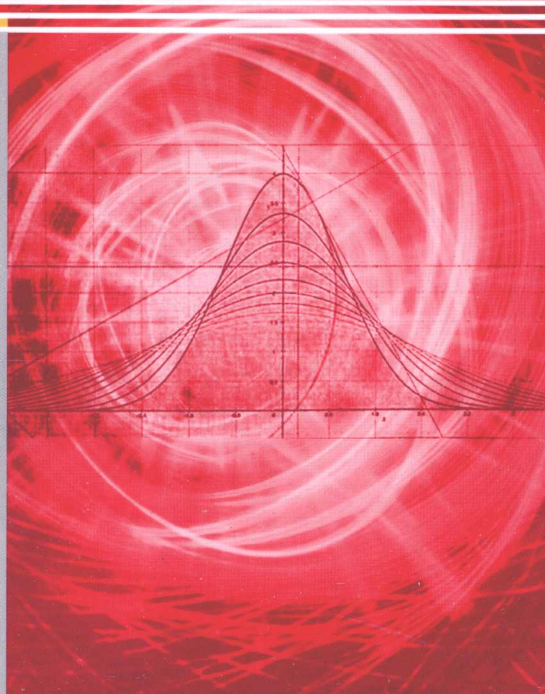
应用型本科院校规划教材

主编　孔繁亮

概率论与数理统计

Probability Theory and Mathematical Statistics



- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业

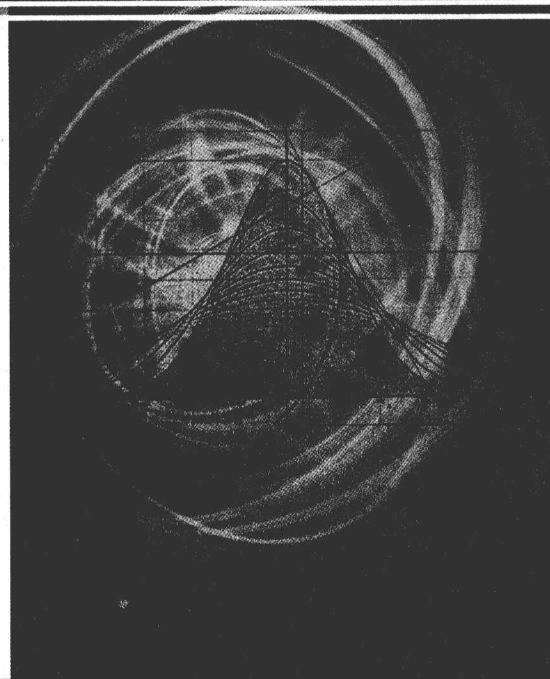
哈爾濱工業大學出版社

应用型本科院校规划教材

主　编　孔繁亮
副主编　刘　龙　洪　港

概率论与数理统计

Probability Theory and Mathematical Statistics



哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书是高等院校应用型本科系列教材，根据编者多年的教学实践，按照新形势教材改革精神，并依据教育部高等院校课程教学指导委员会提出的“概率论与数理统计课程教学基本要求”，结合应用性、职业型、开放式的应用型本科院校培养目标编写而成。内容为概率论的基本概念、随机变量及其概率分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征与极限定理、数理统计的概念与参数估计、假设检验、统计分析方法简介、上机计算(Ⅳ)。本书附有习题答案与提示，配备了学习指导书，并对全书的习题做了详细解答，同时也配备了多媒体教学课件，方便教学。本书结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂，突出了应用性。

本书可供应用型本科院校的相关专业学生使用，也可作为工程技术、科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/孔繁亮主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2010.8
应用型本科院校规划教材
ISBN 978-7-5603-3072-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①孔… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 157572 号

策划编辑 赵文斌 杜 燕
责任编辑 尹 凡
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 16 字数 365 千字
版 次 2010 年 8 月第 1 版 2010 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3072-2
定 价 27.80 元

《应用型本科院校规划教材》编委会

序

哈尔滨工业大学出版社策划的“应用型本科院校规划教材”即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的“应用型本科院校规划教材”，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神，根据黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

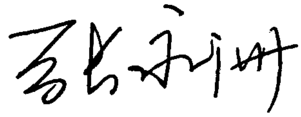
本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用

讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的PPT多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

“应用型本科院校规划教材”的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

黑龙江省教育厅厅长



2010年元月于哈尔滨

前　言

为了贯彻全国高等院校教育工作会议精神和落实教育部关于抓好教材建设的指示，为了更好地适应培养高等技术应用型人才的需要，促进和加强应用型本科院校“概率论与数理统计”的教学改革和教材建设，由黑龙江东方学院、哈尔滨理工大学、黑龙江科技学院、黑龙江大学等院校的部分教师参与编写了本教材。

在编写中，我们依据教育部高等院校课程教学指导委员会提出的“概率论与数理统计课程教学基本要求”，结合应用性、职业型、开放式的应用型本科院校的培养目标，努力体现以应用为目的、以掌握概念、强化应用为教学重点、以必须够用为度的原则，并根据我们的教改与科研实践，在内容上进行了适当的取舍。在保证科学性的基础上，注意处理基础与应用、经典与现代、理论与实践、手算与电算的关系。注意讲清概念，建立数学模型，适当削弱数理论证，注重两算（笔算与上机计算）能力以及分析问题、解决问题能力的培养，重视理论联系实际，叙述通俗易懂，既便于教师教，又便于学生学。

本书48学时可讲完主要部分，加*号的部分可根据专业需要选用（另加学时），或供学生自学。本书除供应用型本科院校的相关专业及高等工科院校工程类、经济类、管理类等专业的概率论与数理统计教材使用外，也可供成人教育学院等其他院校作为教材，还可作为工程技术人员、企业管理人员的参考书。

本书由孔繁亮教授任主编，刘龙、洪港任副主编，参加编写的有孔繁亮，刘龙，洪港，顾贞。黑龙江大学陈正宏教授和哈尔滨医科大学张仲教授审阅了全部书稿，并提出了宝贵意见，在此表示感谢！

高等应用型本科院校的蓬勃发展，为我国高等教育的发展增添了新的活力。如何搞好这个层次的教材建设，是教学改革的一个当务之急。我们编写的这套教材，就是其中的一个探索。由于我们的水平有限，书中难免有疏漏之处，敬请广大师生、社会各界读者不吝指正。

编　者

2010年5月

目　　录

第 1 章

概率论的基本概念

概率论与数理统计是研究现实世界中随机现象规律性的一门数学学科,是数学的一个有特色的分支.一方面,它有别开生面的研究课题,有自己独特的概念和方法,内容丰富、结果深刻;另一方面,它与其他数学分支以及科学技术的许多领域又有紧密的联系,理论严谨,应用广泛,是近代数学的重要组成部分.本章将介绍它的基本概念、理论与方法.

自然界和社会上发生的现象是多种多样的,其中一类是在一定条件下必然发生或必然不发生的现象,这类现象叫做确定性现象.例如:

(1) 向上抛一枚硬币,必然落下;

(2) 在标准大气压下,纯水加热到 100℃ 必然沸腾;

(3) 从一批全是合格品的产品中任取一件,取到的必是合格品.

这类确定性现象的特点是:每次试验或观察它的结果总是确定的.

另一类现象是在一定条件下,具有多种可能结果,哪一种结果将会发生,事先不能确定,这类现象叫做随机现象.例如:

(1) 向上抛一枚硬币,落下后可能正面向上,也可能正面向下;

(2) 某运动员投篮一次,可能投中,也可能投不中;

(3) 从一装有白球和黑球的袋中任取一球,可能是白球,也可能是黑球.

上述这些现象都是随机现象.随机现象的特点是:一方面,事先不能预言其结果,具有不确定性;另一方面,在相同的条件下进行大量的重复试验,会呈现出某种规律性,这种规律性通常叫做统计规律性.概率论与数理统计的任务就是研究与揭示随机现象的规律性.

1.1 随机事件与样本空间

1.1.1 随机试验 随机事件

试验作为一个含义广泛的术语,它包括各种各样的科学实验,社会实验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验.

如果某试验满足以下三个条件:

(1) 可以在相同条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不只一个,并且事先能明确知道试验的所有可能结果;

(3) 一次试验不能预言哪一个结果会出现.

我们称此试验为随机试验,简称为试验,用字母 E 表示.例如:

E_1:投掷一枚质地均匀的硬币,观察它出现"正面"或"反面";

E_2:在一批灯泡中,任选一只,测试它的寿命;

E_3:掷一枚质地均匀的骰子,观察它出现的点数.

显然,上述3个试验都是随机试验.

随机试验的每一可能的结果称为随机事件(简称事件),通常用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.概率论与数理统计就是通过随机试验来研究随机现象规律性的.

1.1.2 基本事件与样本空间

随机事件是随机试验中可能发生也可能不发生的事件.在试验中一定发生的事件叫做必然事件,用 Ω 表示;在试验中不可能发生的事件称为不可能事件,用 $\varnothing$ 表示.必然事件和不可能事件实质上都是确定性现象的表现,为了便于讨论,通常把它们当作随机事件的特殊情况来看待.

在随机事件中,有些事件可以看做是由某些更简单的事件复合而成的.

例 1.1.1 10个产品中含有2个次品,8个正品,从中任取3个,观察它所含的次品数,记

$$B_0 = \{恰有0个次品\} \quad B_1 = \{恰有1个次品\} \quad B_2 = \{恰有2个次品\}$$
$$A = \{至少有1个正品\} \quad B = \{最多有1个次品\}$$

都是随机事件,其中事件 B 是可分解的事件,可看作 B_0 和 B_1 两个事件复合而成的,而 B_0, B_1, B_2 是不能再分解的事件.

在随机试验中,不能再分解的事件称为基本事件,亦称为样本点,记作 ω.一个随机试验的全体基本事件组成的集合称为样本空间,记作 Ω.

例如:掷一枚骰子,观察它出现的点数.

该试验的样本空间为

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

样本点:{出现1点},{出现2点},{出现3点},……,{出现6点}.

例 1.1.2 从编号分别为 $1,2,3,\cdots,10$ 的十个球中任取一个观察其编号数,试写出试验的样本空间和下列事件所包含的基本事件

$$A = \{取到6号球\} \quad B = \{取到偶数号球\}$$
$$C = \{取到编号数大于4的球\}$$

解 样本空间 $\Omega = \{1,2,3,\cdots,10\}$,事件所包含的基本事件为

$$A = \{6\} \quad B = \{2,4,6,8,10\} \quad C = \{5,6,7,8,9,10\}$$

1.1.3 事件的关系与运算

1.事件的包含关系

定义 1.1.1 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,或事件 A 包含于事件 B,记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

事件间的包含关系可用图1.1直观说明.

例如：一台机器从使用到报废有下列事件，$B=\{$使用20年$\}$，$A=\{$使用25年$\}$，A 发生时 B 必然发生，所以 $A\subset B$.

2. 事件的相等关系

定义 1.1.2　如果事件 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

3. 事件的和

定义 1.1.3　事件 A 和事件 B 中至少有一个发生的事件称为事件 A 与 B 的和，记作 $A+B$ 或 $A\cup B$.

图 1.2 中阴影部分表示的就是 $A+B$.

类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件称为这 n 个事件的和事件，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

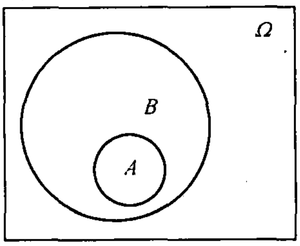


图 1.1

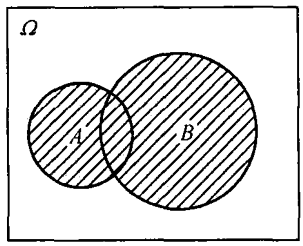


图 1.2

例 1.1.3　抽查一批产品，记事件：$A=\{$没有不合格品$\}$，$B=\{$有一件不合格$\}$，$C=\{$最多有一件不合格品$\}$. 试写出上述事件的关系.

解　由于事件 C 的发生意味着 A 与 B 至少有一个发生，所以 $C=A+B$.

4. 事件的积

定义 1.1.4　事件 A 与 B 同时发生的事件，称为事件 A 与 B 的积，记作 AB 或 $A\cap B$. 图 1.3 阴影部分表示 AB.

类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件称为这 n 个事件的积事件，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

例 1.1.4　如果某零件的验收标准为长度，直径都合格，设事件：$A=\{$零件直径合格$\}$，$B=\{$零件长度合格$\}$，$C=\{$零件合格$\}$. 试用事件的积表示这三个事件之间的关系

解　因为事件 C 的发生必然要事件 A 与 B 同时发生，所以有 $C=AB$.

5. 互不相容事件

定义 1.1.5　如果事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$（或 $A\cap B=\varnothing$），则称事件 A 与 B 为互不相容（或互斥）事件.

图 1.4 表示事件 A 与 B 不相容（事件 A 与 B 互斥）.

互不相容事件的概念可推广到 n 个事件的情形：如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任何两个事件都不能同时发生，即

$$A_iA_j=\varnothing \qquad (i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$$

则称这 n 个事件为两两互不相容事件.

6. 事件的差

定义 1.1.6　事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

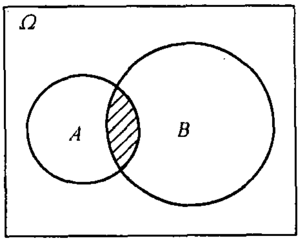


图 1.3

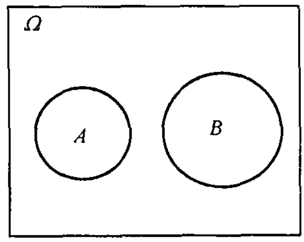


图 1.4

图 1.5 中阴影部分表示事件 $A - B$.

例 1.1.5 掷骰子试验中:$A = \{出现两点\} = \{2\}$,$C = \{出现小于 4 的点\} = \{1,2,3\}$,则 $C - A = \{1,3\}$.

7. 对立事件

定义 1.1.7 如果事件 A 与 B 中必有一个发生,且仅有一个发生,即 $A \cup B = \Omega$,$A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与 B 为相互对立事件(或逆事件).

A 的对立事件记作 $\overline{A}$,即 $B = \overline{A}$.

图 1.6 中阴影部分表示 $\overline{A}$.

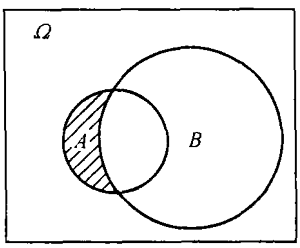


图 1.5

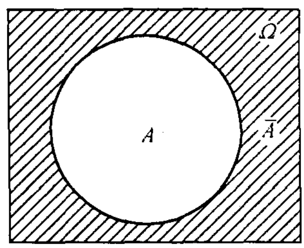


图 1.6

例如,事件 $A = \{产品合格\}$ 的对立事件 $\overline{A} = \{产品不合格\}$;事件 $B = \{产品全部合格\}$ 的对立事件 $\overline{B} = \{至少有一个产品不合格\}$.

一般的,对立事件必然是互斥事件,但互斥事件不一定是对立事件.

为了与集合论概念相对照,特列表 1.1.

表 1.1

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间　必然事件	空间(集合)
$\varnothing$	不可能事件	空集
$\omega \in \Omega$	基本事件　样本点	Ω 中的元素
$A \subset \Omega$	事件 A	Ω 的子集
$A \subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	集合 B 包含集合 A
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与集合 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	集合 A 与集合 B 的并
$A \cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	集合 A 与集合 B 的交
$\overline{A}$	事件 A 的逆事件	集合 A 的余集
$A - B$	事件 A 发生且事件 B 不发生	集合 A 与集合 B 的差集
$A \cap B = \varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	集合 A 与集合 B 没有公共元素

8. 事件的运算律

(1) 交换律

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

(2) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(3) 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

分配律可以推广到有限个的情形,即

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)$$
$$A \cup (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup A_i)$$

(4) 对偶公式

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

对偶公式也可以推广到有限个的情形,即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

例 1.1.6　设 Ω 为样本空间,A,B,C 为三个随机事件,试将下列事件用 A,B,C 表示出来:

(1) A 发生,B,C 都不发生;

(2) A,B 都发生,而 C 不发生;

(3) A,B,C 都发生;

(4) A,B,C 中至少有一个发生;

(5) A,B,C 中至少两个发生;

(6) A,B,C 都不发生.

解　(1) $A\overline{BC}$;(2) $AB\overline{C}$;(3) ABC;(4) $A + B + C$;(5) $AB + AC + BC$;(6) $\overline{ABC}$.

例 1.1.7　设某射手向一目标连续射击 3 次,A_i 表示第 i 次击中目标($i = 1,2,3$).

(1) 写出样本空间;

(2) 试用文字叙述下列事件:$A_1 + A_2, \overline{A_2}, A_1 + A_2 + A_3, A_3 - A_2, \overline{A_2 + A_3}, \overline{A_2A_3}, A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3$.

解　(1) $\Omega = \{A_1A_2A_3, \overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}, A_1\overline{A_2}\overline{A_3}, \overline{A_1}A_2\overline{A_3}, \overline{A_1}\overline{A_2}A_3, \overline{A_1}A_2A_3, A_1\overline{A_2}A_3, A_1A_2\overline{A_3}\}$.

(2) $A_1 + A_2 = \{$前两次至少击中一次$\}$;

$\overline{A_2} = \{$第二次未击中$\}$;

$A_1 + A_2 + A_3 = \{$三次中至少有一次击中$\}$;

$A_3 - A_2 = A_3\overline{A_2} = \{$第三次击中而第二次未击中$\}$;

$\overline{A_2 + A_3} = \overline{A_2}\,\overline{A_3} = \{$后两次均未击中$\}$;

$\overline{A_2A_3} = \overline{A}_2 + \overline{A}_3 = \{$后两次至少一次未击中$\}$;

$A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 = \{$至少两次击中$\}$.

1.2　随机事件的概率

为了研究随机现象的统计规律性,必须要知道随机事件 A 在试验中发生的可能性的大小,这便是我们下面要讨论的问题.

1.2.1　概率的统计定义

定义 1.2.1　设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次,则称 $\frac{m}{n}$ 为随机事件 A 发生的频率,记作 $f_n(A)$,即

$$f_n(A) = \frac{m}{n} \tag{1.1}$$

由定义易见频率具有下述基本性质:

(1)$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2)$f_n(\Omega) = 1$;$f_n(\varnothing) = 0$;

(3)① $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B) - f_n(AB)$;

② 若 A,B 互不相容,则 $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$.

若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 m 个两两不相容事件,则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

即

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_m)$$

(4)$f_n(A) = 1 - f_n(\overline{A})$;

(5)若 $A \subset B$,则 $f_n(A) \leqslant f_n(B)$.

为了研究事件频率的规律性,历史上有许多人做过抛掷一枚均匀硬币的实验,结果见表 1.2.

表 1.2　实验结果

试验者	抛币次数	正面向上数	频率
德摩根	2 048	1 061	0.521 81
浦　丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

这个例子揭示了这样一个事实:当实验次数 n 逐渐增大时,事件的频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数 p.这就是频率的稳定性,它表明数 p 是事件本身客观存在的一种固有属性,因而,我们用这个频率的稳定值 p 来表示事件发生的可能性大小.

定义 1.2.2　在试验条件不变的情况下,重复进行 n 次试验,如果事件 A 发生频率 $\frac{m}{n}$