高等学校教材

概率论与数理统计

刘力维　李建军　陆中胜　谢建春　编著

高等教育出版社

高等学校教材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

刘力维　李建军　陆中胜　谢建春　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是由多位具有丰富教学经验的资深教师，根据高等学校工科类本科“概率论与数理统计”课程教学基本要求编写而成，是南京理工大学国家精品课程“概率与统计”的教学用书，内容包括概率论的基础知识、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析初步、随机过程的基本知识、平稳随机过程、S-PLUS统计软件简介。

本书通俗易懂，注意理论联系实际，有助于读者在概率统计直觉能力方面的培养与提高。本书可作为高等院校理工科非数学专业学生的教材，也可供教师及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘力维等编著. —北京：高等教育出版社，2010.5

ISBN 978-7-04-029564-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第064762号

策划编辑 杨 帆　　责任编辑 丁鹤龄　　封面设计 张申申
责任绘图 黄建英　　版式设计 马敬茹　　责任校对 姜国萍
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010—58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400—810—0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010—58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2010年5月第1版
印　　张	18.25	印　　次	2010年5月第1次印刷
字　　数	340 000	定　　价	24.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　29564—00

前　言

随着科学技术的发展，概率论与数理统计得到了越来越广泛的应用，从而使概率论与数理统计课程成为高等院校大部分专业必修的一门基础课。

本书是根据教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并参照教育部关于全国非数学专业硕士研究生入学考试对概率论与数理统计的基本要求，考虑了学生学习后续有关课程的需要，结合我们多年教学实践的基础上编写的。本教材以介绍概率论、数理统计以及随机过程的基本知识和方法为主，强调直观与应用背景，书写尽量从直观入手逐步过渡到数学表述，力求通俗易懂，并注意联系实际，使读者不仅可以获得需要的理论知识，掌握研究随机现象的思想方法，提高实际运用能力，也将有助于读者在概率统计直觉能力方面的培养与提高。

全书由十二章组成。前五章是概率论的基础知识；第六章至第九章是数理统计的基本内容；第十章至第十一章是随机过程初步；第十二章介绍了统计分析软件 S-Plus 的基本用法。另外，每章末配有一定数量的习题，书末附有习题答案。

目前，大多数高等院校概率论与数理统计课程的授课时间为 32 ~ 72 学时，我们的教材也是按这样的课时安排编写的，内容没有求多求全，但讲解详细，教师可根据需要选用。

本书由李建军编写第一、二、三、四章，陆中胜编写第六、七、十、十一章，谢建春编写第五、八、九、十二章，刘力维教授负责全书的修改、统稿工作。限于编者的水平，书中不足之处恳请读者指正。

编　者

2009 年 12 月

目　　录

第一章 概率论的基础知识

在日常生活与科学实验中，人们会遇到各种各样的现象.有一类现象，在一定条件下有一个确定的结果.例如，在一个标准大气压下，水加热到 100 ℃一定会沸腾；若两个电荷是同性的，则一定相斥，等等.这类现象称为**确定性现象**.还有一类现象，在一定条件下多次试验，有多个可能的结果，哪个结果会出现事先不能确定，但其中隐藏着某种规律性.例如，抛一枚硬币，可能币值面（又称正面）朝上，也可能币值面朝下，落地前不能确定哪个结果会出现，但反复多次地抛这枚硬币，币值面朝上与朝下的次数大致相等.这种经过多次重复试验呈现出来的规律性，称之为**统计规律性**.这类现象称为**随机现象**.概率论就是研究随机现象，进而揭示其统计规律性的一门科学.

概率论与数理统计和其他数学课程相比，其研究对象有着重大的差异，这直接导致了这门科学起步较晚，并且寻找规律性的方法与众不同.高等数学、线性代数以及工程数学等是以研究确定性现象为背景的，一旦满足确定的条件，其确切的规律性或称为结果必显示无疑，如高等数学中的洛尔定理等.如果我们把满足洛尔定理条件看成是一次试验，其试验结果的规律性就是至少存在一点使其函数的导数等于零.但如果我们把这种寻找规律性的思想用到研究随机现象中去，那将常常以失败而告终.如一次试验是抛一枚硬币一次，我们根本得不到规律性的结论，也无法解释出现币值面朝上的概率为 0.5 的结论.

通过大量重复试验来寻找随机现象的统计规律性的思想和方法奠定了概率论与数理统计这门科学的基石.我们通常说抛一次硬币，出现正面的概率为1/2，其解释是指多次地抛这枚硬币，其正面出现的次数大约占总数的一半（精确的解释还应该引用极限概念）.将这种解释用到一次试验上，我们也说抛一次硬币，出现正面的概率为 1/2.弄清这个概念后，我们就可确切地解释“明天某地下雨的可能性为 70%”等概率术语.

以上所述内容，对初次学习这门课程的读者来说颇为重要，但其部分概念和术语已用到第一章的知识.我们建议读者在学习了本章之后，再次参阅这些内容，相信会有新的理解.

§1. 随 机 试 验

我们通过试验来研究随机现象,但这种试验是广义的,除各种各样的科学试验外,对随机现象的观察,也被认为是一种试验. 下面是一些试验的例子.

例 1 抛一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

例 2 掷一颗骰子,观察出现的点数.

例 3 掷一颗骰子,观察 6 点出现的情况.

例 4 记录某网站在某一段时间间隔内被点击的次数.

例 5 在一批灯泡中任取一只,测试其寿命.

例 6 观察一天中某只股票的最低成交价与最高成交价.

不难发现,上面这些试验都具有以下几个特点:

1) 试验在相同条件下可以重复进行;

2) 试验的可能结果不止一个,但试验前能明确所有可能的结果;

3) 试验前不可预知哪个结果会出现.

我们把具有上面三个特点的试验称为**随机试验**,简称为**试验**,记为 E,不同的试验用下标区别. 如例 1 中的试验记为 E_1,例 2 中的试验记为 E_2,$\cdots$. 以后所提到的试验都是指随机试验.

§2. 样本空间、随机事件

一、样本空间

为了描述随机现象,可以通过随机试验来考察随机现象的各种可能出现的结果,并引入样本空间的概念来记录它们.

随机试验 E 的所有可能的试验结果所组成的集合,称为 E 的**样本空间**,记为 Ω. 样本空间的每个元素,即试验的每个结果,称为**样本点**,记为 ω.

将 §1 例 1、例 2、$\cdots$、例 6 中的样本空间分别记为 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_6$,则它们分别为

$\Omega_1=\{H,T\}$;

$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$\Omega_3=\{0,1\}$,这里 0 表示 6 点没有出现,1 表示 6 点出现;

$\Omega_4=\{0,1,2,\cdots\}$;

$\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$,这里 t 表示灯泡的寿命;

$\Omega_6=\{(x,y)\mid P_0\leqslant x\leqslant y\leqslant P_1\}$，这里 x 表示最低成交价，y 表示最高成交价. 并设这种股票的成交价不会低于 P_0，也不会高于 P_1.

注意：从上面的样本空间可看出：(1) 样本空间的元素个数可以是有限个，也可以是可列个，还可以是不可列个；(2) 样本空间的元素可以是一维的，也可以是多维的；(3) 对一个随机现象观察的角度、目的不同，样本空间可能不一样. 如上节例 2 和例 3，都是掷一颗骰子，但由于观察的目的不同，样本空间也不同.

二、随机事件

在试验的过程中，有很多情况可能发生也可能不发生. 例如，在掷一颗骰子观察出现的点数的试验中，"掷出 6 点"、"掷出偶数点"，都是可能发生也可能不发生的情况；在记录某网站在某段时间间隔内被点击的次数的试验中，"没有被点击"、"被点击 1 000 次以上"，都是可能发生也可能不发生的情况，而往往人们对这些情况感兴趣. 为便于研究，我们把试验中可能发生也可能不发生的情况，称为随机事件，简称为事件. 通常用大写字母 A、B、… 表示.

任何事件总对应样本空间的某一个子集. 例如：在掷一颗骰子观察出现的点数的试验中，事件 A："掷出偶数点"，即 $A=\{2,4,6\}$；在记录某网站在某段时间间隔内被点击的次数的试验中，事件 B："没有被点击"，即 $B=\{0\}$；在测试灯泡的寿命的试验中，事件 C："寿命不低于 1 000 小时"，即 $C=\{t\mid t\geqslant 1\ 000\}$.

于是，数学上可以这样定义随机事件. 试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的**随机事件**，简称**事件**. 而事件发生，当且仅当对应的子集中某个样本点出现. 每次试验，样本空间 Ω 中必然有一个样本点出现，即每次试验样本空间作为事件总是发生，故称 Ω 为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 也是样本空间的子集，但不包含任何样本点，每次试验空集作为事件不可能发生，故称 $\varnothing$ 为**不可能事件**. 另外，我们称由样本空间中单个样本点组成的集合为**基本事件**.

三、事件间的关系及运算

同一试验的众多事件，往往存在着一定的关系. 对这些关系的研究，有助于我们认识、分析更加复杂的事件. 因为事件是一个集合，故事件间的关系、运算可按集合间的关系、运算来处理. 根据"事件发生"的含义，不难理解事件间的关系、运算的概率含义.

设 Ω 为试验 E 的样本空间，A、B、$A_k(k=1,2,\cdots)$ 都是事件，即 Ω 的子集.

1) 包含关系

若 $A\subset B$，则称事件 A 包含于事件 B，或事件 B 包含事件 A，它是指事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

2）事件的和

称 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为事件 A 与事件 B 的**和事件**. 若 $A\cup B$ 发生，当且仅当事件 A 与事件 B 至少有一个发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

3）事件的积

称 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 为事件 A 与事件 B 的**积事件**. 若 $A\cap B$ 发生，当且仅当事件 A 与事件 B 同时发生. $A\cap B$ 也简记为 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件.

4）事件的差

称 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 为事件 A 与事件 B 的**差事件**. 若 $A-B$ 发生，当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生.

5）互不相容事件

若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互不相容**，或称事件 A 与事件 B **互斥**. 这意味着事件 A 与事件 B 不能同时发生.

6）事件的互逆

若 $A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B **互逆**，或称事件 A 与事件 B **互为对立事件**. 这意味着事件 A 与事件 B 不能同时发生，但必有一个发生. 一般地，事件 A 的对立事件记作 $\overline{A}$. 不难得到，$A-B=A\overline{B}$.

上面关于事件的各种关系可用图 1-1 直观的表示出来.

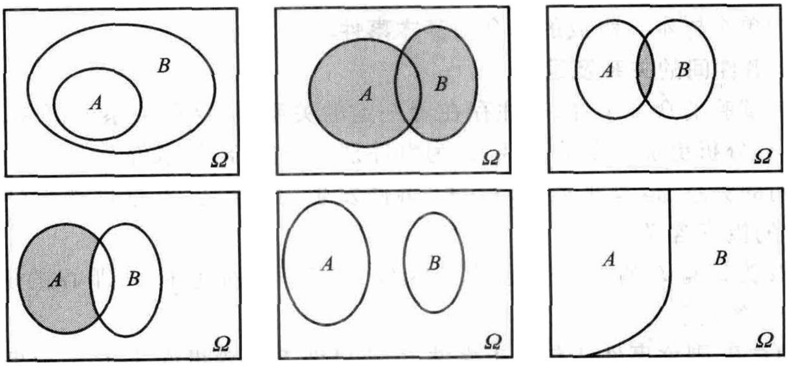

图 1-1 事件关系示意图

事件的运算与集合的运算是一致的,在进行事件的运算时,经常会用到以下规则:

1) 交换律:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

3) 分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

4) 德·摩根(De Morgen)律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

德·摩根律又称为对偶律,它可利用事件的关系来解释. 因为 $A\cup B$ 表示事件 A 与事件 B 至少有一个发生,它的对立事件$\overline{A\cup B}$当然是两个都不发生,而 A 与 B 均不发生的另一种表示是$\overline{A}\cap\overline{B}$,即$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$成立. 类似地可解释等式$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$成立.

德·摩根律可推广到多个事件的情形,即下面等式也是成立的.

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}, \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k};$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k}=\bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{A_k}, \overline{\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k}=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\overline{A_k}.$$

例 1 在分别标有 1,2,3,4,5,6,7,8 的八张卡片中任取一张,设事件 A 为“抽得一张标号不小于 2 的卡片”,事件 B 为“抽得一张标号为偶数的卡片”,事件 C 为“抽得一张标号为奇数的卡片”,具体写出下列各事件

$$A\cup B, AB, A-B, \overline{B\cup C}$$

解 $A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$;

$AB=\{2,4,6,8\}$;

$A-B=\{3,5,7\}$;

$\overline{B\cup C}=\varnothing$.

例 2 一个工人生产了 3 个零件,以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品($1\leqslant i\leqslant 3$). 用 $A_i(1\leqslant i\leqslant 3)$表示下列事件:

(1) 没有一个零件是次品; (2) 至少有一个零件是次品;

(3) 仅有一个零件是次品; (4) 至少有两个零件不是次品.

解 (1)“没有一个零件是次品”即 $A_1A_2A_3$;

(2)“至少有一个零件是次品”即$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$;

(3)“仅有一个零件是次品”即$\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}$;

(4)“至少有两个零件不是次品”即 $A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$.

§3. 频率与概率

概率是为衡量事件发生可能性大小而引进的一个量，它是事件发生可能性大小的数值量度. 如何定义一个事件发生的概率呢？直观上，一个事件在一次试验中发生的可能性的大小，通常表现为在大量试验中该事件出现的频繁程度. 在多次试验里，出现频繁的，一次试验中发生的可能性较大；出现稀少的，一次试验中发生的可能性较小. 所以，为了定义概率，首先引入反映事件出现频繁程度的量——频率.

一、事件的频率

定义 1 设 A 是一个事件. 在相同条件下进行 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A，称为事件 A 发生的**频数**，比值 n_A/n，称为事件 A 发生的**频率**，记作 $f_n(A)$.

由定义，容易得到频率的下列基本性质：

1）$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

2）$f_n(\Omega)=1$；

3）若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} f_n(A_i).$$

事件 A 的频率反映了事件 A 发生的频繁程度. 在试验次数 n 一定的情况下，频率越大，则频数 n_A 越大，即事件 A 发生越频繁，这意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性大；反之，频率越小，则频数 n_A 越小，即事件 A 发生越稀少，这意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性小. 因此，直观上可用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小，但这样做有不足之处，主要表现为频率具有随机波动性，看下面的例子.

例 1 考虑"抛硬币"试验，将一枚硬币连抛 5 次，50 次，500 次，各做 10 遍. 得到的数据如表 1-1 所示.

表 1-1 抛硬币试验数据

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498

续表

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表 1-1 可看出，频率表现出波动性. 当抛硬币的次数 n 较小时，这种波动性会表现得更明显，幅度更大，随着次数 n 的变大，波动的幅度相对变小.

这样看来，频率的随机波动性给用频率来表示概率带来了困难，但深入研究，我们会发现频率还具有稳定的性质. 同样考虑“抛硬币”的试验，其结果见表 1-2 所示.

表 1-2　抛硬币试验数据二

试验者	n	n_H	$f_n(H)$
德 · 摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
K · 皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K · 皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1-2 可看出，尽管频率具有波动性，取值是不确定的，但随着抛硬币的次数 n 的增加，频率 $f_n(H)$ 稳定于常数 0.5 附近，即频率还具有稳定性. 这个 0.5，我们称之为**稳定值**.

大量的统计资料可以说明频率的这一特性，这里不一一列举. 归纳来说，频率能反映一个事件发生的频繁程度，当试验次数 n 充分大时，频率将稳定于一个常值，即稳定值. 稳定值客观存在，它消除了频率的随机波动性，同时又能反映一次试验中事件发生的可能性的大小，我们将之作为对应事件的概率，此为概率的统计定义.

虽然概率的统计定义比较直观，但在实际中，通过大量的试验来得到稳定值往往是不可行的，这将耗费大量的人力、物力、财力. 一个更加合理的办法是，考虑到频率与概率的密切关系，频率是概率的反映，概率是频率的稳定值，频率具

有的性质,概率也应该有.因此,可从频率的性质出发,给出概率的定义.

二、事件的概率

定义 2 设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间.对 E 的每个事件 A,赋予一个实数 $P(A)$ 与之对应,称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**,如果它满足下列条件:

1) **非负性** 对每个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

2) **规范性** $P(\Omega)=1$;

3) **可列可加性** 若事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing,(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i). \tag{3.1}$$

容易看到,上面概率满足的三个条件,类似频率的三条基本性质.由概率的定义,可推导出概率的其他性质.

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

证 因为 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$,由概率的可列可加性,有

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots,$$

由概率的规范性知,$P(\Omega)=1<+\infty$,所以

$$P(\varnothing)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots=0.$$

又由概率的非负性知 $P(\varnothing)\geqslant 0$,得 $P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{3.2}$$

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,又因为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,故 $A_iA_j=\varnothing$,$(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$,由可列可加性知

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+P(A_{n+1})+\cdots=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 3 设 A,B 是任意的两个事件,则

$$P(B-A)=P(B)-P(AB). \tag{3.3}$$

证 因为 $B=(AB)\cup(B-A)$,且 $(AB)\cap(B-A)=\varnothing$,由性质 2 得

$$P(B)=P(AB)+P(B-A),$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(AB).$$

性质 4 设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$,特别地,对任意事件 C,有 $P(C)\leqslant 1$.

证 因 $A\subset B$,由性质 3 得 $P(B-A)=P(B)-P(A)$,又由概率的非负性得 $P(B-A)\geqslant 0$,故 $P(A)\leqslant P(B)$.特别地,因为任意事件 $C\subset\Omega$,由概率的规范性知

$P(C)\leqslant 1$.

性质 5(加法公式) 设 A,B 是两个事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{3.4}$$

证 因 $A\cup B=A\cup(B-A)$,且 $A\cap(B-A)=\varnothing$,由性质 2 得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A),$$

又由性质 3 得证.

加法公式还可推广到多个事件的情形,下面给出三个事件的加法公式,请读者自证.

设 A,B,C 是三个事件,则有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&-P(AC)-P(BC)+P(ABC).\end{aligned} \tag{3.5}$$

此外,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,还有下式成立

$$\begin{aligned}P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)\\&+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned} \tag{3.6}$$

性质 6 设 A 是任一事件,则

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{3.7}$$

证 因 $A\cup\overline{A}=\Omega,A\overline{A}=\varnothing$,由性质 2 及概率的规范性,有

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$

得证.

本节的最后,我们将概率的性质与边长为 1 的正方形区域的面积的性质作一比较,以帮助读者更好地理解概率的定义及其性质.

设平面上边长为 1 的正方形区域为 Ω,A 为 Ω 内的区域,其面积记为 $S(A)$. 显然,面积 $S(\cdot)$具有下列性质:

1) 对每个区域 $A\subset\Omega$,有 $S(A)\geqslant 0$;

2) $S(\Omega)=1$;

3) 若 Ω 内区域 $A_1,A_2,\cdots$两两互不相交,即 $A_iA_j=\varnothing,(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$,则有

$$S(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{+\infty}S(A_i).$$

上面面积的性质与概率定义中的三个条件似乎完全吻合,原因是什么呢?概率是对事件发生的可能性大小的度量,而面积是对区域大小的度量,原来它们都是“测度”,两者非常相似也就不足为奇了.

面积的性质是非常直观的,我们在利用或证明概率的性质时,可以以其作为

参考. 如证明加法公式,从图 1-2 容易看出

$$S(A\cup B\cup C)=S(A)+S(B)+S(C)-S(AB)-S(AC)-S(BC)+S(ABC).$$

用概率代替上面的面积即得(3.5)式.

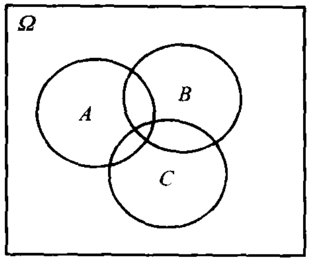

图 1-2 面积性质示意图

§4. 古典概型

上节中给出了概率的定义,但定义本身并没有告诉我们如何计算事件的概率. 实际上在多数情况下,直接计算事件的概率是困难的,甚至是不可能的,但在一些情况下可以办到,如在本节要讨论的古典概型.

在概率论发展初期,主要研究满足下面两个特点的试验:

1)试验的样本空间中元素的个数有限;

2)试验中每个结果发生的可能性相同.

称满足上面两个特点的试验模型为**古典概型**或**等可能概型**. 它在概率论中占有相当重要的地位,在实践中有着广泛的应用.

下面我们来推导古典概型中事件概率的计算公式.

设试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,且试验中每个结果发生的可能性相同,即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}).$$

因为基本事件是两两互不相容的,由概率的有限可加性,有

$$1=P(\Omega)=P(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\})=\sum_{i=1}^{n}P(\{\omega_i\})=nP(\{\omega_i\}).$$

故有

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n},i=1,2,\cdots,n \qquad (4.1)$$

若有事件 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}$,其中 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 为 $1,2,\cdots,n$ 中 k 个不同的