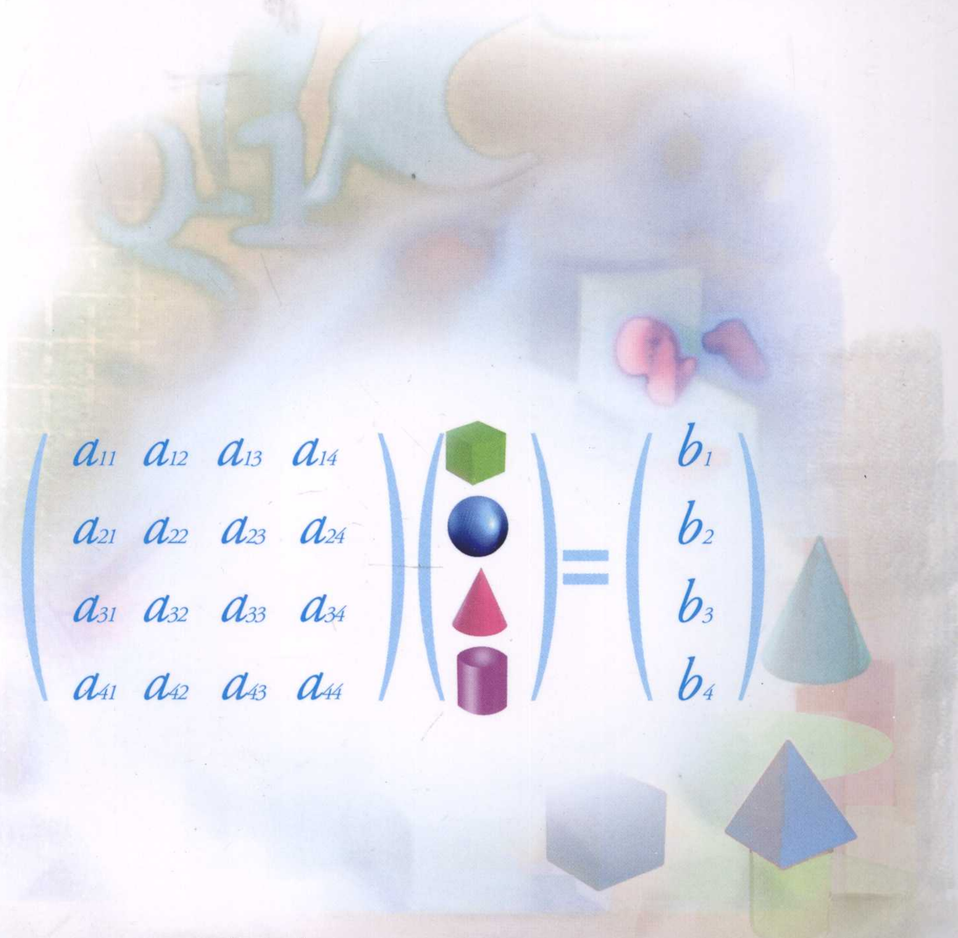
21世纪高等院校数学规划系列教材

主编 肖筱南

线性代数

XIANXING DAISHU

编著者 林大兴 蔡忠俄 周小林



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪
高等院校数学规划系列教材 / 主编　肖筱南

线性代数

编著者　林大兴　蔡忠俄　周小林

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/林大兴,蔡忠俄,周小林编著. —北京:北京大学出版社,2010.8
(21世纪高等院校数学规划系列教材)
ISBN 978-7-301-17629-0

Ⅰ.线… Ⅱ.①林… ②蔡… ③周… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第155362号

书　　名:线性代数
著作责任者:林大兴　蔡忠俄　周小林　编著
责 任 编 辑:潘丽娜
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-17629-0/O·0820
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址:http://www.pup.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:邮购部62752015　发行部62750672　理科编辑部62752021　出版部62754962
印 刷 者:北京中科印刷有限公司
经 销 者:新华书店
787mm×960mm　16开本　10.5印张　220千字
2010年8月第1版　2010年8月第1次印刷
定　　价:21.00元

内容简介

本书是《21 世纪高等院校数学规划系列教材》之一——《线性代数》. 它是根据教育部颁发的《本科经济类、理工科数学基础教学大纲》,并在总结编者多年讲授线性代数课程经验的基础之上,精心编写而成.

全书共分六章,内容包括: 矩阵及其运算;行列式;向量组的线性相关性与矩阵的秩;线性方程组;矩阵的特征值与特征向量;二次型等. 本书先从较为简单的矩阵运算开始,逐步展开线性代数的其他内容. 在内容的编排顺序上,尽量做到: 前面讲的内容,不"预支"在后面才讲到的概念与结论. 例如,"克莱姆(Cramer) 法则"由于涉及线性方程组的概念,就把它作为方程组的一种特殊解法安排在线性方程组这一章.

本书每节均配有习题,每章也配有题型多样的复习题. 对每道习题与复习题,书末均附有参考答案;对"证明题"均给出提示或证明思路;对难度较大的"计算题",除了给出结果的参考答案,还给出计算过程的提示,目的是为了给使用本书的读者提供更多的帮助信息.

本书可以作为高等院校理工科、经济类各专业学生学习线性代数的教材;同时由于所配置的各章复习题,题型多样,且具有一定的代表性,因而本书也适合有志于考研的学生,作为考研的参考书之用.

《21 世纪高等院校数学规划系列教材》书目

高等数学(上册)	林建华等编著
高等数学(下册)	林建华等编著
微积分	曹镇潮等编著
线性代数	林大兴等编著
新编概率论与数理统计(第 2 版)	肖筱南等编著

前　言

随着我国高等教育改革的不断深入，根据 2009 年教育部关于要求全国高等学校认真实施本科教学质量与教学改革工程的通知精神，为了更好地适应 21 世纪对高等院校培养复合型高素质人才的需要，北京大学出版社计划出版一套对国内高等院校本科大学数学课程教学质量与教学改革起到积极推动作用的《21 世纪高等院校数学规划系列教材》. 应北京大学出版社的邀请，我们这些长期在教学第一线执教的教师，经过统一策划、集体讨论、反复推敲、分工执笔编写了这套教材，其中包括：《高等数学（上册）》、《高等数学（下册）》、《微积分》、《线性代数》、《新编概率论与数理统计（第 2 版）》.

在结合编写者长期讲授本科大学数学课程所积累的成功教学经验的同时，本套教材紧扣教育部本科大学数学课程教学大纲，紧紧围绕 21 世纪大学数学课程教学改革与创新这一主题，立足大学数学课程教学改革新的起点、新的高度狠抓了教材建设中基础性与前瞻性、通俗性与创新性、启发性与开拓性、趣味性与科学性、直观性与严谨性、技巧性与应用性的和谐与统一的“六突破”. 实践将会有力证明，符合上述先进理念的优秀教材，将会深受广大学生的欢迎.

本套教材的特点还体现在：在编写过程中，我们按照本科数学基础课要“加强基础，培养能力，重视应用”的改革精神，对传统的教材体系及教学内容进行了必要与精心的调整和改革，在遵循本学科科学性、系统性与逻辑性的前提下，尽量注意贯彻深入浅出、通俗易懂、循序渐进、融会贯通的教学原则与直观形象的教学方法. 既注重数学基本概念、基本定理和基本方法的本质内涵的辩证、多侧面的剖析与阐述，特别是对它们的几何意义、物理背景、经济解释以及实际应用价值的剖析，又注意学生基本运算能力的训练与综合分析问题、解决问题能力的培养，以达到便于教学与自学之目的；既兼顾教材的前瞻性，注意汲取国内外优秀教材的优点，又注意到数学基础课与相关专业课的联系，为各专业后续课程打好坚实的基础.

为了帮助各类学生更好地掌握本课程内容，加强基础训练和基本能力的培养，本套教材紧密结合概念、定理和运算法则配置了丰富的例题，并做了深入的剖析与解答. 每节配有适量习题，每章配有复习题，以供读者复习、巩固所学知识；书末附有习题答案与提示，以便读者参考.

本套规划系列教材的编写与出版，得到了北京大学出版社及厦门大学嘉庚学院的大力支持与帮助，刘勇副编审与责任编辑潘丽娜为本套教材的出版付出了辛勤劳动，在此一并表

示诚挚的谢意.

本书第一、二章由林大兴编写，第三、四章由蔡忠俄编写，第五、六章由周小林编写.全书先由林大兴、周小林负责修改与统稿，最后由肖筱南负责审稿、定稿.

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正！

编　者

2010 年 5 月

目　　录

第一章 矩阵及其运算

> 矩阵是数学中最重要的基本概念之一，是代数学的一个主要研究对象，也是数学研究及应用的一个重要工具.本章主要介绍矩阵的相关概念，代数运算，初等变换以及求逆运算.

§1.1 矩阵的概念

一、$m\times n$ 矩阵

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的长方形数表，称为 $m\times n$ **矩阵**，记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

矩阵(1)中，横向的一排数称为矩阵的**行**，从上至下依次为第 1 行，第 2 行，……，第 m 行；竖向的一排数称为矩阵的**列**，从左到右依次为第 1 列，第 2 列，……，第 n 列.

这 $m\times n$ 个数 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**，a_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素，称为该矩阵的 (i,j) **元素**，其中 i 为该元素的**行指标**，j 为该元素的**列指标**. 为了简便起见，一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可简记为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}.$$

在无须标出行数、列数的情况下，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可简写为 (a_{ij}). 矩阵常用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等大写黑体字母表示，例如，用 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times 3}$ 来表示元素为 a_{ij} 的 2×3 矩阵.

矩阵的概念是从实际生活中抽象出来的. 例如，某种物资有 m 个产地：$A_1,A_2,\cdots,A_m$；n 个销地：$B_1,B_2,\cdots,B_n$. 假设从产地 A_i 运到销地 B_j 的物资数量为 c_{ij}，则从各个产地运到各个销地的调运计划就可以用下

面的矩阵表示：

$$
\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{array} \\
\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}.
$$

二、几种特殊的矩阵

1. **零矩阵** 所有元素都是零的矩阵称为**零矩阵**.

例如，$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$为 2×3 的零矩阵，简记为 $\boldsymbol{O}_{2\times3}$. 在无须标出行数、列数的情况下，也可以用 $\boldsymbol{O}$ 表示.

2. **行矩阵与列矩阵** 只有一行的矩阵$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为**行矩阵**，只有一列的矩阵$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$称为**列矩阵**，以后我们也分别称其为**行向量**和**列向量**.

3. **方阵** 当一个矩阵的行数与列数相等时，则称它为**方阵**. 当行数与列数都等于 n 时，则称它为 n **阶方阵**.

4. **对角矩阵** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为 n 阶方阵，若对任意的 $i,j(i\neq j)$都有 $a_{ij}=0$，即

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},
$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**，简记为 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的(i,i)元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$称为 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线元素**.

若 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$，则称 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$为**数量矩阵**. 特别地，当 $a=1$

时，称$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$为**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{E}$，n 阶单位矩阵也记为 $\boldsymbol{E}_n$.

5. **三角矩阵** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为 n 阶方阵，若当 $i>j$ 时，有 $a_{ij}=0$，则称

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为**上三角矩阵**；若当 $i<j$ 时，有 $a_{ij}=0$，则称

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为**下三角矩阵**. 显然，对角矩阵既是上三角矩阵也是下三角矩阵. 上三角与下三角矩阵统称为**三角矩阵**.

三、同型矩阵与矩阵相等

若两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 行数相同，列数也相同，则称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**.

当矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\quad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}.$$

若对任意的 $i,j(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$都有 $a_{ij}=b_{ij}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

由矩阵相等可确定矩阵的元素. 例如，由$\begin{bmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & x \\ y & 1 \end{bmatrix}$可得：$a=2,b=1,x=3,y=-2$.

习 题 1.1

1. 某三个工厂生产同一种化肥，假设工厂 $i(i=1,2,3)$在去年第 $j(j=1,2,3,4)$季度生产化肥的产量为 $b_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$，试用矩阵表示这三个工厂在去年 4 个季度的生产情况.

2. 写出由下面各式给出的 2×3 矩阵(a_{ij})，其中用 a_{ij} 表示矩阵的(i,j)元素：

(1) $a_{ij}=i+j$；　　(2) $a_{ij}=j-i$；

(3) $a_{ij}=i\cdot j$；　　(4) $a_{ij}=\dfrac{j}{i}$.

§1.2 矩阵的代数运算

一、矩阵的加(减)法运算

定义 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相加：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix},$$

其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$. 同样，可以定义两个同型矩阵相减：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n},$$

其中 $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$.

也就是说，两个同型矩阵相加(减)就是把它们的对应元素相加(减). 由元素之间的加法运算法则，易知矩阵的加法满足以下运算法则：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$(**交换律**)；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$(**结合律**)；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$,

其中矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 都是同型矩阵.

例 1 求满足 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

解 由 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$ 两边同减矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

二、矩阵的数乘运算

定义 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k$ 为一常数，则矩阵

$$\boldsymbol{C}=k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=(c_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，记做 $\boldsymbol{C}=k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$. 数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积运算称为**数乘运算**.

也就是说，用一个常数 k 去乘一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，就是把 $\boldsymbol{A}$ 的各个元素都乘以常数 k. 由元素之间的乘法运算法则，易知矩阵的数乘满足以下运算法则：

(1) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$;

(3) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(4) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$,

其中矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，k,l 均为常数.

例如，

$$4\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4 & -4 & 8\\ 0 & 12 & -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & -6 & 9\\ 3 & 12 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ -3 & 0 & -7\end{bmatrix}.$$

矩阵的加法与数乘运算统称为矩阵的**线性运算**.

三、矩阵的乘法运算

定义 3 设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times t}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mt}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{t\times n}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tn}\end{bmatrix}.$$

则矩阵

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}=\left(\sum_{k=1}^{t}a_{ik}b_{kj}\right)=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记做 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$. 记号 $\boldsymbol{AB}$ 常读做 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

也就是说，两个矩阵施行乘法运算，前一个矩阵的列数必须与后一个矩阵的行数相同，此时所得乘积矩阵其行数等于前一个矩阵的行数，其列数等于后一个矩阵的列数，它的 (i,j) 元素 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{it}b_{tj}$ 表示前一个矩阵的第 i 行与后一个矩阵的第 j 列的对应元素的乘积之和.

由定义，易知矩阵的乘法满足下列运算法则(假定运算都是可行的)：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ (**结合律**);

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$ (**左分配律**);

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ (**右分配律**);

(4) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$ (其中 k 为常数);

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,则 $\boldsymbol{AE}_n=\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$. 特别当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵时,$\boldsymbol{AE}_n=\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$. 可见单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 在矩阵乘法中的作用类似于数乘法中的单位 1.

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&-1\\3&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\-1&1&2\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$ 的(3,2)元素.

解 因为 $\boldsymbol{AB}$ 的(3,2)元素 c_{32} 为 $\boldsymbol{A}$ 的第三行与 $\boldsymbol{B}$ 的第二列的对应元素的乘积之和,所以

$$c_{32}=3\times(-1)+2\times1=-1.$$

例 3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$.

解 $\boldsymbol{A}$ 为 2×2 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 2×3 矩阵,因为 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同,所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}&a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}&a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 4 设矩阵 $\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$,已知 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$,将 y_1,y_2 用 x_1,x_2,x_3 表示.

解 由 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 得 $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\2x_1+3x_2+4x_3\end{bmatrix}$, 即

$$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+3x_3,\\y_2=2x_1+3x_2+4x_3.\end{cases}$$

例 5 设矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&2\\0&2&-2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\\1&-2\end{bmatrix}$,已知 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AY},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BZ}$,将 x_1,x_2,x_3 用 z_1,z_2 表示.

解 由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AY},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BZ}$ 得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{ABZ}$,所以

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&2\\0&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&4\\0&1\\-2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2z_1+4z_2\\z_2\\-2z_1+6z_2\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -2z_1 + 4z_2, \\ x_2 = \qquad\quad z_2, \\ x_3 = -2z_1 + 6z_2. \end{cases}$$

例 6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$.

这表明：两个 n 阶对角矩阵的乘积仍为对角矩阵，其主对角线元素为两个对角矩阵对应的主对角线元素的乘积.

值得注意的是，通常数的某些乘法运算法则对于矩阵的乘法却不一定成立.

首先，矩阵的乘法一般不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 这是因为：

第一，即使 $\boldsymbol{AB}$ 有定义，$\boldsymbol{BA}$ 却不一定有定义. 例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$，但 $\boldsymbol{BA}$ 没有定义.

第二，即使 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 都有定义，但它们可能不同型，所以谈不上相等. 例如，$\boldsymbol{A}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=4$（$1\times1$ 矩阵），而 $\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$（$3\times3$ 矩阵）.

第三，即使 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 都有定义，而且也同型，但它们也不一定相等. 例如，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}，但\ \boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}.$$

当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **可交换**. 只有在某些特殊情况下才可交换，例如，n 阶数量矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=a\boldsymbol{E}_n,$$

则对于任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换：