21世纪高等理工科重点课程辅导教材

高等数学

理论与解题方法

于龙文　赵晓颖　宋岱才　等编著

化学工业出版社

21 世纪高等理工科重点课程辅导教材

高等数学理论与解题方法

于龙文　赵晓颖　宋岱才　等编著
陈明明　徐铁军　主审

化学工业出版社
·北京·

全书共分十二章，每章包括内容提要、典型例题、练习题及练习题参考答案。书末还给出了四套自测题和自测题参考答案。本书将高等数学诸多问题进行了归类，通过典型例题的解答，诠释了高等数学解题的技巧和方法归类，帮助读者在理解基本概念的基础上，充分掌握高等数学的基本知识，增强运算能力。

本书适用于理工科高等院校的学生，对于准备考研的学生来讲也是一本有益的参考书。本书还可以作为高等院校数学教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学理论与解题方法/于龙文，赵晓颖，宋岱才等编著. —北京：化学工业出版社，2010.7
21 世纪高等理工科重点课程辅导教材
ISBN 978-7-122-08788-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①于…②赵…③宋… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 106535 号

责任编辑：唐旭华　　文字编辑：杜　星
责任校对：宋　玮　　装帧设计：张　辉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 14¼　字数 362 千字　2010 年 8 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：24.00 元

序

在工程问题中，随时都会产生数量关系和相互作用，而这正是数学所研究的重要内容. 数学应用的第一步就是对实际问题分析其对象内在的数量关系，反映这种内在数量关系的过程就是数学模型. 数学模型按类型可以分为三类：第一类为确定性模型，即模型所反映的实际问题中的关系具有确定性，对象之间的联系是必然的. 微积分、线性代数等是其建模的基本数学工具. 第二类为随机性模型，所反映的实际问题具有偶然性或随机性. 概率论与数理统计以及随机过程是其建模的基本数学方法. 第三类为模糊性模型，所反映的实际问题中的关系呈现模糊性. 模糊数学理论是其建模的基本数学手段.

对工科高等学校各专业本科生而言，公共数学基础课程一般包括“高等数学”、“线性代数”、“概率论与数理统计”三门课程，它们都是必修的重要基础理论课. 通过这些课程的学习，学生可以掌握这三门课的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能，为今后学习各类后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础. 在学习过程中，通过数学知识与其实际应用的有机结合，可以培养学生抽象思维和逻辑推理的理性思维能力、综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力，并逐步培养学生的探索精神和创新能力.

近年来随着普通高校教育规模的不断扩大，受教育群体的不同层次对数学的学习也提出了不同的要求，因此出版一套有针对性的辅助教材就显得十分必要. 尽管目前数学教学辅助资料很多，但真正符合现在大学生学习数学需求的资料并不多. 因此，辽宁石油化工大学理学院数学系的广大教师结合他们多年的教学经验，编写了这套数学辅导系列教材，以期帮助初学大学数学的学生学好数学基础课.

这套数学系列辅导教材包括《高等数学理论与解题方法》、《线性代数理论与解题方法》和《概率论与数理统计理论与解题方法》，其内容完全按照教育部非数学专业数学教学指导委员会最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”所编写. 该系列辅导教材吸收了国内外同类辅导教材的精华，特别是采纳了近几年一批“面向 21 世纪课程”教材中的习题，同时也凝聚了作者多年来在大学数学教学方面积累的经验，总结了历年数学考研辅导班中学生反映的共性问题. 编写中充分考虑了工科数学基础课程的系统性，注意到了时代的特点以及与后续课程的衔接. 本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，做到了科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一. 注重理论联系实际，通过实际例题展示数学方法在工程领域中的应用.

本系列辅导教材在体系与内容编排方面，考虑到工科高等学校各专业本科生的数学教材多采用同济大学《高等数学》、《线性代数》以及浙江大学《概率论与数理统计》的情况，为便于学习，本系列辅导教材所列章节与之相配套. 同时考虑到不同学生群体对数学学习的不同需求，对于书中所列习题，学有余力的同学可试做教材的全部练习题，其他同学可以根据自身的实际学习需要选择练习. 教材每章后面配备了练习题以及习题参考答案，书后分别给出了几套自测题及参考答案，供读者参考.

数学基础知识和基本方法的训练，是能力训练的主要手段，也是各类不同专业教学的迫切需要. 相信这套系列辅导教材在具体的使用过程中会获得成功，学习者的渴望会得到满足，教育者的愿望会得以实现.

张庆灵

2010 年 5 月于东北大学

前　言

高等数学作为理工科院校学生的必修课，历来备受青睐．它不但是学好其他课程的基础，其本身内容也是丰富的．通过高等数学的学习，会提高学生的空间想象能力、严格的逻辑推理能力和深刻的思维能力．

然而，高等数学的学习又往往因其内容抽象、公式定理繁多难懂使学生产生畏惧心理．致使大多数学生盲目地去做题，缺乏科学的选择以及归纳梳理，最后很难达到预期的学习目的，同时又浪费了许多的宝贵时间．编写本书的目的，就是为学生学好高等数学提供有益的参考．

本书将高等数学诸多问题进行合理的归类，通过对典型例题的解析和方法归纳，帮助读者理解基本概念，增强运算能力．同时介绍方便快捷的解题方法，使读者耳目一新．

参加本书编写的有赵晓颖（第一章、第二章、自测题），侯景臣（第三章），谢丽红（第四章），刘国志（第五章），张钟元（第六章），魏晓丽（第七章），刘晶（第八章），陈德艳（第九章），聂宏（第十章），姜凤利（第十一章），李金秋（第十二章）．全书由赵晓颖组稿，于龙文统编，宋岱才阅读了全文并修改定稿，陈明明、徐铁军教授主审．

本书适用于理工科高等院校的学生，特别适合使用同济大学应用数学系编写的《高等数学》作为教材的学生，对于那些有志报考研究生的学生也是一本有益的参考书．本书也可作为理工科高等院校数学教师的教学参考书．

本书编写时，编者参考了大量的资料和教材，由于篇幅所限，未能全部列出．同时编写过程中得到了辽宁石油化工大学教务处和理学院广大教师的支持和帮助，编者在此谨向有关作者及各位老师表示感谢！

由于编者水平所限，书中疏漏与不妥之处在所难免，恳切希望广大读者批评、建议，使本书能不断丰富完善．

编　者

2010 年 5 月

目　录

第一章　极限与函数的连续

一、内容提要

（一）有关极限的基本定义

定义 1：$\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限. 通常说，当 n 趋于无穷时，数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a. 记作：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，或 $x_n\to a$ ($n\to\infty$).

若数列没有极限，则称数列是发散的.

定义 2：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 记作：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ ($x\to x_0$).

若将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极限. 记作：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，或 $f(x_0-0)=A$.

类似地，可以定义 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时的右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)=A$.

定义 3：$\forall \varepsilon>0$，$\exists X>0$，使当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限. 记作：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ ($x\to\infty$).

若将不等式 $|x|>X$ 改为 $x<-X$ 或 $x>X$，则可得到 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义.

注：在定义 2 和定义 3 中，若当 $A=0$ 时，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时的无穷小（量）.

定义 4：$\forall M>0$，$\exists \delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大（量），记作：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

类似的，可以定义 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 的定义.

注：在以后的问题叙述中，当 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 时结论都成立时，极限符号简记为 lim.

（二）极限的性质、无穷小的比较与两个重要极限

（1）极限的性质：

① 若极限存在，则其值必然唯一.

② 若在 $U(x_0,\delta)$ 内有 $f(x)\geqslant 0$ ($f(x)\leqslant 0$)，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$ ($A\leqslant 0$).

③ 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$ ($A<0$)，则必存在 $U(x_0,\delta)$，使 $f(x)>0$ ($f(x)<0$).

（2）极限的四则运算法则：若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$，$\lim f(x)g(x)=AB$，当 $B\neq 0$ 时，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

（3）极限存在准则：

① 夹逼准则：若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

注：准则①对函数的极限也成立.

②单调有界准则：单调有界数列必有极限.

（4）无穷小的比较：若 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$，且 $\beta(x)\neq0$，又 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$，

则当 $c=0$ 时，称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$的高阶无穷小，记为 $\alpha(x)=o[\beta(x)]$；

$c=1$ 时，称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

$c=\infty$时，称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$低阶无穷小；

除此之外，称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是同阶无穷小.

特别地，$\lim\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq0$，$k>0$，则称 $\alpha(x)$ 是关于 $\beta(x)$的 k 阶无穷小.

（5）无穷小的性质：在自变量的同一变化过程中，有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和、积仍是无穷小.

（6）无穷小与函数极限的关系：$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\alpha(x)=0$.

（7）等价无穷小的传递性和替换性：在自变量的同一变化过程中，

若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$ ，$\beta(x)\sim\gamma(x)$，则有 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$；

若 $\alpha(x)\sim\bar{\alpha}(x)$，$\beta(x)\sim\bar{\beta}(x)$，且 $\lim\dfrac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$存在，则有 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\dfrac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$.

常用的等价无穷小：当 $x\to0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$，$a^x-1\sim x\ln a$.

（8）两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

特别地，若 $\lim f(x)=0$，且 $f(x)\neq0$，则 $\lim\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$，$\lim(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$.

（9）无穷小与无穷大的关系：不等于零的无穷小的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

（10）结论：
$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_m}{b_n}, & m=n,\\ 0, & m<n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

（三）函数的连续性与间断点

1. 函数的连续性

定义 1：设函数 $y=f(x)$在点 x_0的某一邻域内有定义，

若 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 连续.

注：(1) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续必须满足的条件是：① $f(x)$ 在 x_0 点有定义；② $f(x_0-0)$ 及 $f(x_0+0)$ 都存在；③ $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$（$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$），则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 右（左）连续.

(3) 区间上每一点都连续的函数称为函数在该区间上连续.

2. 连续函数的性质

(1) 连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为连续函数；若函数 $y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 连续，且 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 仍连续.

(2) 初等函数在它们的定义区间上都是连续的.

(3) 闭区间上的连续函数：①必有最大值与最小值；②必有界；③若两端点的函数值异号，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$；④必能取得介于最大值与最小值之间的任何值.

3. 函数的间断点

定义 2： 若函数在点 x_0 处不连续，则称点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的间断点.

间断点的类型： 第一类间断点包括可去间断点与跳跃间断点，其特征是 $f(x_0\pm0)$ 都存在，若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，此间断点称为可去间断点，否则称为跳跃间断点. 除此之外的间断点统称为第二类间断点，如：无穷间断点和振荡间断点等.

（四）曲线的渐近线

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$，则直线 $y=c$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直（垂直）渐近线；

(3) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq0$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$，则直线 $y=kx+b$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形的斜渐近线.

二、典型例题

（一）极限的计算

1. 利用基本性质和公式求极限

【例 1】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=$________.

【解】 分子分母同除以 3^{n+1}，再取极限得 $\dfrac{1}{3}$.

【例 2】 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\arctan x=$________.

【解】 $x\to-\infty$ 时，$\arctan x\to-\dfrac{\pi}{2}$，$e^x\to0$，所以应填 0.

【例 3】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}=$________.

【解】 做此类题时，应用结论 10，主要考虑分子、分母中 x 的最高次数. 在此，分子为 $4^3x^6\cdot3^4x^4$，分母为 6^5x^{10}，所以极限为 $\dfrac{2}{3}$.

2. 利用等差、等比数列求和公式求极限

【例 4】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}\right)$.

【解】 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(n-1)}{2n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

【例 5】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

【解】 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}\right)=2$.

3. 利用部分分式法求和式的极限

【例 6】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

【解】 由于$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$，所以有

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1.$$

4. 消去零因子的不定型法

【例 7】 求$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

注：$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{x^2-1}=0$ 是错误的.

【例 8】 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$（$m$ 和 n 都是正整数）.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}=\dfrac{m}{n}$.

注：主要是通过因式分解或根式有理化，消去“0”因子，再用极限运算法则或连续函数求极限的方法求解.

5. 利用两个重要极限求极限

【例 9】 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{\ln(1+\sin x)}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{\ln(1+\sin x)}=1$.

【例 10】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3x+1}=$________.

【解】 $\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3x+1}=\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{3x+1}$，利用重要极限得知，应得 e^3.

注：对于形如 $\lim u(x)^{v(x)}$ 的极限，若 $\lim u(x)=1$，又 $\lim v(x)=\infty$ 时，应考虑用重要极限来做.

【例 11】 $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$.

【解】　原式$=\lim\limits_{x\to 0}[(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3\tan^2x}}]^3=e^3$.

6. 利用有界函数与无穷小的乘积为无穷小求极限

【例 12】　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

【解】　原式$=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$.

注：由于$x\to 0$时，x为无穷小量，而$\sin\dfrac{1}{x}$为有界函数，所以极限为0.

【例 13】　极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$的结果是________.

(A) 无穷大；　　　　(B) 零；

(C) $-\dfrac{1}{2}$；　　　　(D) 不存在，也不是无穷大.

【解】　因为$\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}=-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$，而$\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$是有界函数，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$，所以原极限等于0. 因而应选(B).

7. 利用等价无穷小求极限

【例 14】　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{3x}=$________.

【解】　注意到，$x\to 0$时，$\ln(1-2x)\sim-2x$，所以应填$\dfrac{-2}{3}$.

【例 15】　求$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sqrt{1-\cos x}}{e^{\sin x}-1}$.

【解】　由于$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}$，当$x\to 0$时，$\sin\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x}{2}$，$e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x$.

所以　原式$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2}\cdot\dfrac{x}{2}}{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【例 16】　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$.

【解】　当$x\to 1$时，$\ln(1+\sqrt[3]{x-1})\sim\sqrt[3]{x-1}$，$\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}\sim 2\sqrt[3]{x^2-1}$.

所以　原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$.

注：利用等价无穷小代换求极限时应注意，加减关系一般不能代换. 如，有的同学认为$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$所以有

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$，结果是错误的.

事实上，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

8. 利用夹逼定理求极限

【例 17】 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$.

【解】 由于 $\dfrac{n^2}{n^2+n\pi}\leqslant n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\dfrac{n^2}{n^2+\pi}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+\pi}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$.

【例 18】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

【解】 $0<\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n}{n\cdot n\cdot n\cdots n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdots\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n}{n}\leqslant\dfrac{1}{n}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

9. 利用单调有界法则求极限

【例 19】 设数列 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，…，$x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 数列显然是单调增加的，又 $x_1=\sqrt{2}<2$，假设 $x_{n-1}<2$，

$x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}=\sqrt{2+x_{n-1}}<\sqrt{2+2}=2$，即数列也是有界的. 从而知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ 两边取极限得，$a^2=2+a$，解得，$a=2$ 及 $a=-1$（舍去），所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

10. 利用连续性求极限

【例 20】 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{\sin\pi x}{x}\right)=$________.

【解】 $\because\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\pi x}{x}=\pi$，$\therefore$ 应填 -1.

【例 21】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+2x-3}=$________.

【解】 利用有理化的方法，分子分母同时乘以 $\sqrt{x+3}+2$，约去因子 $x-1$，即得 $\dfrac{1}{16}$.

【例 22】 设 $f(x)$ 处处连续，且 $f(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]=$________.

【解】 由于 $f(x)$ 处处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，所以应填 2。

11. 左、右极限

【例 23】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1,\\ x+1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 当 $x\to 1$ 时的结果是________.

(A) 1；　(B) 2；　(C) 0；　(D) 不存在.

【解】 $\because f(1-0)=1$，$f(1+0)=2$，$\therefore\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在. 因而应选(D).

【例 24】 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+e^x}$ 的结果是________.

(A) 0；　　(B) 1；　　(C) 不存在但不是∞；　　(D) ∞.

【解】 ∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^x}=1$，∴ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^x}$不存在，也不是无穷大. 因而应选(C).

【例 25】 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$的结果是________.

(A) 0；　　(B) $\frac{1}{2}$；　　(C) ∞；　　(D) 不存在.

【解】 分子分母同时乘以$\sqrt{x^2+x}+x$，即得知 $x\to+\infty$时结果是$\frac{1}{2}$，而 $x\to-\infty$时，原极限不存在. 所以应选(D).

注：以上就常用的几种方法进行了列举，随着学习内容的增加，还会有更多的求极限的方法.

(二) 判断间断点的类型

【例 26】 设 $f(x)=x\cos\frac{2}{x}+x^2$，则 $x=0$ 是 $f(x)$的________.

(A) 连续点；　(B) 可去间断点；　(C) 无穷间断点；　(D) 振荡间断点.

【解】 ∵$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，即 $f(0-0)=f(0+0)$，而 $f(0)$没有定义，∴$x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点. 应选(B).

【例 27】 设 $f(x)=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$的________.

(A) 可去间断点；　(B) 跳跃间断点；　(C) 无穷间断点；　(D) 振荡间断点.

【解】 ∵ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{3}\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\frac{1}{2}$，∴$x=0$ 是 $f(x)$的跳跃间断点. 应选(B).

【例 28】 下列函数在指出的点间断，说明这些间断点属于哪一类.

(1) $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，$x=1$，$x=2$；　　(2) $y=\cos^2\frac{1}{x}$，$x=0$；

(3) $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant1,\\ 3-x, & x>1,\end{cases}$ $x=1$.

【解】 (1) ∵$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x-2}=-2$，$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x+1}{x-2}=\infty$，∴$x=1$是第一类可去间断点，令 $y(1)=-2$，则 $y(x)$在 $x=1$ 处连续；而 $x=2$ 是第二类无穷间断点.

(2) 当 $x\to0$ 时，$y=\cos^2\frac{1}{x}$的值在 0 与 1 之间来回变动，∴$\lim\limits_{x\to0}\cos^2\frac{1}{x}$不存在，可知$x=0$ 是函数 $y=\cos^2\frac{1}{x}$的第二类振荡间断点.

(3) ∵ $\lim\limits_{x\to1^-}y(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to1^+}y(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(3-x)=2$，左右极限存在但不相等，所以 $x=1$ 是函数的第一类跳跃间断点.

(三) 确定函数及极限式中的常数

【例 29】 已知$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^p}=\frac{1}{2}$，则 $p=$________.

【解】 注意到，$\dfrac{\tan x-\sin x}{x^p}=\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^{p-1}}$，而 $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，可知 $p=3$.

【例 30】 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$，求 a 和 b.

【解】 当 $x\to1$ 时，分母 $x-1\to0$，必有分子的极限 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$，即有 $a+b+1=0$ $b=-a-1$ 代入原式，得

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1+a)=a+2=3,$$

$\therefore a=1$，$b=-2$.

【例 31】 若 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<a,\\ 2a, & x=a,\\ 3x-2, & x>a\end{cases}$ 在 $x=a$ 处连续，则 $a=$________.

【解】 由函数在一点连续的定义知，应有 $f(a-0)=f(a+0)=f(a)=2a$，所以 $a=2$.

【例 32】 已知 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, x>0,\\ a+x^2, x\leqslant0,\end{cases}$ 确定 a 的值，使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内连续.

【解】 当 $x>0$ 或 $x<0$ 时，函数为初等函数，所以函数在 $(-\infty,\infty)$ 内是否连续关键是在分界点 $x=0$ 处是否连续.

由于 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(a+x^2)=a$，又 $f(0)=a$，所以当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内连续.

【例 33】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a+b\cos10x}{e^{x^2}-1}, & x\neq0,\\ 50, & x=0,\end{cases}$ 试确定常数 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【解】 由函数在一点连续的定义知，在此须有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a+b\cos10x}{e^{x^2}-1}=50$，而 $\lim\limits_{x\to0}(e^{x^2}-1)=0$，故应分子的极限 $\lim\limits_{x\to0}(a+b\cos10x)=0$，得 $a+b=0$，即 $b=-a$. 又知，当 $x\to0$ 时，

$$1-\cos10x\sim\frac{1}{2}(10x)^2,\qquad e^{x^2}-1\sim x^2,$$

所以有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a+b\cos10x}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a-a\cos10x}{e^{x^2}-1}=a\lim\limits_{x\to0}\dfrac{50x^2}{x^2}=50a$，得 $a=1$.

$\therefore$ 当 $a=1$，$b=-1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【例 34】 若 $f(x)=\dfrac{e^{x-1}-a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，求 a.

【解】 由条件知，$x\to0$ 时，$f(x)\to\infty$，而 $x\to1$ 时，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，所以只要 $a\neq e^{-1}$，就有第一个条件满足，而 $x\to1$ 时，$e^{x-1}-1\sim x-1$，所以

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x-1}-1+1-a}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-a}{x(x-1)}$，要使极限存在必有 $a=1$.

(四) 杂例

【例 35】 无穷小量就是________.

(A) 比任何数都小的数；　　(B) 零；

(C) 以零为极限的函数；　　(D) 以上三种情况都不是.

【解】 由无穷小量的定义知，它是在自变量的变化过程中，以零为极限的函数，并不是一个很小的常数．当然零是一个无穷小量，但不能说无穷小量就是零，应选(C)．

【例 36】 当 $x\to x_0$ 时，若 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)(\beta\neq 0)$ 都是无穷小，则 $x\to x_0$ 时，下列哪一个表示式不一定是无穷小________．

(A) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$；　　(B) $\alpha^2(x)+\beta^2(x)$；

(C) $\ln[1+\alpha(x)\beta(x)]$；　　(D) $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$．

【解】 由于在自变量的同一变化过程中，有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和、积仍是无穷小，但是无穷小的商不一定是无穷小．比如，$x\to 0$ 时，$\alpha(x)=x$，$\beta(x)=x^3$ 均为无穷小，而$\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}=\dfrac{1}{x}$不再是无穷小．而当 $x\to x_0$ 时，由于 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都是无穷小，所以 $\ln(1+\alpha(x)\beta(x))\sim\alpha(x)\beta(x)$．因而应选(D)．

【例 37】 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，则当 $x\to x_0$ 时，无穷小 $f(x)+g(x)$ 与无穷小 $g(x)$ 的关系是________．

【解】 因为$\dfrac{f(x)+g(x)}{g(x)}=1+\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则由条件知，应填等价无穷小．

【例 38】 当 $x\to 0$ 时，$x^2-\sin x$ 是 x 的________．

(A) 高阶无穷小；　　(B) 同阶无穷小，但非等价无穷小；

(C) 低阶无穷小；　　(D) 等价无穷小．

【解】 $\because\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin x}{x}=-1$，$\therefore$是同阶无穷小，但不是等价无穷小，应选(B)．

【例 39】 “当 $x\to x_0$ 时，$f(x)-A$ 是无穷小”是“$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$”的________．

(A) 充分但非必要条件；　　(B) 必要但非充分条件；

(C) 充分必要条件；　　(D) 既非充分条件，也非必要条件．

【解】 由 $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\alpha(x)=0$ 知，应选(C)．

【例 40】 无穷大量与无界量的关系是________．

(A) 无穷大量可能是有界量；　　(B) 无穷大量一定不是有界量；

(C) 有界量可能是无穷大量；　　(D) 不是有界量就一定是无穷大量．

【解】 用无穷大的定义和无解的定义来区别这两个概念，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$是指在 $x=x_0$ 处的充分小邻域内，对于“所有的 x”，$f(x)$ 都可以任意大；而无界并不要求“所有的 x”．故无穷大量与无界函数的关系是：无穷大量必然是无界函数，反之不一定成立．故选（B）．

【例 41】 “数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在”是“数列$\{x_n\}$有界”的________．

(A) 充分必要条件；　　(B) 充分但非必要条件；

(C) 必要但非充分条件；　　(D) 既非充分条件，也非必要条件．

【解】 应选(B)．因为有界数列不一定有极限．比如，$1,-1,1,-1,\cdots$为有界数列，但是没有极限．所以是充分不必要的条件，选(B)．

【例 42】 当 $x\to x_0$ 时，若 $f(x)$ 有极限，$g(x)$ 没有极限，则下列结论正确的是________．

(A) $f(x)g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时必无极限；

(B) $f(x)g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时必有极限；

(C) $f(x)g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时可能有极限，也可能无极限；

(D) $f(x)g(x)$当$x\to x_0$时，若有极限其极限必等于零.

【解】 看以下两例：$x\to 0$时，$f(x)=x$，有极限0，$g(x)=\frac{1}{x}$无极限．但当$x\to 0$时，$f(x)g(x)$有极限1；而$f(x)=x$，$g(x)=\frac{1}{x^2}$，当$x\to 0$时，$f(x)g(x)$无极限．由此排除(A)，(B)，(D)，应选(C)．

【例 43】 设曲线的方程为$y=\frac{\sin x}{x}+\arctan(1-\sqrt{x})$，则________.

(A) 曲线没有渐近线； (B) $y=-\frac{\pi}{2}$是曲线的渐近线；

(C) $x=0$是曲线的渐近线； (D) $y=\frac{\pi}{2}$是曲线的渐近线.

【解】 由于$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{-\pi}{2}$，所以直线$y=\frac{-\pi}{2}$为函数$y=f(x)$的图形的水平渐近线．$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1+\frac{\pi}{4}$，从而函数$y=f(x)$没有垂直渐近线．所以应选(B)．

【例 44】 证明方程$x=a\sin x+b$，其中$a>0,b>0$，至少有一个正根，并且不超过$a+b$.

【证明】 设$f(x)=x-a\sin x-b$，显然它在$[0,a+b]$上连续，又$f(0)=-b<0$，$f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)=a[1-\sin(a+b)]\geqslant 0$.

若$f(a+b)=0$，知$a+b$即为方程$x=a\sin x+b$的一个正根，结论得证.

若$f(a+b)>0$则由零点定理知，至少存在一点$\xi\in(0,a+b)$，使得$f(\xi)=0$，即方程至少有一个正根，并且不超过$a+b$.

【例 45】 设$f(x),g(x)$都是闭区间$[a,b]$上的连续函数，且$f(a)>g(a)$，$f(b)<g(b)$，试证明在(a,b)内至少有一点$x=\xi$，使$f(\xi)=g(\xi)$.

【证明】 令$F(x)=f(x)-g(x)$，则$F(x)$在区间$[a,b]$上连续，又$F(a)=f(a)-g(a)>0$，$F(b)=f(b)-g(b)<0$，由零点定理知结论成立.

(五) 疑难解析

(1) 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$定义中的$N=N(\varepsilon)$不是$\varepsilon$的函数．只能说$N$与$\varepsilon$有关．因为$N$以后的项都可以取成定义中的$N$.

(2) 数列$\{x_n\}$与绝对值数列$\{|x_n|\}$收敛的关系是$\{x_n\}$收敛时$\{|x_n|\}$必定收敛．反之不一定成立．这是由于$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$．对于函数极限也有同样的结论.

(3) "如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，就有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$，那么必有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=1$." 结论是不对的，原因是分母的极限可能为零．分母的极限不为零时结论正确，当a为零时就不一定是什么结论了.

(4) 若数列$\{x_n\}$收敛，数列$\{y_n\}$发散，或二者都发散时，但数列$\{x_ny_n\}$的敛散性不能确定，要看具体情况.

① 由$y_n=\frac{x_ny_n}{x_n}$可得到下列结论：若数列$\{x_n\}$收敛且不收敛于零时，又数列$\{y_n\}$发散，则数列$\{x_ny_n\}$必然发散．否则与$\{y_n\}$发散矛盾.