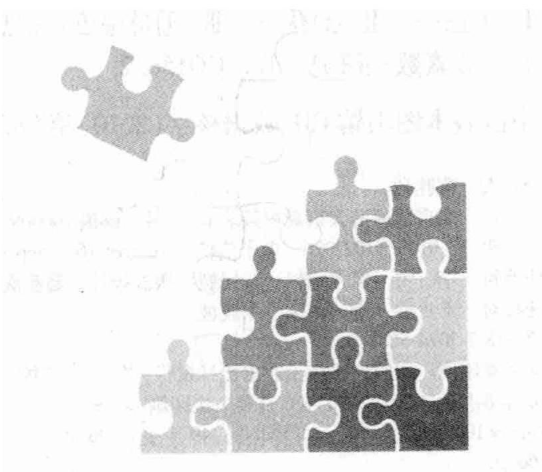
正奇数为素数的判断方程
哥德巴赫猜想的证明

乔鸿彬　著

冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press

正奇数为素数的判断方程
哥德巴赫猜想的证明

乔鸿彬　著



北京
冶金工业出版社
2010

内 容 简 介

本书共5章。首先探讨、设置和寻找证明哥德巴赫猜想所需要的理论知识和理想研究数段，给出了正奇数为素数的必要条件和判断方程，接着提出了适合研究哥德巴赫猜想的数学模型——偶数等分对应模型、猜想的证明方法和步骤，最后给出了哥德巴赫猜想的完整证明。本书可供从事数学教学的老师及学生、数学爱好者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

正奇数为素数的判断方程：哥德巴赫猜想的证明/乔鸿彬著．—北京：冶金工业出版社，2010.6

ISBN 978-7-5024-5281-0

Ⅰ.①正… Ⅱ.①乔… Ⅲ.①哥德巴赫猜想—研究 ②素数—研究 Ⅳ.①O156.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第085042号

出 版 人 曹胜利
地　　址 北京北河沿大街嵩祝院北巷39号，邮编100009
电　　话 (010) 64027926 电子信箱 postmaster@cnmip.com.cn
责任编辑 李 雪 美术编辑 张媛媛 版式设计 葛新霞
责任校对 王永欣 责任印制 牛晓波
ISBN 978-7-5024-5281-0
北京百善印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
2010年6月第1版，2010年6月第1次印刷
787mm×1092mm 1/32；3.75印张；49千字；106页
15.00元
冶金工业出版社发行部 电话：(010)64044283 传真：(010)64027893
冶金书店 地址：北京东四西大街46号(100711) 电话：(010)65289081

前言

几百年来，数论方面两个难度甚大的问题，一直吸引着世界上千百万数学家和数学爱好者的注意力，很多人对此有浓厚的兴趣，并展开了大量的研讨。这两个问题是：正奇数为素数的判定法则及哥德巴赫猜想的证明。直至20世纪末期，这两个问题仍未得到完满的解决。

由于本人对数学非常爱好，很早就养成一种习惯，一旦遇到疑难问题，爱冥思苦想，追根求源，始终抱着锲而不舍、意在必解的态度。1966年《人民日报》对陈景润证明“1+2”的整版报道，使我很受启发，逐渐对哥德巴赫猜想产生了兴趣。通过10年的思考探索、设想论证，逐步发现不仅按过去的方法走不下去，而且过去一些高深

的理论还会把问题引向深奥难测、陷入绝路的困境。就在1977年寒假期间，在灵感激发的一个夜晚，我贸然悟出了一个大胆的设想：既然“猜想”属于初等数论，应当能够用初等数学理论和初等数学方法，将哥德巴赫猜想通俗而完整地证明出来。我知道这是一个艰难的过程，不是短期可以奏效的。从1977年开始，我把这一难题作为一个业余研究课题来进行探讨。为实现设想，多次尝试着改变方式，选择模型，寻找证明需要的条件，设计“猜想”的最佳模拟，探讨证明的可行方法和步骤。一次试验失败了，就彻底毁掉，再从头来。就这样埋头苦钻了16年，于1993年夏天，初步总结出用初等数学理论和初等数学方法，证明哥德巴赫猜想的方式、方法和步骤。

方案既定，志在必成。1993年我离休后，就集中精力全面投入这项工作，时间和精力终算没有白费，又经过10余年的艰苦奋斗，问题已全部解决，于2004年夏完成了初稿的编写；之后经过多位数学讲师、教授的审查认定，又作了修改补充，书稿于2009年10月完成。

本书共分为5章。第1章，剖析素数的数量变化，主要介绍了素数的隐含特征、理想研究数段、素数规范表、素数与合数的内在联系、素数的分布规律与数量变化；第2章，正奇数为素数的条件和判断方法，主要介绍了正奇数为素数的必要条件和充分条件；第3章，偶数等分对应及相关问题，提出了“偶数等分对应”的数学模型，分析了偶数类型与“素对素”数量之间的具体关系；第4章，哥德巴赫猜想的研究，主要介绍了哥德巴赫猜想的研究背景、研究模型、证明方法、证明的步骤以及证明中难点的解决方法；第5章，根据初等数学的理论和方法对哥德巴赫猜想的证明，主要分5个步骤对哥德巴赫猜想给出了详细的证明。

相对于国内外的其他同类书籍，本书的独特性体现在以下四个方面。特色一，本书通过转换表达形式解决了证明方式及证明方法的可行性与可靠性；特色二，本书中提出了素数的理想研究数段，不仅能够把全部素数（2、3、5除外）规范到8个固定的数列上，使研究范围大为缩

小，更能使8类素数都有确定的表达公式，从而使素数能进行一般性的研讨，提出了正奇数为素数的必要条件和判断方法；特色三，本书提出了“偶数等分对应”的研究模型，证明哥德巴赫猜想的证明过程简化易行；特色四，本书完全采用初等数学的理论和方法给出了哥德巴赫猜想的证明方法和步骤。

本书由乔鸿彬主笔，乔应旭参与了本书部分章节的资料收集和整理工作。在写作过程中，河南理工大学的杨运良教授和杨立身教授给予了热心的帮助，并提出了许多宝贵的意见，在此向他们表示由衷的感谢。

尽管我付出了很多心血和长时间的研究，但由于猜想的难度较大，书中可能有考虑不周或值得商榷之处，欢迎广大读者批评指正。

乔鸿彬

2009年11月

目录

1　剖析素数的数量变化

素数与合数，表面上看好像没什么关系，实际上却隐含着内在的联系。由素数的隐含特征，可以引发出不少有关数论方面一些问题的新认识和新结论。本章内容就是根据素数的隐含特征，剖析素数与合数的内在联系，探讨素数在大范围内的分布规律和数量变化，为后面论证哥德巴赫猜想奠定理论基础。

众所周知，自然数的全体，除 1 以外可以分成两类：素数与合数。素数指的是除 1 和本身外没有其他约数的正整数，如 2、3、5、7、11、13、17、19、23…都是。由定义可以知道，除了素数 2 是偶数外，其他所有素数都是奇数。而素数 2 在证明中基本不用，所以本书中提到素数，都是指奇素数而言。另外整数 0 在模型中，起着很

重要的作用，这里把它放在自然数 1 的前面，作为扩大自然数。

1.1 素数的隐含特征

素数有两个重要的隐含特征，它们是推导与素数有关的规律和性质的基础。

特征 1：从 3 开始的素数（5 除外），任何一个的末位数字都是 1、3、7、9 中的某一个。

因为末位是 0、2、4、6、8 的自然数都是偶数，即是 2 的倍数，末位是 5 的都是 5 的倍数，所以任一素数（2 和 5 除外），其末位数字只能是 1、3、7、9 中的某一个。

由这一特征可知，自然数集中的所有素数（2 和 5 除外）全部分布在末位是 1、3、7、9 的数位上。为了叙述方便，不妨把末位是 1、3、7、9 的自然数对应的点叫做可素点。可素点上的数可能是素数（是素数的也可叫做素点），也可能是合数（是合数的也可叫做合点），可素点的总数占全部自然数的 2/5(10 个中有 4 个)。在研究素

数时，可单把可素点上的数列出来，就可使研究的范围大大缩小。

特征2：从3开始的素数中（5除外），任取若干个相乘，其乘积的末位数字只能是1、3、7、9中的某一个。

由特征1知道取一个素数时命题成立。

从整数乘法的运算结果知道：乘积的末位数字，可以由各因数的末位数字的乘积来确定。当在1、3、7、9中任取两个时，其乘积的可能情况是：$1\times3=3$，$1\times7=7$，$1\times9=9$，$3\times7=21$，$3\times9=27$，$7\times9=63$，其末位数字均是1、3、7、9中的某一个。当在1、3、7、9中任取3个时，其乘积共有4种情况：$1\times3\times7=21$，$1\times3\times9=27$，$1\times7\times9=63$，$3\times7\times9=189$都符合要求。当4个全取时只有一种组合：$1\times3\times7\times9=189$，当然符合要求。超过4个的情况，其结果将会同前面的重复出现，即从1、3、7、9中，允许重复任取5个时，情况同任取4个的结果再乘以1、3、7、9中的某一个，其乘积的末位数字，显然只能是1、3、7、9中的某一个，情况无须繁述。

由特征 2 可以推得：一些较大的以 1、3、7、9 为末位数字的自然数，要表示成几个因数连乘积的形式，这些因数只能从末位也是 1、3、7、9 的自然数中去选择。也就是说，这些数如果是合数的话，可以是某个素数的倍数，或某几个素数的公倍数。

1.2 素数的理想研究数段

通过多次的多种形式的试验检测，发现在研究素数的特征和有关规律时，只有把自然数按 30 个为一段的分法是最优越的。因为这种分段方法，不仅能把全部素数（2、3、5 除外）规范到 8 个固定的数列上，使研究范围大为缩小，更能使 8 类素数都有确定的表达公式，从而使素数能进行一般性的研讨，并由此得出一些新的结论。为叙述和应用方便，就把这种分法得到的数段叫做理想研究数段。其具体分法是：把自然数按 30 个为一段逐次分下去，每段中只将末位是 1、3、7、9 的数写出来，第 1 段写在第 1 行，第 2 段对应写在第 2 行，第 3 段对应写在第 3

行，以下类推，如表 1-1 所示。

表 1-1　素数规范表

1	3	7	9	11	13	17	19	21	23	27	29
31	33	37	39	41	43	47	49	51	53	57	59
61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89
91	93	97	99	101	103	107	109	111	113	117	119
121	123	127	129	131	133	137	139	141	143	147	149
151	153	157	159	161	163	167	169	171	173	177	179
181	183	187	189	191	193	197	199	201	203	207	209
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

注：1. 表中带下划线的数字表示合数，没有下划线的数字表示素数。

2. 为便于叙述将由上到下的 1 串数叫做列，并用第 1 个数表明列的位置。如 1，31，61，91…的 1 列记作列 1；3，33，63，93…的 1 列记作列 3；…；29，59，89，119…的 1 列记作列 29；共有 12 列。

这样的分法排法，在研究素数的分布及数量变化上是比较理想的。因为它有以下特点：

（1）从表 1-1 可以明显看出，列 3、列 9、列 21、列 27 这 4 列上的数（除 3 外）全是合数。为区别起见，可记作合列 3、合列 9、合列 21、合列 27。

（2）自然数中大于5的全部素数，都在表1-1中除去4个合列后的其余8列上分布着。不妨把这8列叫做素列，分别记作素列1、素列7、素列11、素列13、素列17、素列19、素列23、素列29，研究素数的变化状况时，只需抓住这8列进行研究即可。

根据特征（2）观察表1-1，容易发现，素数3的所有倍数，也即由素数3引出的合数，全部在4个合列上，而其余8个素列上出现的合数，只能是由7开始的素数7、11、13、17、19、23…中的某一个的倍数。如表1-1中的合数 $49=7\times7$，$77=7\times11$，$91=7\times13$，$133=7\times19$，$119=7\times17$，$161=7\times23$，$169=13\times13$ 等都是。

1.3 从素数与合数的内在联系看素数的数量变化

对自然数采取前面介绍的分法和排法，现在讨论当数的范围成倍扩大时，前段与后段包含素数个数的变化情况。

首先在自然数中取一个数段1，2，…，N_1，为研究

方便最好取 N_1 是30的倍数，这里取 $N_1=30\times2^1=60$，用 μ_1 表示第1个数段，即 $\mu_1=\{1,2,3,\cdots,60\}$。将数的范围扩大1倍，即 $n=2$ 时，取 $N_2=30\times2^2=120$，把数段1，2，…，60，61，62，…，120，称作第2数段，用 μ_2 表示，即 $\mu_2=\{1,2,\cdots,120\}$，其中增加的1段61，62，…，120是在 μ_1 的后面，且包含数的个数和 μ_1 相同，可记作 $\mu_1'=\{61,62,\cdots,120\}$，显然 $\mu_2=\mu_1\cup\mu_1'$。也可把 μ_1 叫做 μ_2 的前段，μ_1'叫做 μ_2 的后段。下面比较 μ_1 和 μ_1'两段中素数个数的变化。

把 μ_1'中的可素点对应写在 μ_1 的可素点下面，如表1-2所示。

表1-2　μ_1 和 μ_1'的对应关系表

1	3	7	$\underline{9}$	11	13	17	19	$\underline{21}$	23	$\underline{27}$	29	μ_1
31	$\underline{33}$	37	$\underline{39}$	41	43	47	$\underline{49}$	$\underline{51}$	53	$\underline{57}$	59	
61	$\underline{63}$	67	$\underline{69}$	71	73	$\underline{77}$	79	$\underline{81}$	83	$\underline{87}$	89	μ_1'
$\underline{91}$	$\underline{93}$	97	$\underline{99}$	101	103	107	109	$\underline{111}$	113	$\underline{117}$	$\underline{119}$	

从表1-2可以看出：4个合列上全是合数，不需考虑。在8个素列上，μ_1 中含有可素点16个，素点（素数）15