改观. 在内容上，不再过多地强调习题训练，而是以人文社科的基本要素为操作对象，以掌握解决各类实际问题的模式为训练主体. 如，类似统计学的内容，编入更多的应用模式，像案例一般，使学生在学习中积累起解决实际问题的思路. 在教学目标上，也可参照统计学的大纲编写. 统计学在文科学生的教学中已经取得很好的效果，如果以类似的方式编写高等数学，一定能提高文科学生的学习兴趣，进而改善他们的学习效果.

随着大学师资水平的不断提高和计算机实验室的不断完善，上述的设想应该说不论在条件或时机上都已基本具备或成熟．日臻完善的数学软件以软件包的形式将许多数学内容和方法以极灵活、完美的形式表现出来，其演示性和可实践性是任何多媒体课件所望尘莫及的．

概念和方法更易于理解和接受，学生在教学实践中会获得全新的学习感受．结合数学实验学习高等数学，对于改变文科学生学数学的厌懒情绪会有所帮助．

本教材在内容上侧重文科专业的需要，在方法上兼顾到文科学生更富于感知的特点，这是我们编写的指导思想．书中编入了人文、社科、经管等方面的诸多实例，也融入了作者的教学心得和研究成果．根据学生情况及学时需要，教学内容可安排 36～72 学时讲授．如，微积分部分（第 1 章至第 3 章）36 学时，线性代数和概率统计部分（第 6、7 章）20 学时，级数和微分方程部分（第 4、5 章，选讲内容）16 学时．学时较少时，可以考虑略去线性代数和概率统计部分，或者略去级数和微分方程部分．具备实验室条件的，可对各章后的实验内容安排 2～4 学时的上机实验．任课教师还可对书中内容作部分增删，以适应不同教学情况的需要．

大学文科数学课程是不受教育部本科教学要求约束的一小块实验田．在这块土地上，我们得以播不同的种子，长不同的花草．本教材的出版，是对文科高等数学教学改革的一个尝试．不当之处，还有望专家、读者和同行不吝指教，以待改进．（E-mail 地址为 hujiand 2003@yahoo. com. cn）

作者借此机会向美国加州大学的 Bin Lu 教授、美国国家科学基金会资助的《Calculus》和《Aplied Calculus》的作者、哈佛大学的 Deborah Hughes-Hallett 教授表示衷心的感谢，感谢他（她）们在推进微积分教学改革中给予我们的鼓励、支持和帮助，本书的部分素材选自原著．我们也十分感谢清华大学萧树铁教授、北京航空航天大学李心灿教授对我们教材改革思路的支持．同时感谢清华大学出版社刘颖编审对出版工作的大力支持和精心指导，感谢出版社为书稿的编排和录入付出的辛劳．我们同样不会忘记中央民族大学信息与计算科学专业的唐国森、穆新宇、王栓奇、郭歌、徐晓宇等同学在教材的前期准备工作中所给予的帮助．

胡建德　阿荣

2009 年冬

目录

CONTENTS

第 1 章　函数 …… 1

1.1　函数 …… 1

1. 函数的概念 …… 1
2. 几种具有一定特性的函数的几何性质 …… 3
3. 初等函数 …… 4
4. 常见的线性函数与指数函数 …… 5
5. 数学建模——建立近似的函数关系 …… 11

1.2　逼近、极限与连续 …… 15

1. 极限的定义和性质 …… 15
2. 函数的连续性 …… 19
3. 常数项级数简介及应用 …… 21

*1.3　园林艺术与思考：

中国古典园林中小园包大园的数学原理及其折射出来的哲学思想 …… 25

习题 1 …… 27

Maple 实验 1 …… 29

1. 基本初等函数的图形及其变换 …… 29
2. 反函数 …… 30
3. 复合函数 …… 31
4. 建模——曲线拟合 …… 31
5. 极限、割线与切线 …… 31
6. 图形绘制与表达式运算 …… 34

第 2 章　导数及其应用 …… 36

2.1　导数 …… 36

1. 导数的概念 …… 36

2. 数值求导法 …… 37
3. 公式求导法 …… 40
4. 高阶导数 …… 45
5. 微分的概念及应用 …… 47
2.2 导数的应用 …… 50
1. 函数的增减性与极值 …… 50
2. 曲线的凹凸性与函数图形 …… 53
3. 中值定理与洛必达法则 …… 55
习题 2 …… 58
Maple 实验 2 …… 60
1. 导函数计算及图示 …… 60
2. 曲线分析 …… 61
3. 微分中值定理及其应用 …… 62

第 3 章 积分 …… 64

3.1 积分的基本概念 …… 64
1. 以黎曼和表达的定积分 …… 64
2. 以平均值表达的定积分 …… 69
3. 用定义计算定积分 …… 70
4. 原函数与不定积分 …… 72
5. 用原函数求定积分(牛顿—莱布尼茨公式) …… 73
6. 变限积分与原函数存在定理 …… 76
3.2 积分的基本性质及计算 …… 78
1. 定积分的基本性质,积分中值定理 …… 78
2. 不定积分的基本性质和基本公式 …… 79
3. 不定积分的计算 …… 81
4. 定积分的计算 …… 82
5. 广义积分简介 …… 83
6. 数值积分法(定积分的近似计算) …… 85
3.3 定积分的应用 …… 86
1. 面积的计算 …… 86
2. 与增长率有关的计算 …… 87
3. 与密度函数有关的计算 …… 88
4. 与现值、将来值有关的计算 …… 91

5. 基尼系数 …… 96
习题 3 …… 97
Maple 实验 3 …… 98
1. 以黎曼和表达的定积分 …… 98
2. 原函数和不定积分 …… 98
3. 积分中值 …… 100
4. 不定积分与定积分的计算 …… 101

第 4 章　级数 …… 102

4.1　泰勒公式和泰勒级数 …… 102
1. 泰勒公式 …… 103
2. 泰勒级数 …… 107
4.2　幂级数 …… 109
1. 幂级数 …… 109
2. 幂级数的收敛域 …… 110
3. p 级数、交错级数 …… 111
4. 函数的幂级数展开及其应用 …… 113
4.3　幂级数的应用举例 …… 113
1. 利用幂级数展开式进行近似计算 …… 114
2. 近似公式 …… 114
3. 定积分的近似计算 …… 115
4. 微分方程的级数解法 …… 116
4.4　傅里叶级数 …… 116
1. 简谐振动及其合成 …… 116
2. 傅里叶级数 …… 118
3. 余弦级数，正弦级数 …… 120
4. 傅里叶级数的收敛性判别 …… 121
5. 任意区间的傅里叶级数 …… 122
4.5　傅里叶级数的应用举例 …… 123
1. 天鹅湖舞曲与傅里叶谐波 …… 123
2. 啤酒销量的季节性模拟 …… 125
习题 4 …… 127
Maple 实验 4 …… 127

第 5 章 微分方程简介 …… 128

5.1 简单的微分方程及求解 …… 128

1. 藏羚羊的数量变化与一阶微分方程 …… 128
2. 微分方程的数值解法——欧拉折线法 …… 130
3. 斜率场及图像法求解方程 …… 132
4. 指数增长和衰减 …… 135
5. 可分离变量法求解的微分方程 …… 138
6. 应用与模拟：
   用阻滞模型模拟历届奥运会男子撑竿跳高冠军记录及预测 …… 141

习题 5 …… 144

Maple 实验 5 …… 144

第 6 章 线性代数 …… 146

6.1 行列式 …… 146

1. 行列式的定义 …… 146
2. 行列式的性质 …… 151

6.2 线性方程组的解法 …… 156

1. 克莱姆法则 …… 156
2. 消元法 …… 158

6.3 矩阵 …… 160

1. 矩阵的概念 …… 161
2. 矩阵的代数运算和转置 …… 163
3. 矩阵的初等变换 …… 167
4. 矩阵的逆 …… 168
5. 矩阵的秩 …… 172

6.4 矩阵的应用 …… 174

1. 一般线性方程组的解法 …… 174
2. 矩阵方程的解法 …… 177

习题 6 …… 178

Maple 实验 6 …… 180

1. 定义矩阵 …… 180
2. 矩阵元素的操作与基本运算 …… 180
3. 线性方程组的两种解法 …… 183

第 7 章　概率统计初步 …… 187

7.1　随机事件的概率 …… 187
1. 概率的统计定义 …… 187
2. 随机事件的关系和运算 …… 188
3. 古典概型 …… 191
4. 几何概型 …… 197
5. 全概公式和贝叶斯公式 …… 198
7.2　随机变量 …… 200
1. 离散型随机变量及其概率分布 …… 201
2. 连续型随机变量及其概率分布 …… 204
3. 离散型随机变量的数学期望与方差 …… 208
4. 连续型随机变量的数学期望与方差 …… 210
5. 常用随机变量的数学期望与方差 …… 211
7.3　统计与推断 …… 213
1. 总体与样本 …… 213
2. 统计量和统计分布 …… 214
3. 参数估计 …… 215
4. 一元线性回归分析 …… 218
习题 7 …… 220
Maple 实验 7 …… 222
1. 排列、组合与事件的概率的计算方法 …… 222
2. 平均值、中值、方差和标准差的计算方法 …… 224
3. 常用的几种分布的概率值的求法 …… 224
4. 对统计数据作图的方法 …… 225

附录　参考答案 …… 227

习题 1 …… 227
习题 2 …… 228
习题 3 …… 229
习题 4 …… 230
习题 5 …… 230
习题 6 …… 230
习题 7 …… 231

附表 …… 233

参考文献 …… 235

第1章　函　　数

函数是数学研究的基础.当我们说“股市的表现是投资者信心的函数”或“病人的血压是药效的函数”时,表达了一种现象对另一种现象的依赖关系,或后者对前者的影响.当这种关系用数学公式联系起来时,它们之间就有了准确的数量联系.就像正方形的面积可以由边长的平方来表达那样,当我们知道了边长,就可以计算出面积来.

微积分的理论和方法是从研究函数开始的.在本章中,我们将介绍函数、函数的极限及性质,并考查一些常用函数的性质和图形,为后续的微积分学习打下基础.由于微积分大量地研究函数的变化率,在本章中,我们还要考查函数的变化特点及平均变化率.

1.1　函数

1. 函数的概念

先看一个例子.

例 1　2007 年香港月平均日最高气温如表 1.1 所列(月平均日最高气温是用月份内每天最高气温之和除以月份的天数).

表　1.1

月份 m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
温度 T/℃	19	22	23	25	30	31	33	31	31	28	24	22

你也许不曾想过气温会是时间的函数,但经验和气象预报的记载都表明,在正常的气候条件下,一个城市或地区的以月为变量的日均最高气温的函数关系是差别不大的.正是基于这种关系和新的气象资料,气象学家预报未来月份的日均最高气温.注意到表 1.1 中月份和温度一一对应的关系,我们对函数作如下定义.

定义　函数就是对给出的一组数通过某种变化法则得出对应这些数的另一组数.所给的一组数称为函数的**定义域**,而由变化法则产生的另一组数称为函数的**值域**.

在这里,给出的变量称为**自变量**,得出的结果称为**因变量**.在例 1 中,月份的数据{1,

2,…,11,12}(也称集合)是定义域,而温度的集合{19,22,23,…,31,33}是值域.如果以 f 表达其函数关系,则可记为 $T=f(m)$.

在函数中,某些量,如月份、日期等只能用整数或孤立的量来表示,我们称之为**离散(变)量**.还有些量,如时间或温度等,可以取任何值,我们称之为**连续(变)量**.对于连续量,函数的定义域和值域可以用区间来表达,如记 $t\in[a,b]$ 或 $t\in(a,b)$ 等.

若将表 1.1 的数据在坐标系中表达出来,则有图 1.1.

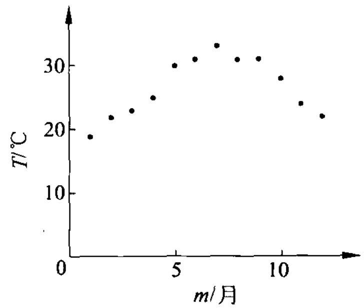

图 1.1 2007 年香港月均日最高气温

结合上面的例子和以下概念,我们可以给出函数概念的严格定义.

(1) **集合** 指具有某种特定性质对象的全体.用 A,B 等表示.

元素 组成集合的对象称为集合的元素.用 a,b 等表示.

元素与集合的关系 a 在 A 中,称 a 属于 A,记为 $a\in A$;否则,称 a 不属于 A,记为 $a\notin A$.两个集合间有包含、相等关系,有并、交、差、余等运算.设 A,B 为两个集合.如果对任意的 $a\in A$,都有 $a\in B$,则称 B 包含 A,记为 $B\supset A$,或 $A\subset B$;如果 $A\subset B$,且 $A\supset B$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$;由 A 或 B 中元素所构成的集合称为 A 与 B 的并,记为 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x\in A$ 或 $x\in B\}$;由 A 和 B 的共同的元素构成的集合称为 A 与 B 的交,记为 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x\in A$ 且 $x\in B\}$;由属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的差,记为 $A\backslash B$,即 $A\backslash B=\{x\in A$ 且 $x\notin B\}$;如果 $A\subset B$,则 $B\backslash A$ 称为 A 关于 B 的余,记为 $\bar{A}$;不包含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$.

(2) **区间** 介于两个数之间的数的全体组成的集合.

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开半闭区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$,$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$;

无限区间 $(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,$(-\infty,+\infty)$.

(3) **邻域** 设有实数 a 及 δ,且 $\delta>0$,称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为以 a 为中心,以 δ 为半径的邻域,简称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$.

(4) **常量与变量**

在某过程中保持一定值的量为常量,可以取不同值的量为变量.

(5) **函数的概念**

定义 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集.若对任意的 $x\in D$,按照一定法则 f,总有确定的数值 y 与之对应,则称 y 是 x 的函数.记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 为定义域.函数值的全体 $R=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

注 定义域与对应法则是函数的两个要素，它是判断两个函数是否相同的标准. 如：

$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 是不同的函数，因为两个函数的定义域不同；

$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 不同，因为两个函数的对应法则不同；

$f(x)=x^2+1$ 与 $g(t)=t^2+1$ 相同.

分段定义的函数 可以用几个式子来分段表示一个函数. 如

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

例 2 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=\{-1,0,1\}$.

(6) **函数的表示**

通常，函数可以由列表法（如表 1.1），图像法（如图 1.1）和公式法表示.

2. 几种具有一定特性的函数的几何性质

(1) **有界函数**

设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在 $M>0$，使对任意的 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $y=f(x)$在 D 上有界，或称 $y=f(x)$为 D 上的有界函数. 若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$在 D 上无界，或称 $f(x)$为 D 上的无界函数.

有界函数的图像在几何上可以用两条平行于 x 轴的直线夹住. 如：$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界；$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(1,2)$内有界，但在$(0,1)$内无界，由此知，是否有界与区间有关.

(2) **单调函数**

设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$，对任意的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$，若总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在 D 上单调递增（简称为增函数）；若总有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在 D 上单调递减（简称为减函数）. 增函数和减函数统称为单调函数.

注意 是否单调也与区间有关. 如：$y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内非单调，但在$(0,+\infty)$内单调递增，在$(-\infty,0)$内单调递减.

(3) **奇偶函数**

设有函数 $f(x)$，$x\in D=(-l,l)$. 若对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；若对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，$f(x)=x^3$ 为奇函数；不满足上述两条的为非奇非偶函数，如 $f(x)=x^2+x$.

注意 奇函数的图形对称于原点，偶函数的图形对称于 y 轴.

(4) 周期函数

设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 若存在 $T\neq 0$ 使 $f(x+T)=f(x)$（$x, x\pm T\in D$），则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为周期.（注：本书周期函数的周期均指最小正周期.）

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数. $y=\cos 4x$ 是周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的周期函数.

3. 初等函数

(1) 基本初等函数

常数函数：$y=c$，$D=(-\infty,+\infty)$，$R=\{c\}$；

幂函数：$y=x^{\mu}$（μ 为常数）；

指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq 1$），特别地，$y=\mathrm{e}^{x}$，其中 e 为自然对数的底；

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$），特别地，$y=\lg x=\log_{10} x$，$y=\ln x=\log_{\mathrm{e}} x$；

三角函数：$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$，$\sec x$，$\csc x$；

反三角函数：$\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$.

(2) 反函数

设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 R. 如果对于任意的 $y\in R$，按 $y=f(x)$ 的逆变化，总有唯一的 $x\in D$ 与之对应，则由 $y=f(x)$（$x\in D$）确定了一个 $f(x)$ 的反函数，记为

$$x=\varphi(y)\quad y\in R.$$

通常我们用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以上式可改写成

$$y=\varphi(x)\quad x\in R.$$

例如，$y=\mathrm{e}^{x}$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=(0,+\infty)$，其反函数 $y=\ln x$ 的定义域 $D=(0,+\infty)$，值域 $R=(-\infty,+\infty)$.

由于函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=\varphi(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，所以可将 $y=f(x)$ 的图像以 $y=x$ 为轴旋转 $180°$，当纸透明时，看到的就是反函数 $y=\varphi(x)$ 的图像.

(3) 复合函数

引例 设 $y=f(u)=\sqrt{u}$，而 $u=1-x^2$，则 $y=\sqrt{1-x^2}$ 由 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成.

定义 设 $y=f(u)$，定义域 D_1，$u=\varphi(x)$，定义域为 D_2，$R_2=\{u\mid u=\varphi(x), x\in D_2\}$. 若 $D_1\cap R_2\neq\varnothing$，则称由 x 经过 u 到 y 的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，u 称为中间变量.

注意 $D_1\cap R_2$ 非空是检验两个函数能否复合的根据. 另外，复合过程也可以进行多次.

例如，$y=f(u)=u^2$，$u=\varphi(x)=\sin x$，可以复合成 $y=\sin^2 x$，而 $y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 不可以复合，集合 $D_1=[-1,1]$ 与 $R_2=[2,+\infty)$ 的交为空集.

(4) 初等函数

由基本初等函数经过有限次运算和有限次复合而成并且可以用一个式子表示的函数叫初等函数. 如：$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$ 等.

4. 常见的线性函数与指数函数

(1) 线性函数

例 3(撑杆跳奥运会世界记录)　表 1.2 列出了第 2 届奥运会(1900 年)至第 6 届奥运会(1916 年)撑杆跳冠军的成集,考查表中数据可以看出,每届奥运会的成绩提高了 0.2m. 将这些数据绘在以届数为变量的图 1.2 中,连接各数据点,显然它们在同一直线上. 记冠军成绩为 h,单位为米,届数为 t,从第 2 届开始计数,则有

$$h = 3.3 + 0.2t.$$

上式中 t 的系数 0.2 反映了每届奥运会高度的改变量,它也是图 1.2 中直线的斜率.

表 1.2　男子撑杆跳奥运记录

届	2	3	4	5	6
高度 h/m	3.3	3.5	3.7	3.9	4.1

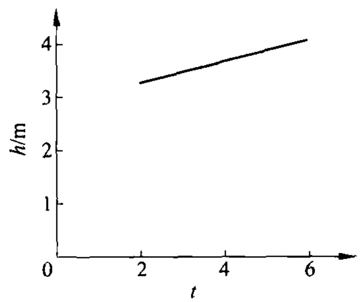

图　1.2

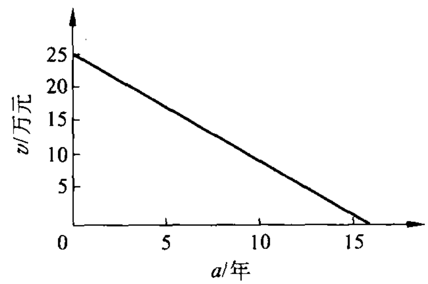

图　1.3

例 4(物品的折旧)　设轿车的价值 v(万元)是使用年数 a 的函数,$v=f(a)$.

(1) 解释 $f(5)=9$ 的含义;

(2) 以同样的单位,某轿车的折旧函数约为 $f(a)=25-1.6a$,求函数曲线在坐标轴上的截距并给出解释.

解　(1) 由函数关系,$f(5)=9$,知轿车使用 5 年后,价值为 9 万元.

(2) 由 $v=f(0)=25$,知该轿车的价值为 25 万元. 为求水平截距,令 $v(a)=0$,有

$$25 - 1.6a = 0, \qquad a \approx 15.6(\text{年}).$$

所以使用约 16 年后轿车的价值为 0. 由于 $v=f(a)$随使用年数 a 的增加而单调减小,我们称 $f(a)$为单调减小函数. 如图 1.3 所示.

经济学中的成本函数、收益函数和利润函数

成本函数 $C(q)$表示生产数量为 q 时某产品的总成本,它包含了固定成本和可变成本两部分.

例 5(制造业成本) 现考虑一生产收音机的公司,为了开展生产,首先要建立工厂并配置机器,这些就是固定成本.而原材料和劳动力的成本属于可变成本,因为它与生产收音机的数量相关.若该公司的固定成本是 240 000 元,可变成本为每生产一台收音机需 70 元,则

$$\text{总成本} = \text{固定成本 } C_0 + \text{可变成本} = 240\,000 + 70 \times \text{台数}.$$

因此,当生产 q 台收音机时

$$C(q) = 240\,000 + 70q.$$

这是一个斜率为 70 截距为 240 000 的直线方程(见图 1.4).

收益函数 $R(q)$给出了由销售数量为 q 的某种产品的总收益.若产品的单价为 p,销量为 q,则

$$R(q) = pq.$$

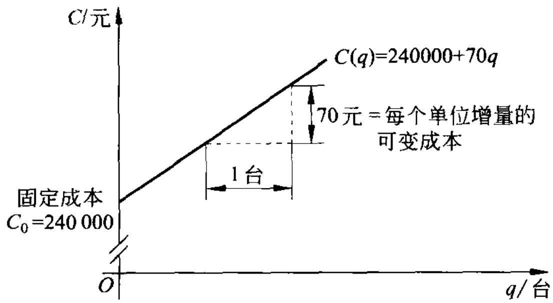

图 1.4 收音机制造的成本函数

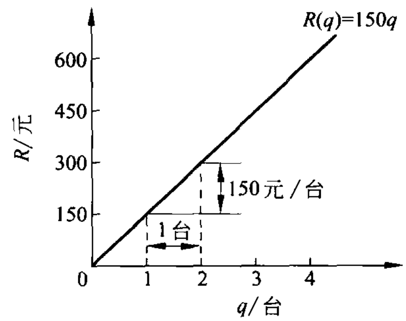

图 1.5

例 6 如果每台收音机售价为 150 元,画出制造商的收益曲线,并在图中指出收音机的单价.

解 由于 $R(q)=pq=150q$,收益曲线是斜率为 150 且通过原点的直线.见图 1.5.价格是直线的斜率.

例 7 在同一坐标系中画出成本函数 $C(q)=240\,000+70q$ 和收益函数 $R(q)=150q$,并计算 q 为何值时公司能赚钱?

解 公司赚钱是在收益大于成本时,在图 1.6 上的表现为 $R(q)$曲线位于 $C(q)$上方时对应的 q 值范围.现计算两条曲线的交点.

由 $R(q)=C(q)$得 $150q=240\,000+70q$,可解出 $q=3000$,因此当销售超过 3000 台时,公司赢利,当它生产或销售少于 3000 台时亏损.

决策通常根据经营能否获利而定,若以 L 表示利润,R 为价格,则

$$L = R - C.$$

无盈亏点是当收益等于成本时利润为 0 对应的点.

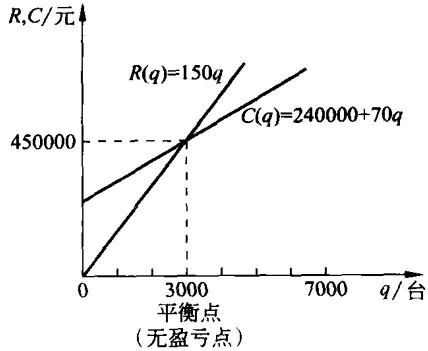

图 1.6

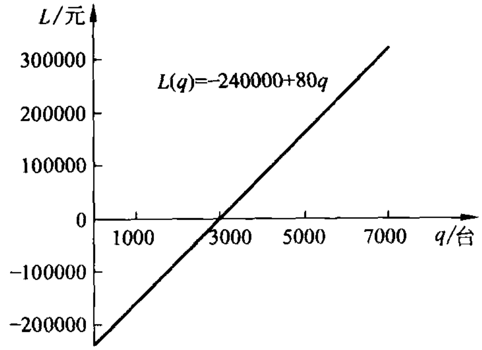

图 1.7

例 8　找出收音机制造商的利润函数，画出曲线，并标出无盈亏点.

解　由 $R(q)=150q$ 和 $C(q)=240\,000+70q$ 有

$$L(q)=R(q)-C(q)=150q-(240\,000+70q)=-240\,000+80q.$$

值得注意的是，图 1.7 中利润函数曲线的纵向截距正是固定成本的负值，而水平截距是无盈亏点.

边际成本、边际收益和边际利润

边际成本、边际收益或边际利润是指在生产的某个时刻再增加生产一个单位的产品，或刚生产出来的那一个单位的产品的成本、收益或利润的变化率或斜率. 如收音机制造的边际成本、边际收益、边际利润分别是每台 70 元、150 元和 80 元，这里它们都是常数. 实际上，边际成本、边际收益和边际利润通常是产量的函数.

变化率及其几何意义

在前面讨论的问题中，函数关系都是直线关系，变化率都是常数. 对于更一般的函数 $y=f(x)$，我们可以用如下公式计算 x 在 $[a,b]$ 区间上 y 的平均变化率 $\bar{y}$：

$$\bar{y}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

在图 1.8 中，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 对应着割线 MN 的斜率. 如果把 Δx 区间分半，并且固定 a 点不变，则可计算 $\left[a,a+\frac{\Delta x}{2}\right]$ 上的平均变化率

$$\bar{y}\left(a,\frac{\Delta x}{2}\right)=\frac{f\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right)-f(a)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

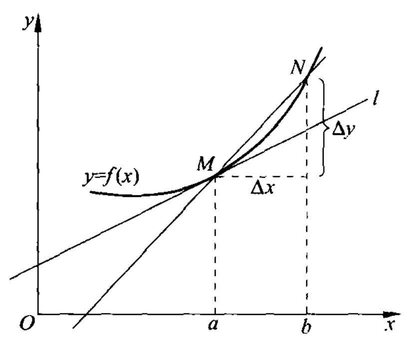

图 1.8