高等职业教育“十一五”规划教材

21世纪高等职业院校通识教育规划教材

Mathematics

# 高等数学(上册)


- 通识教育规划教材编写组 组编
- 于峰峰 主编
- 纪春静 代业明 乔晗 周长礼 副主编


人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

21世纪高等职业院校通识教育规划教材

# 高等数学（上册）

Mathematics

教学辅助资源
获取方式

人民邮电出版社
教学服务与资源网
www.ptpedu.com.cn

教材服务热线：010-67170985
反馈/投稿/推荐信箱：315@ptpress.com.cn
人民邮电出版社教学服务与资源网：www.ptpedu.com.cn

ISBN 978-7-115-22535-1
9 787115 225351 >
ISBN 978-7-115-22535-1
定价：25.00 元

装帧设计：任文杰

人民邮电出版社网址：www.ptpress.com.cn

十一五 高等职业教育“十一五”规划教材

21世纪高等职业院校通识教育规划教材

Mathematics

# 高等数学(上册)


▪ 通识教育规划教材编写组 组编
▪ 于峰峰 主编
▪ 纪春静 代业明 乔晗 周长礼 副主编



人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 通识教育规划教材编写组组编
-- 北京 : 人民邮电出版社, 2010.5
21世纪高等职业院校通识教育规划教材
ISBN 978-7-115-22535-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①通… Ⅲ. ①高等数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第046734号

## 内 容 提 要

本套书是根据教育部颁布的《高职高专院校理工类专业高等数学课程教学的基本要求》和高职高专院校理工类专业高等数学课程的教学大纲，在认真总结高职高专高等数学教学改革经验的基础上，结合编者多年的教学实践经验和同类教材发展趋势，针对高职高专层次的理工类专业学生而编写的。

本套教材分上、下两册，全书共 12 章，本书为高等数学（上），内容涵盖了函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程等内容。本书讲解深入浅出、通俗易懂、论证严谨，并且按照循序渐进的原则选编了大量教学例题和习题。

本书可作为高职高专机械、电气、电子、土木、化工、冶金、计算机等理工类各专业及成人高等学校的数学基础课程教材，也可作为工程技术人员的数学参考书。

高等职业教育“十一五”规划教材
21 世纪高等职业院校通识教育规划教材
**高等数学（上册）**

◆ 组　　编　通识教育规划教材编写组
主　　编　于峰峰
副 主 编　纪春静　代业明　乔　晗　周长礼
责任编辑　刘　琦

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京鑫正大印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：13.5
字数：262 千字　2010 年 5 月第 1 版
印数：1－3 000 册　2010 年 5 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-22535-1

定价：25.00 元

**读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223**
**反盗版热线：(010)67171154**

# 前言

Preface

本套书是根据教育部颁布的《高职高专院校理工类专业高等数学课程教学的基本要求》，在认真总结高职高专高等数学教学改革经验的基础上，结合编者的教学实践经验和同类教材发展趋势编写而成的。

本套书从高职高专理工类专业学生的实际需求出发，以培养学生的创新能力和解决实际问题能力为目标，对传统的高等数学内容进行了适当的精简，力求突出高职高专教育学以致用的特点，从而为学生学习专业基础课、专业课提供必需的数学知识与数学方法，并为部分同学的后续学习和进一步深造奠定必要的数学基础。

在内容安排上，我们本着"以应用为目的，以必需够用为度"的原则，着重数学方法的介绍，淡化理论的推导和证明，取消繁杂的计算，既保证基本知识要点，又满足各专业对数学的基本需要。本书叙述深入浅出、通俗易懂、简明扼要、循序渐进，结构上呈模块化，便于组合，以适合不同专业、不同层次的教学要求。

本套书有以下几个特点。

（1）加强对基本概念、理论的理解和应用，借助几何图形和实际问题强化了概念和定理的直观性，注重与中学知识的衔接，培养学生的逻辑思维能力。

（2）为了突出重点、解释难点，在相应的地方给出了相应的注释。

（3）对常用公式及方法汇总成表格的形式，以便于对照记忆和查阅。

（4）每节都精选了大量例题和习题，以便于老师组织教学和学生自学。

（5）每章前列有学习目标，及时指出知识的要点和大纲要求，使读者提前了解各章内容，便于自学。每章最后都配有比较综合的复习题，以提高学生对所学知识的综合运用能力和解决实际问题的能力。

（6）本套书在对传统高等数学内容进行适当精简的同时，又兼顾了内容的完整性，便于教师组织教学。

本套书分上、下两册，参考学时共 152 学时，其中教师讲授为 116 学时。各章的参考学时参见下面的学时分配表（其中标有"*"的章节为选学内容），使用本套书的教师可根据教学实际灵活安排掌握。

学时分配表

| 章节 | 课程内容 | 学时分配 | |
|---|---|---|---|
| | | 讲授 | 习题课时 |
| 第 1 章 | 函数与极限 | 12 | 4 |
| 第 2 章 | 导数与微分 | 10 | 4 |
| 第 3 章 | 微分中值定理与导数的应用 | 12 | 4 |
| 第 4 章 | 不定积分 | 8 | 2 |
| 第 5 章 | 定积分 | 8 | 2 |
| 第 6 章 | 定积分的应用 | 6 | 2 |
| 第 7 章 | 微分方程 | 8 | 2 |
| 第 8 章 | 空间解析几何与向量代数 | 12 | 4 |
| 第 9 章 | 多元函数微分学 | 14 | 4 |
| 第 10 章 | 重积分 | 8 | 2 |
| *第 11 章 | 曲线积分与曲面积分 | 8 | 2 |
| 第 12 章 | 无穷级数 | 10 | 4 |
| 课时总计 | | 116 | 36 |

本书为高等数学（上），于峰峰任主编，纪春静、代业明、乔晗、周长礼任副主编。全书共 12 章，其中第 1 章～第 5 章由纪春静编写，第 6 章～第 7 章由代业明编写，其余部分由于峰峰编写。

本书由南京航空航天大学陈克兵副教授做了详细的审阅，田志远教授、赵凯教授、赵维加教授在本书的编写过程中给予了大力支持，并提出了许多宝贵意见和建议，在此表示衷心的感谢！

参加本书编写工作的还有沈精虎、黄业清、宋一兵、谭雪松、冯辉、郭英文、计晓明、董彩霞、滕玲、田晓芳、管振起等。由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

2010 年 1 月

# 目录

Contents

# 第 1 章　函数与极限

**【学习目标】**

- 理解函数的概念及函数的几何特性。
- 理解数列极限与函数极限的相关概念，理解无穷小与无穷大的概念，会求函数的极限。
- 理解函数连续与间断的概念，了解连续函数的性质。

初等数学主要研究静止不变的量的各种运算与性质，所以也称为常量数学。16 世纪时，随着实践和科学发展的需要，对物体运动的研究成了自然科学的中心问题，在这类问题中出现了一些不断变化的量，即“变量”；而同一问题中的不同变量之间存在的依赖关系，即我们所熟悉的“函数”。这些问题的出现，促使数学的发展进入一个新的变量数学的时代。

极限理论是研究变量与函数的基本工具，也是整个高等数学的理论基础。本章主要介绍函数、极限及函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质。

## 1.1　函数

本节介绍函数的一般概念、表示方法、性质以及最基本的函数类——初等函数。

### 1.1.1　函数的概念

#### 1. 函数的定义

在研究问题时，为了描述某一变化过程中不同变量之间的依赖关系，给出函数的概念。先来看几个实际的例子。

**例 1**　自由落体运动中，质点下落的距离 $s$ 与下落时间 $t$ 之间的关系由下式确定

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 $g\approx 9.8$ 米/秒 $^2$ 为重力作用下自由落体的加速度。由这个关系式可知，对于任意大于零的 $t$ 值，有唯一的 $s$ 值与之对应。

**例 2**　在几何中，圆的面积 $s$ 由半径 $r$ 唯一确定，它们之间的关系由下式给出

$$s=\pi r^2$$

对于每个非负的 $r$ 值，由此关系式都可以得到唯一的面积 $s$ 与之对应。

以上两例虽然背景不同，但它们都表达了两个变量之间相互依赖的关系。这个关系由一个对应法则给出，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，根据这个对应法则，另一个变量有唯一确定的值与之对应。两个变量之间的这种对应关系就是函数的实质。

**定义 1** 设 $D$ 是一个非空实数集，$f$ 是一个对应法则。如果对于每个 $x \in D$，通过对应法则 $f$ 都可以确定唯一的实数 $y$ 与之对应，则称 $f$ 是定义在 $D$ 上的一个**函数**，$y$ 称为函数 $f$ 在 $x$ 点处的**函数值**，记作 $y=f(x)$。

函数 $f$ 可以表示为

$$f: D \to R, \quad x \to y$$

其中 $x$ 称为**自变量**，$y$ 称为**因变量**。自变量 $x$ 取值的全体即数集 $D$ 称为函数 $f$ 的**定义域**，记作 $D(f)$ 或 $D_f$。函数值的全体称为 $f$ 的**值域**，记作 $R(f)$ 或 $R_f$，也可记作 $f(D)$，即

$$R(f)=f(D)=\{f(x) | x \in D\}$$

由上述定义可以看出，严格意义上，$f$ 和 $f(x)$ 的含义是不同的。$f$ 表示由自变量 $x$ 确定因变量 $y$ 的对应法则即函数关系，而 $f(x)$ 则表示与自变量 $x$ 对应的函数值。但是为了叙述方便，常将函数简单地表示为 $y=f(x)\ (x \in D)$。

通常用英文字母 $f$，$g$，$h$，…，$F$，$G$，…和希腊字母 $\varphi$，$\psi$，…，$\Phi$，$\Psi$，…作为函数的记号。

应注意到，确定函数的两个要素是定义域和对应法则。换言之，一个函数由定义域和对应法则完全确定，而与变量的记号无关。

例如 $s=\pi r^2$（$r>0$）与 $y=\pi x^2$（$x>0$）表达的是同一个函数关系；而 $y=\pi x^2$（$x>0$）与 $y=\pi x^2$（$x \in \mathbf{R}$）则是两个不同的函数，因为两者的定义域不同。

对于有实际问题背景的函数，其定义域由实际问题中自变量的意义所决定，如上述例 2 中的自变量 $r$ 代表圆的半径，所以要求 $r>0$，即其定义域为 $(0,+\infty)$。对于用抽象的数学式表示的函数，由于没有实际意义，通常约定这种函数的定义域是使得数学表达式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域也称为函数的**自然定义域**。以数学式给出的函数，如果不特殊说明的话，均认为其定义域是自然定义域。例如，函数 $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域是 $[-3,-1) \cup (1,3]$。

函数有 3 种表示方法：解析法、列表法、图像法。这 3 种方法各有优势，适用于不同的环境。但在我们的学习中，为了便于理论上的研究分析，一般采用解析法，即用数学式表示函数关系，同时，图像法因其直观性也常用作辅助。函数 $y=f(x)$ 的图像就是将定义域内任一自变量 $x$ 的值作为横坐标，相应的函数值 $f(x)$ 作为纵坐标，在平面上做出所有对应的点后构成的图形，即坐标平面上的点集 $\{(x,y) | y=f(x), x \in D\}$（见图 1-1）。

### 2. 分段函数

在实际应用中，常遇到这样一类函数：在自变量的不同变化过程中，函数表达式不同，我们将这种函数称为**分段函数**。例如

**绝对值函数**

$$y=|x|=\begin{cases}x\ , & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

和

**符号函数**

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1\ , & x>0\\ 0\ , & x=0\\ -1\ , & x<0\end{cases}$$

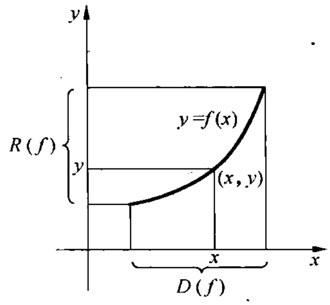

图 1-1

都是分段函数。它们的图像分别如图 1-2 和图 1-3 所示。

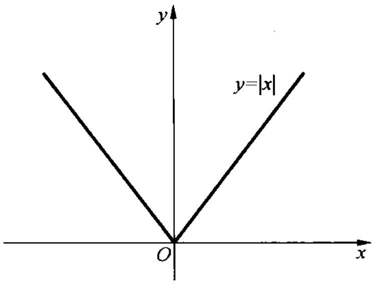

图 1-2

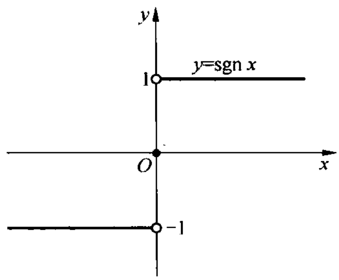

图 1-3

对于分段函数，应注意到：虽然在自变量的不同变化范围内，计算函数值的表达式不同，但这些表达式定义的是一个函数，这个函数的定义域是各个不同表达式所对应的 $x$ 值的并集。在计算某个函数值时，要先判断自变量的值在哪个表达式所对应的范围内，然后再按该表达式求值。

**例 3** 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0<x<2\\ 0\ , & x=0\\ x-1, & -2<x<0\end{cases}$，写出它的定义域并求 $f(1)$ 和 $f(-1)$。

**解** 它的定义域 $D(f)=(-2,0)\cup\{0\}\cup(0,2)=(-2,2)$。由于 $x=1\in(0,2)$，所以 $f(1)=1+1=2$；由于 $x=-1\in(-2,0)$，所以 $f(-1)=-1-1=-2$。此函数的图像如图 1-4 所示。

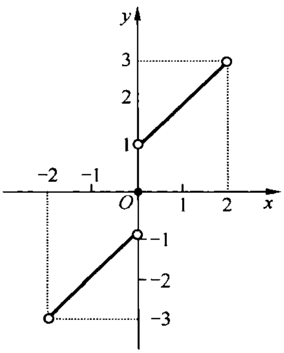

图 1-4

### 3. 函数的运算

函数作为一种数学元素，也可以作加减乘除四则运算。

设有函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，它们的定义域分别是 $D_1$、$D_2$，且 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，我们可以定义这两个函数的下列运算。

- 和与差 $f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$。
- 积 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$。
- 商 $\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in\{x|x\in D 且 g(x)\neq 0\}$。

## 1.1.2　函数的几个特性

研究函数时，常会用到以下几个特性。

### 1. 单调性

**定义 2**　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I\subset D$。如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 和 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（见图 1-5），则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是**单调增加**的；如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 和 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$（见图 1-6），则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是**单调减少**的。单调增加和单调减少的函数统称**单调函数**，使函数单调的区间称为函数的单调区间。

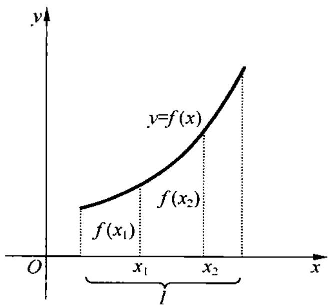


图 1-5

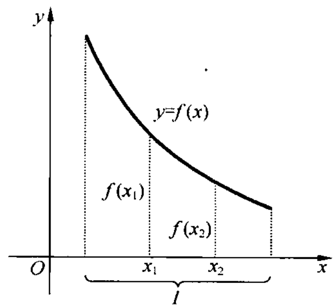


图 1-6

函数的单调性不仅和函数表达式有关，也和定义区间有关。一般地，如果函数在整个定义域内不单调，我们可以将定义域分成多个子区间，使函数在各个子区间内单调。例如，函数 $y=x^2$ 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的，但是在定义域的子区间 $(-\infty,0)$ 上单调减少，而在 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的。

### 2. 有界性

**定义 3**　设函数 $f(x)$ 在集合 $D$ 上有定义。如果存在常数 $M>0$，使得对任意的 $x\in D$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上**有界**；如果这样的 $M$ 不存在，即对于任意的正数 $M$，无论它多大，总存在 $x\in D$ 使得 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上**无界**。