大学预科系列教材

数学

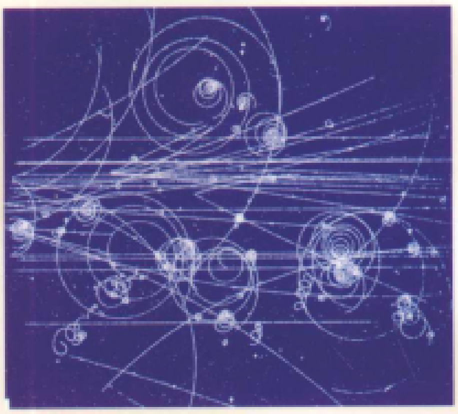
SHUXUE

SHUXUE

暨南大学华文学院预科部 编

暨南大学出版社

SHUXUE



责任编辑：暨　南　木　子　郭军方
责任校对：黄　球
封面设计：山　内

ISBN 978-7-81135-551-2

定价：58.00元

大学预科系列教材

数学

SHUXUE

暨南大学华文学院预科部　编

主编　赖章荣

编者　岑　文　谢益民　张　卓

谭学功　刘岑枫　赖章荣

刘家有

暨南大学出版社

JINAN UNIVERSITY PRESS

中国·广州

图书在版编目（CIP）数据

数学/暨南大学华文学院预科部编．—广州：暨南大学出版社，2010.8
（大学预科系列教材）
ISBN 978－7－81135－551－2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①暨… Ⅲ.①数学课—高中—教材 Ⅳ.①G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 111146 号

出版发行：暨南大学出版社

地　址：中国广州暨南大学
电　话：总编室（8620）85221601
营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
邮　编：510630
网　址：http：//www.jnupress.com　http：//press.jnu.edu.cn

排　版：广州市天河星辰文化发展部照排中心
印　刷：佛山市浩文彩色印刷有限公司

开　本：787mm×1092mm　1/16
印　张：19.5
字　数：507 千
版　次：2010 年 8 月第 1 版
印　次：2010 年 8 月第 1 次
印　数：1—2000 册

定　价：58.00 元

大学预科的教与学（序）

大学预科教育即大学预备教育。大学预科教育在暨南大学有着悠久的历史。早在20世纪20年代，当时的国立暨南大学就专为海外学生（当时主要是华人华侨学生）来华学习设立预科，为有需要的学生补习华文等科目，以为进入大学阶段的专业学习奠定必要的专业基础，深受海外学生的欢迎。20世纪80年代以来，暨南大学的预科教育随着大学教育改革的深化，无论是教学水平和质量，还是办学规模与社会效益，又有了很大发展，为大学各专业输送了一批又一批优秀的本科学生。因此，暨南大学预科也成为港澳台及海外华人华侨学生与其他外国留学生进入大学前预科学习的热门选择。

大学预科教育作为高等教育的预备阶段，无疑是高等教育不可或缺的一个组成部分，因而它也是高等教育学科不可或缺的一个分支学科，我们可以把它命名为“大学预科教育学”。大学预科教育有自身特殊的教育规律，有自身特殊的教育对象、内容与方式，这些都是需要从理论到实践进行深入研究和探讨的。在世界范围内，大学预科教育有着悠久的历史，迄今仍在蓬勃发展，而且有着多种多样的形式和内容。如有的只是一种语言教育，称为语言预科，是专门为进入大学专业学习但语言水平尚不达标的学生而设立的；有的只是某专业的补习教育，是专为进入大学某特殊专业学习但专业基础尚达不到大学该专业基础要求的学生而设立的，如艺术预科教育等；有的是一种大学文、理科基础文化知识的综合教育，是专为进入大学文科或理科某专业学习但其文化基础知识尚欠缺的学生而设立的，暨南大学的预科教育就是这样的一种预科教育。多年来，暨南大学预科部的专家学者为此付出了许多艰辛的努力和劳动，认真总结国内外各类预科教育教学的经验和做法，探索出了一条暨南大学预科教育教学的新路子，不仅在人才培养方面取得了很大成绩，而且在大学预科教育学科建设、理论研究、教材编写、教学实践、学生专业指导等方面也取得了丰硕成果。本套“大学预科系列教材”就是暨南大学预科部几代专家学者多年来共同努力的结晶，是长期预科教育经验的总结，是多年来预科教育改革发展的结果，其系统性、科学性、创新性和实用性融为一体，必将为广大预科学生的学习又提供一套优秀的教科书，也必然受到预科师生们的欢迎。

集国内外大学预科教育的经验，可以看出，大学预科教育应根据学习者的实际需要安排教学计划，学生缺什么就补什么，一切为了学生进入大学专业学习做准备。即便是文科或理科的综合性预科教育，也应该根据学生不同的文化程度和知识水平，根据其进入大学学习所选择的专业要求，有所侧重，有的放矢，有针对性地进行教学，确实为其进入大学某专业学习奠定坚实的专业基础。比如有的学生中文水平低一些，

预科学习阶段就应该多补一些中文；有的学生英文水平低一些，预科学习阶段就应该多补一些英文；有的学生数学水平低一些，预科学习阶段就应该多补一些数学……总之，学生缺什么就应该补什么。这是大学预科教育的基本规律，也是大学预科教育的基本要求。同时，大学预科教育也是一种素质教育，为学生进入大学阶段的学习打下良好的素质基础，以便使学生进入大学后尽快地适应大学的学习方式与生活方式，培养创新性学习思维，养成良好的学习习惯与生活习惯，学会与人沟通，培养参与校园文化活动及社会活动能力，培养健康的心理素质和积极的社会实践动手能力。这既是对预科教育教学提出的基本要求，同时也是对广大预科学生学习提出的一般要求。教与学是相辅相成的，所谓教学相长是也。大学预科教育教学也必须教学相长，才能真正实现大学预科教育的目的。

教材既是教育思想的反映，又是教学对象特点与要求的反映，同时也是教学法观念的体现。大学预科教材亦是如此。教材在教学的全过程中发挥着重要作用。教师在教学过程中要认真研究教材，吃透教材，灵活运用教材，指导学生用好教材，学好教材。学生在学习过程中也要学会使用教材，灵活地学习教材，做到举一反三，充分发挥教材在学习过程中的引导作用。无论教师还是学生，都要避免机械、生硬地使用教材，反对教条主义、本本主义。任何好教材都需要老师和学生的密切配合与合作，需要老师和学生的共同努力，才能真正发挥其作用，体现其价值。我们有理由相信，大学预科教育在广大预科教师与学生的共同努力下，一定会越办越好。

是为序。

贾益民
（暨南大学副校长）
2010 年 8 月于暨南园

目　录

第一章　函　数

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系. 本章将介绍集合、映射、函数、初等函数等基本概念以及它们的一些基本性质.

第一节　集　合

一、集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，“集合”一词与我们日常熟悉的“整体”“一类”“一群”等词语的意义相近. 例如“物理书的全体”“地球上的人的全体”“实数的全体”等都可以分别看成一些“对象”的集合. 一般地，把一些能够确定的不同的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的**集合**(或**集**). 构成集合的每个对象叫做这个集合的**元素**.

集合通常用大写英语字母 A，B，C，…表示，它们的元素通常用小写英语字母 a，b，c，…表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 含有有限个元素的集合叫做**有限集**；含有无限个元素的集合叫做**无限集**；不含有任何元素的集合叫做**空集**，记作 ϕ.

集合有如下特性：

(1) 确定性：作为一个集合的元素，必须是确定的. 这就是说不能确定的对象就不能构成集合. 也就是说，给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了.

(2) 互异性：对于一个给定的集合，集合中的元素一定是互不相同的(或说是互异的). 这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象，相同的对象归入同一个集合时只能算作集合的一个元素.

(3) 无序性：对于一个集合，通常不考虑它的元素之间的顺序，两个集合只要它们的元素全相同，就是同一个集合.

我们约定，用某些大写英语字母表示常用的一些数集：

全体非负整数组成的集合，叫做**自然数集**(或**非负整数集**)，记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\left\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\right\};$$

在自然数内排除 0 的集合，叫做**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^{*}$ 或 $\mathbf{N}_{+}$，即

$$\mathbf{N}^* = \mathbf{N}_+ = \{1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

全体整数组成的集合，叫做**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z} = \{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体有理数组成的集合，叫做**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}_+ \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\};$$

全体实数组成的集合，叫做**实数集**，记作 $\mathbf{R}$，全体正实数组成的集合记为 $\mathbf{R}^+$.

表示集合的方法通常有以下两种：

一种是**列举法**，就是把集合的元素一一列举出来，并用花括号“{ }”括起来表示集合的方法. 例如，由元素 1，2，3，4，5 组成的集合 A，可以表示成

$$A = \{1,2,3,4,5\}.$$

另一种是**描述法**，就是用集合所含元素的共同特征表示集合的方法. 若集合 A 是由集合 I 中具有性质 $p(x)$ 的所有元素构成的，就表示成

$$A = \{x \in I \mid p(x)\}.$$

例如，集合 B 是方程 $x^2-3x-2=0$ 的解集，就可以表示成

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2-3x-2=0\}.$$

在不致发生误解时，x 的取值集合可以省略不写. 例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中取值，“$\in \mathbf{R}$”常常省略不写. 上述集合 B 可以写成

$$B = \{x \mid x^2-3x-2=0\}.$$

有时也用**维恩**(Venn)**图**表示集合. 用平面内一个封闭曲线的内部表示一个集合，这个区域通常叫做**维恩**(Venn)**图**. 如图 1－1 所示表示集合 A.

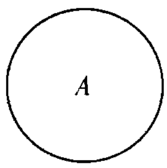


图 1－1

例 1 用列举法表示下列集合：

(1) {不大于 5 的自然数}；

(2) $\{x \mid x^2-2x-8<0,\ x \in \mathbf{Z}\}$；

(3) $\{(x,\ y) \mid x+2y=7,\ x,\ y \in \mathbf{N}^*\}$.

解：（1）$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$；

（2）$\{x \mid -2<x<4, x\in \mathbf{Z}\}=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$；

（3）$\{(1, 3), (3, 2), (5, 1)\}$.

例 2 用描述法表示下列集合：

（1）所有 10 的整数次幂；　　（2）$\{1, -3, 5, -7, 9, -11, \cdots\}$.

解：（1）$\{x \mid x=10^n, n\in \mathbf{Z}\}$；　　（2）$\{x \mid x=(-1)^{n+1}(2n-1), n\in \mathbf{N}^*\}$.

二、集合之间的关系与运算

1. 集合之间的关系

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

按照上述定义，任意一个集合 A 都是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

我们规定空集是任意一个集合的子集，也就是说，对任意集合 A，都有 $\phi\subseteq A$.

如果集合 A 是集合 B 的子集，并且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**，记作

$$A \subsetneqq B (\text{或 } B \supsetneqq A),$$

读作“A 真包含于 B”或“B 真包含 A”，用图形表示如图 1－2 所示.

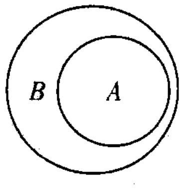


图 1－2

例如，集合 $A=\{1, 2\}$，$B=\{1, 2, 3, 4\}$，由观察可知，集合 A 是集合 B 的子集，但 $3\in B$，$3\notin A$，所以集合 A 是集合 B 的真子集，即 $A\subsetneqq B$.

根据子集、真子集的定义可推知：

对于集合 A，B，C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

对于集合 A，B，C，如果 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

一般地，如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，反过来，集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素，那么我们就说**集合 A 等于集合** B，记作

$$A = B.$$

例如，集合 $A=\{1, 2\}$，$B=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，则 $A=B$.

由相等的定义，可得：

如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则 $A=B$；反之，如果 $A=B$，则 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

例 3 写出集合$\{0, 1, 2\}$的所有子集及真子集.

解：集合$\{0, 1, 2\}$的所有子集是 ϕ，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0, 1\}$，$\{0, 2\}$，$\{1, 2\}$，$\{0, 1, 2\}$；

集合$\{0, 1, 2\}$的所有真子集是 ϕ，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0, 1\}$，$\{0, 2\}$，$\{1, 2\}$.

例 4 说出下列每对集合之间的关系：

（1）$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{1, 3, 5\}$；

（2）$P=\{x \mid x^2=1\}$，$Q=\{x \mid |x|=1\}$；

（3）$C=\{x \mid x \text{ 是奇数}\}$，$D=\{x \mid x \text{ 是整数}\}$.

解：（1）$A \supsetneqq B$；　（2）$P=Q$；　（3）$C \subsetneqq D$.

例 5　用适当的符号（$\in$，$\notin$，$=$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$）填空：

（1）0 ______ ϕ；　（2）0 ______ $\{0\}$；　（3）ϕ ______ $\{0\}$；

（4）a ______ $\{a\}$；　（5）ϕ ______ $\{a, b\}$；　（6）$\mathbf{Z} \cup \mathbf{N}$ ______ $\mathbf{N}$；

（7）$\mathbf{Q} \cup \mathbf{Z}$ ______ $\mathbf{R}$；　（8）$\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}$ ______ $\mathbf{N}$；　（9）$A \cup B$ ______ B.

解：（1）$\notin$；　（2）$\in$；　（3）$\subsetneqq$；　（4）$\in$；　（5）$\subsetneqq$；　（6）$\supsetneqq$；

（7）$\subsetneqq$；　（8）$\supsetneqq$；　（9）$\supsetneqq$.

2. 集合的运算

过去我们只对数或式进行算术运算或代数运算，这里集合运算的含义是，由两个已知的集合，按照某种指定的法则，构造出一个新的集合. 集合的基本运算有以下几种：交集、并集和补集.

对于两个给定的集合 A，B，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与集合 B 的**交集**，记作 $A \cap B$，读作"A 交 B"，即

$$A \cap B = \left\{x \middle| x \in A \text{ 且 } x \in B\right\}.$$

例如，$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6, 8\} = \{3, 4, 5\}$.

集合 A 与集合 B 的交集，可用如图 1－3 所示的阴影部分表示.

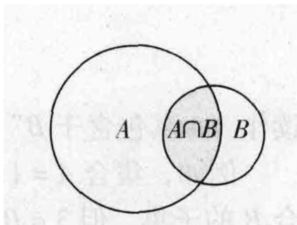


图 1－3

例 6　求下列每对集合的交集：

（1）$A=\{x \mid x^2+2x-3=0\}$，$B=\{x \mid x^2-x-12=0\}$；

（2）$C=\{2, 5, 7, 9\}$，$D=\{3, 6, 8, 10, 12\}$.

解：（1）$A \cap B=\{1, -3\} \cap \{-3, 4\}=\{-3\}$；

（2）$C \cap D=\phi$.

4

例 7　设集合 $A=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$，$B=\{x \mid x>0\}$，求 $A \cap B$.

解：$A \cap B=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\} \cap \{x \mid x>0\}=\{x \mid 0<x \leqslant 1\}$.

例 8　设集合 $A=\{x \mid x$ 是奇数$\}$，$B=\{x \mid x$ 是偶数$\}$，$\mathbf{Z}=\{x \mid x$ 是整数$\}$，求 $A \cap \mathbf{Z}$，$B \cap \mathbf{Z}$，$A \cap B$.

解：$A \cap \mathbf{Z}=\{x \mid x$ 是奇数$\} \cap \{x \mid x$ 是整数$\}=\{x \mid x$ 是奇数$\}=A$，

$B \cap \mathbf{Z}=\{x \mid x$ 是偶数$\} \cap \{x \mid x$ 是整数$\}=\{x \mid x$ 是偶数$\}=B$，

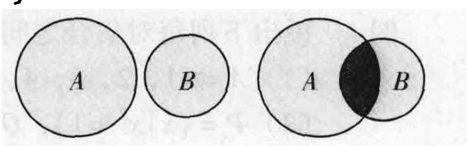
$A \cap B=\{x \mid x$ 是奇数$\} \cap \{x \mid x$ 是偶数$\}=\phi$.

一般地，对于两个给定的集合 A，B，把它们所有的元素并在一起构成的集合，叫做集合 A 与集合 B 的**并集**，记作 $A \cup B$，读作"A 并 B"，即

$$A \cup B = \left\{x \middle| x \in A \text{ 或 } x \in B\right\}.$$

例如，$\{2,4\} \cup \{5,6,8\} = \{2,4,5,6,8\}$，$\{1,3,5\} \cup \{2,3,4,6,7\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

集合 A 与集合 B 的并集，可用如图 1－4（1）或（2）中的阴影部分表示.



（1）　（2）

图 1－4

例 9 已知集合 $\mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是有理数$\}$，$\mathbf{Z}=\{x \mid x$ 是整数$\}$，求 $\mathbf{Q} \cup \mathbf{Z}$.

解： $\mathbf{Q} \cup \mathbf{Z}=\{x \mid x$ 是有理数$\} \cup \{x \mid x$ 是整数$\}=\{x \mid x$ 是有理数$\}=\mathbf{Q}$.

例 10 设集合 $A=\{x \mid -1<x<2\}$，$B=\{x \mid 1<x<3\}$，求 $A \cup B$.

解：
$$\begin{aligned} A \cup B &=\{x \mid -1<x<2\} \cup \{x \mid 1<x<3\} \\ &=\{x \mid -1<x<3\}. \end{aligned}$$

在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常都是一个给定的集合的子集，这个给定的集合叫做**全集**，用符号 U 表示.

如果集合 A 是全集 U 的一个子集（即 $A \subseteq U$），由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合，叫做集合 A 在 U 中的**补集**，记作$\complement_U A$，读作“A 在 U 中的补集”，即

$$\complement_U A=\left\{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\right\}.$$

集合 A 在全集 U 中的补集，可以用如图 1－5 所示的阴影部分表示.

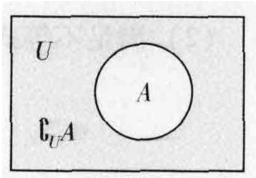


图 1－5

集合的并集、交集、补集运算满足下列法则：

若 A，B，C 为集合，则

（1）等幂律：$A \cup A=A$，$A \cap A=A$；

（2）交换律：$A \cup B=B \cup A$，$A \cap B=B \cap A$；

（3）结合律：$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$，
$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$；

（4）分配律：$(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup (B \cap C)$，
$(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap (B \cup C)$；

（5）De Morgen 律：$\complement_U(A \cup B)=(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$，$\complement_U(A \cap B)=(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$.

例 11 已知集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$A=\{1, 3, 5, 7\}$，求$\complement_U A$，$A \cap (\complement_U A)$，$A \cup (\complement_U A)$.

解： $\complement_U A=\{2, 4, 6, 8\}$，$A \cap (\complement_U A)=\phi$，$A \cup (\complement_U A)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}=U$.

例 12 已知集合 $U=\{x \mid x$ 是实数$\}$，$\mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是有理数$\}$，求$\complement_U \mathbf{Q}$.

解： $\complement_U \mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是无理数$\}$.

例 13 设集合 $U=\{x \mid x \leqslant 8, x \in \mathbf{N}^*\}$，$A=\{3, 4, 5\}$，$B=\{4, 7, 8\}$，求$\complement_U A$，$\complement_U B$，$(\complement_U A) \cap B$，$A \cup (\complement_U B)$，$\complement_U(A \cup B)$.

解： $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，则

$\complement_U A=\{1, 2, 6, 7, 8\}$，$\complement_U B=\{1, 2, 3, 5, 6\}$，

$(\complement_U A) \cap B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$A \cup (\complement_U B)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

又 $A \cup B=\{3, 4, 5, 7, 8\}$，则

$\complement_U(A \cup B)=\{1, 2, 6\}$.

例 14 设方程 $x^2-px+15=0$ 的解集为 A，方程 $x^2-5x+q=0$ 的解集为 B，当 $A \cup B=\{2, 3, 5\}$，$A \cap B=\{3\}$时，求集合 A 和 B 以及实数 p 和 q 的值.

解： 由 $A \cap B=\{3\}$，可知 3 是两个方程的公共根，所以

$$\begin{cases} 3^2-3p+15=0, \\ 3^2-5 \times 3+q=0. \end{cases}$$

得 $\begin{cases} p=8, \\ q=6. \end{cases}$

解方程 $x^2-8x+15=0$，得 $x_1=3$，$x_2=5$；

解方程 $x^2-5x+6=0$，得 $x_1=3$，$x_2=2$.

$\therefore A=\{3,5\}$，$B=\{2,3\}$.

三、区间

设 a，b 是两个实数，并且 $a<b$，那么

（1）满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间，记作 $[a,b]$［见图1－6(1)］，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\};$$

（2）满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，记作 (a,b)［见图1－6(2)］，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\};$$

（3）满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合，叫做半开闭区间，分别记作 $[a,b)$，$(a,b]$［见图1－6（3）（4）］，即

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

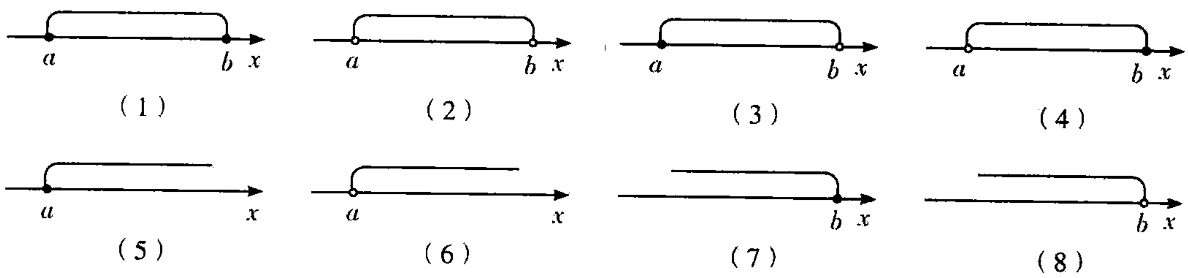


图1－6

全体实数的集合 **R** 表示为 $(-\infty,+\infty)$，“∞”读作“无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”. 我们可以把满足 $x\geqslant a$，$x>a$，$x\leqslant b$，$x<b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$［见图1－6(5)(6)(7)(8)］.

这里的实数 a 与 b 都叫做相应区间的**端点**，在数轴上表示区间时，属于这个区间端点的实数，用实心圆点表示，不属于这个区间端点的实数，用空心圆点表示.