普通高等教育“十一五”国家级规划教材

复旦卓越·数学系列

高等职业技术院校教材

实用数学（下册）经管类

主　编　张圣勤　应惠芬

复旦大学出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

复旦卓越·数学系列

高等职业技术院校教材

实用数学（下册）经管类

编委会主任 刘子馨

编委会成员（按姓氏笔画排列）

王 星 叶迎春 孙卫平 孙福兴 许燕频 应惠芬

张圣勤 沈剑华 金建光 姚光文 诸建平 焦光利

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实用数学·(下册)经管类 / 张圣勤,应惠芬主编.
—上海:复旦大学出版社,2010.5
(复旦卓越·数学系列)
ISBN 978-7-309-07224-2

Ⅰ.实… Ⅱ.①张…②应… Ⅲ.高等数学—高等学校—
教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 068195 号

实用数学·(下册)经管类
张圣勤 应惠芬 主编
出品人/贺圣遂 责任编辑/张志军

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65100562
外埠邮购:86-21-65109143
江苏省句容市排印厂

开本 787×960 1/16 印张 12 字数 217 千
2010 年 5 月第 1 版 2010 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-07224-2/O·445
定价:23.00 元

内容提要

《实用数学》共分上、下两册（下册分为经管类和工程类两种）.本册为经管类用书，共分5章，分别介绍了二阶微分方程、二元函数微积分学、图与网络基础、概率论基础，以及相关数学实验、数学建模、数学文化等内容.书末所附光盘内含本书数学实验和数学建模的教学辅助软件.同时，本书还有配套练习册可供选用.

本书可作为高职高专或者普通本科院校的高等数学、工程数学课程教材，也可以作为一般工程技术人员的参考书.

前　言

欢迎使用这套《实用数学》教材. 本套教材根据教育部现行高等职业教育数学教学大纲、教学基本要求，组织部分高等职业技术院校和普通高校长期从事高职数学教学的资深教师编写，主要适用于高职高专或普通高校工科和经管类学生，也可作为高职成人教育教材和自学考试学生的课外教材，同时也可作为一般工程技术人员的参考书.

随着当今计算工具和计算技术的飞速发展，数学这门既传统又古老的基础课程也正在发生着深刻的变化. 放眼当今世界的科学技术界，手工设计和计算正在或即将成为历史，代之而起的是计算机设计和计算. 高等数学课程的计算功能正在与计算机技术密切结合，形成众多的计算技术和计算软件，而这些计算技术和计算软件正在科学领域、工程领域、经济管理等领域发挥着不可替代的作用. 作为高等教育重要基础课程的高等数学，应该教什么、怎么教的问题比任何时候都要突出. 在这样一个大背景下，在本书的编写过程中，作者们本着顺应时代潮流，对国家和民族负责、对学生负责的态度，以构建适合于我国国情的高职教育的公共课程体系为己任，以符合大纲要求、优化结构体系、加强实际应用、增加知识容量为原则，以新世纪社会主义市场经济形势下制造业对人才素质的要求为前提，以高职数学在高职教育中的功能定位和作用为基础，努力编写一套思想内涵丰富、实际应用广泛、反映最新计算思想和技术、简单易学的高等数学教材. 因此，在内容上删去了一些繁琐的推理和证明，比传统数学教材增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯；书中加入了大量的例题和习题，并照顾到高职多专业的特点，力求做到习题难易搭配适当，知识与应用结合紧密、掌握理论与培养能力相得益彰；在结构的处理上，注意与现行高中及中职教学内容的衔接，同时注意吸收国内外高职教材的优点，照顾到高职各专业的特点和需要，适当精简结构，使之更趋合理. 为跟上当今计算机应用的发展步伐和大学生参加数学建模的需要，特意增加了一些数学软件的实验和数学建模的练习. 书中带有 * 号的内容为选学内容.

《实用数学》共分上、下两册(下册分为经济类与工程类两种). 本书为下册经管类，内容包括二阶微分方程、二元函数微积分学、图与网络基础、概率论基础、数理统计初步，以及相关的数学实验和数学建模等. 本书所附光盘内含本书数学实验和数学建模的教学辅助软件. 同时，本书还配有配套练习册可供选用. 使用本教材的学校可另外向复旦大学出版社索要教师用教学辅助光盘或到复旦大学出版

社的网站下载.在光盘中我们为各使用学校和教师们准备了本书全套的标准化教案、教学用 PPT 课件等教学辅助资料.此外,教学辅助网站也正在建设中.

本书由张圣勤、应惠芬担任主编,并最后统稿.参与具体编写的有应惠芬(第 7、第 8 章)、王星(第 9 章及所有数学实验部分)、孙福兴(第 10 章)、许燕频(第 11 章).

在本书的编写过程中,各位作者得到了各参编院校各级领导的关心和支持,同时也得到了复旦大学出版社领导和各位编辑的支持,编写中也参阅了有关的文献和教材,在此一并表示衷心的感谢!

由于时间仓促,加之水平有限,书中疏漏错误之处在所难免,恳切期望使用本书的师生多提意见和建议,以便于再版时更正.

编　者
2010 年 1 月

目　　录

第 7 章　二阶微分方程 …… 1

§7.1　二阶可降阶微分方程 …… 1

练习与思考 7-1 …… 4

§7.2　二阶常系数线性方程 …… 5

7.2.1　二阶线性微分方程及其解的结构 …… 5

7.2.2　二阶常系数线性齐次微分方程的解法 …… 7

练习与思考 7-2(1) …… 9

7.2.3　二阶常系数线性非齐次微分方程的解法 …… 10

练习与思考 7-2(2) …… 14

§7.3　数学实验（六）——二阶微分方程 …… 14

练习与思考 7-3 …… 15

§7.4　数学建模(五)——微分方程模型 …… 15

7.4.1　固定资产折旧模型 …… 15

7.4.2　新产品推销模型 …… 17

7.4.3　商品价格波动模型 …… 19

7.4.4　房贷模型 …… 20

练习与思考 7-4 …… 25

本章小结 …… 27

本章复习题 …… 29

第 8 章　二元函数微积分学 …… 32

§8.1　二元函数偏导数 …… 32

8.1.1　二元函数及其偏导数 …… 32

8.1.2　二元复合函数求导法则 …… 37

8.1.3　偏导数在经济上的应用 …… 38

练习与思考 8-1 …… 41
§8.2 二元函数极值 …… 41
8.2.1 二元函数的极值与最值 …… 41
8.2.2 二元函数条件极值与拉格朗日乘数法 …… 44
练习与思考 8-2 …… 45
*§8.3 二重积分 …… 45
8.3.1 二重积分的概念及其性质 …… 45
8.3.2 二重积分的简单计算 …… 49
练习与思考 8-3 …… 52
§8.4 数学实验(七)——二元微积分 …… 52
练习与思考 8-4 …… 53
本章小结 …… 54
本章复习题 …… 56
第 9 章 图与网络基础 …… 59
§9.1 最短路与中国邮路问题 …… 59
9.1.1 图的基本概念 …… 59
9.1.2 最短路问题 …… 61
9.1.3 欧拉回路与中国邮路问题 …… 63
练习与思考 9-1 …… 65
§9.2 网络流 …… 66
9.2.1 容量网络的基本概念 …… 66
9.2.2 容量网络的最大流问题 …… 67
9.2.3 网络最小费用最大流 …… 71
练习与思考 9-2 …… 72
§9.3 数学实验(八)——图与网络 …… 73
练习与思考 9-3 …… 74
§9.4 数学建模(六)——网络模型 …… 75
9.4.1 最短路模型 …… 75
9.4.2 网络流模型 …… 78

练习与思考 9-4 …… 79
本章小结 …… 80
本章复习题 …… 81
第 10 章　概率论基础 …… 84
§10.1　随机事件及其概率 …… 84
10.1.1　随机事件 …… 84
10.1.2　随机事件的概率与古典概型 …… 87
练习与思考 10-1(1) …… 90
10.1.3　随机事件的条件概率及其有关的 3 个概率公式 …… 90
10.1.4　随机事件的独立性及贝努里概型 …… 94
练习与思考 10-1(2) …… 96
§10.2　随机变量及其概率分布 …… 97
10.2.1　随机变量及其概率分布函数 …… 97
10.2.2　离散型随机变量及其概率分布律 …… 99
练习与思考 10-2(1) …… 103
10.2.3　连续型随机变量及其概率分布密度 …… 104
练习与思考 10-2(2) …… 111
§10.3　随机变量的数字特征 …… 111
10.3.1　随机变量的数学期望 …… 112
10.3.2　随机变量的方差 …… 116
*10.3.3　大数定律与中心极限定理简介 …… 119
练习与思考 10-3 …… 121
本章小结 …… 122
本章复习题 …… 125
第 11 章　数理统计初步 …… 128
§11.1　数理统计的概念 …… 128
11.1.1　总体与样本 …… 128
11.1.2　统计量及统计量分布 …… 129
练习与思考 11-1 …… 133

§11.2 总体参数的估计 …… 134
11.2.1 参数点估计及估计量的优良标准 …… 134
11.2.2 参数的区间估计 …… 136
练习与思考 11-2 …… 139
§11.3 总体参数的假设检验 …… 140
11.3.1 假设检验概念 …… 140
11.3.2 正态总体均值的假设检验 …… 141
11.3.3 正态总体方差的假设检验 …… 143
练习与思考 11-3 …… 145
§11.4 一元回归分析 …… 145
11.4.1 一元线性回归分析中的参数估计 …… 146
11.4.2 一元线性回归分析中的假设检验与预测 …… 148
11.4.3 可线性化的一元非线性回归 …… 150
练习与思考 11-4 …… 152
§11.5 数学实验(九)——概率统计 …… 153
练习与思考 11-5 …… 157
§11.6 数学模型(七)——随机模型 …… 157
练习与思考 11-6 …… 161
本章小结 …… 162
本章复习题 …… 164
附录 A 参考答案 …… 167
附录 B 概率统计用表 …… 175
附表Ⅰ 标准正态分布表 …… 175
附表Ⅱ 泊松分布表 …… 176
附表Ⅲ χ^2 分布表 …… 177
附表Ⅳ t 分布表 …… 179
附表Ⅴ F 分布表 …… 180
附表Ⅵ 相关系数表 …… 183

第 7 章

二阶微分方程

微分方程的技术和理论，最早溯源于牛顿在天体力学中对行星运动及其轨道的定量研究. 其后微分方程不仅是对天体力学，而且也是对一切物质运动及其动力机制进行本质刻画和定量研究的主要手段. 一个物质运动，它的运动过程是由物质所在的系统的内部物理机制和外部作用力所决定的. 那么，如何由运动的物理机理和外部的作用力来精确地确定运动过程？这就需要我们运用数学工具，将运动机理与外部作用力的作用定量地表示成数学模型——微分方程，然后应用数学的运算技巧，将实际的运动过程从微分方程中求解出来.

微分方程是一门十分有用又十分有魅力的学科，自 1693 年微分方程概念的提出到动力系统的长足发展，常微分方程经历漫长而又迅速的发展，极大地丰富了数学的内容. 可以预测：随着依赖数学为基础的其他学科的发展，微分方程还会继续扩展. 力学、天文学、几何学等领域的许多问题都导致微分方程. 甚至许多社会科学的问题亦导致微分方程，如人口发展模型、交通流模型……因而微分方程的研究是与人类社会密切相关的. 1846 年，数学家与天文学家合作，通过求解微分方程，发现了海王星，这是人类智慧的结晶，也是微分方程巨大作用的体现，体现了数学演绎法的强大威力. 1991 年，科学家在阿尔卑斯山发现了一个肌肉丰满的冰人，根据躯体所含碳原子消失的程度，通过求解微分方程，推断这个冰人大约遇难于 5 000 年以前. 对于数学，特别是数学的应用，微分方程所具有的重大意义主要在于：很多物理与技术问题可以化归为微分方程的求解问题.

但是，它的现有理论也还远远不能满足需要，还有待于进一步的发展，使这门学科的理论更加完善.

§7.1 二阶可降阶微分方程

在上册我们已经学习了简单的一阶微分方程，本节我们将学习二阶微分方程中较为简单的几种方程.

二阶微分方程是含有未知函数 $y = f(x)$ 的二阶导数（即含 y''）的微分方程.

一般的二阶微分方程没有普遍的解法，本节和下节讨论两种特殊类型的二阶方程，分别用积分方法和代数方法求解. 这里先讨论二阶可降阶微分方程，它们可以通过积分求解. 有的经过适当的变量替换可降阶为一阶微分方程，求解一阶微分方程后，再将变量回代，从而求得所给二阶微分方程的解.

1. $y''=f(x)$ 型

如 $y''=e^x-\sin x$ 这种类型的方程是最简单的二阶微分方程，求解方法是逐次积分.

在方程 $y''=f(x)$ 的两边同时求积分，得

$$y'=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

再次积分，得

$$y=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{d}x+C_2.$$

注 这种类型的方程解法可推广到 n 阶微分方程 $y^{(n)}=f(x)$，只要连续积分 n 次，既可得到这个方程的含有 n 个任意常数的通解.

例 1 求方程 $y''=e^{2x}+\cos x$ 满足 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 的特解.

解 对所给方程连续两次积分.

第一次积分：$y'=\int(e^{2x}+\cos x)\mathrm{d}x+C_1=\frac{1}{2}e^{2x}+\sin x+C_1.$ ①

第二次积分：$y=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}+\sin x+C_1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}e^{2x}-\cos x+C_1x+C_2.$ ②

在 ① 中代入条件 $y'(0)=1$，得 $C_1=\frac{1}{2}$. 在 ② 中代入条件 $y(0)=0$，得 $C_2=\frac{3}{4}$. 所给方程的特解为

$$y=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}.$$

2. $y''=f(x,y')$ 型

如 $y''=y'+x$ 这种类型的方程的特点是不显含未知函数 y，其求解方法如下：令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'(x)$，于是原方程化为以 $p(x)$ 为未知函数的一阶微分方程

$$p'(x)=p(x)+x,$$

即形如 $p'=f(x,p)$，积分并设其通解为

$$p=\varphi(x,C_1),$$

即 $y'=\varphi(x,C_1)$，再求积分得

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2.$$

这就是原方程的通解.

例 2　求方程 $(1+x^2)y''-2xy'=0$ 的通解.

解　这是一个不显含未知函数 y 的二阶微分方程.

令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'(x)$，于是原方程降阶为以 $p(x)$ 为未知函数的一阶微分方程

$$(1+x^2)p'-2xp=0,$$

即 $(1+x^2)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-2xp=0$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{p}\mathrm{d}p=\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2),$$

即 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln|C_1|$. 化简得

$$p=C_1(1+x^2),$$

即 $y'=C_1(1+x^2)$. 再次积分得

$$y=\int C_1(1+x^2)\mathrm{d}x.$$

所以原方程的通解为　$y=C_1\left(x+\dfrac{1}{3}x^3\right)+C_2.$

3. $y''=f(y,y')$ 型

如 $y\cdot y''-y'^2=0$，$y''=y'^3+y'$，$y^3y''-1=0$，$y''-4y=0$ 这类方程的特点是不显含自变量 x，而且方程中 y,y' 的次数可以是 2 次幂或更高次幂. 这类方程的求解方法如下.

把 y 暂时看作自变量，并作变换 $y'=p(y)$，由复合函数的链式求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot p=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

因而原方程 $y''=f(y,y')$ 化为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)\text{，或 }p\cdot p'=f(y,p).$$

上式是关于变量 y 和 p 的一阶微分方程，设关于变量 p 求积分得到的通解为

$$p=y'=\varphi(y,C_1)\text{，即}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1),$$

分离变量得

$$\frac{1}{\varphi(y,C_1)}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x.$$

求积分得

$$\int \frac{1}{\varphi(y,C_1)}\mathrm{d}y = x + C_2.$$

求此积分可得原方程的通解.

例 3 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 所给方程不显含自变量 x，所以可设 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程 $yy'' - y'^2 = 0$，得

$$y \cdot p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0，即\ p\left(y \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p\right) = 0.$$

在 $p \neq 0, y \neq 0$ 时，约去 p 并分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，两边求积分得

$$\int \frac{1}{p}\mathrm{d}p = \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y,$$

即 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$（为什么不用 C_1 而用 $\ln|C_1|$?），化简得 $p = C_1 y$，即 $y' = C_1 y$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y$. 对方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y$ 分离变量得

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int C_1 \mathrm{d}x,$$

求积分得

$$\ln|y| = C_1 x + C_3，即\ y = \pm \mathrm{e}^{C_1 x + C_3} = \pm \mathrm{e}^{C_3} \cdot \mathrm{e}^{C_1 x}.$$

化简得所给方程的通解为 $y = C_2 \mathrm{e}^{C_1 x}$ （$C_2 = \pm \mathrm{e}^{C_3}$）.

注 上述通解实际上也包含了 $p = 0$（即 $C_1 = 0$ 的情形）和 $y = 0$（即 $C_2 = 0$ 的情形）这两个解（或平凡解）.

练习与思考 7-1

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $y'' = x + \sin x$； (2) $y'' = y' + x$； (3) $xy'' = y' + x^2$；

(4) $y'' - 4y' = 0$； (5) $y^3 y'' - 1 = 0$； (6) $y'' = y'^3 + y'$.

2. 求下列微分方程的初值问题：

(1) $y'' - y'^2 = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -1$；

(2) $y'' = 3\sqrt{y}, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$.

3. 设火车在平直的轨道上以 16 米 / 秒的速度行驶，当司机发现前方约 200 米处有行人（假设行人不能走开）时，立即以加速度 -0.8 米 / 秒的速度减速. 试问：

(1) 自刹车后需多长时间火车才能刹住？

(2) 自开始刹车到火车停车，火车行驶了多少路程？

(3) 前方的行人有无危险？

§7.2　二阶常系数线性方程

上节讨论了二阶可降阶方程，本节讨论二阶常系数线性方程.

7.2.1　二阶线性微分方程及其解的结构

定义 1　形如

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad ①$$

的方程称为**二阶线性微分方程**，方程右端 $f(x)$ 称为自由项.

当 $f(x) \equiv 0$ 时，方程 ① 变为

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad ②$$

称为**二阶线性齐次微分方程**；

当 $f(x) \neq 0$ 时，方程 ① 称为**二阶线性非齐次微分方程**；

当系数 $P(x)$，$Q(x)$ 分别为常数 p，q 时，则称方程

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad ③$$

为**二阶常系数线性齐次微分方程**，称方程

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad ④$$

为**二阶常系数线性非齐次微分方程**.

1. 二阶线性齐次微分方程解的性质

定理 1(线性齐次方程解的叠加性)　如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 都是二阶线性齐次微分方程 ② 的解，则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$($C_1$，$C_2$ 是任意常数) 也是方程 ② 的解.

例 1　对于二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$，

(1) 如果 $y_1 = C_1\mathrm{e}^x$，$y_2 = C_2x\mathrm{e}^x$ 是方程的解，试验证 $y_1 + y_2$ 也是方程的解，而且是通解.

(2) 如果 $y_1 = C_1\mathrm{e}^x$，$y_2 = C_2\mathrm{e}^x$ 是方程的解，$y_1 + y_2$ 是否为方程的通解？

解　(1) 将下列 3 式

$$y_1 + y_2 = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x,$$

$$(y_1 + y_2)' = (C_1 + C_2)\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x,$$

$$(y_1 + y_2)'' = (C_1 + 2C_2)\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x$$

代入原方程 $y'' - 2y' + y = 0$，容易验证 $y_1 + y_2$ 满足方程，所以是原方程的解. 又这里 C_1，C_2 为两个任意常数，所以是通解.

(2) $y_1 + y_2 = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^x = (C_1 + C_2)\mathrm{e}^x = C\mathrm{e}^x$，这里只有一个任意常数，所以 $y_1 + y_2$ 不是方程的通解.

思考：已知方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个特解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$，$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是否一定为方程的通解？若不一定，那么在什么条件下才是通解呢？

当 $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}=k$（常数）时，$y_1+y_2=y_1(x)+ky_1(x)=Cy_1(x)$，只有一个任意常数 C，此时 y_1+y_2 不是方程的通解. 在例 1 的(2)中，比值 $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}=\dfrac{C_2e^x}{C_1e^x}=\dfrac{C_2}{C_1}=k$，所以 y_1+y_2 不是方程的通解.

当 $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}\neq k$ 时，y_1+y_2 中含有两个任意常数，所以是方程的通解. 在例 1 的(1)中，比值 $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}=\dfrac{C_2xe^x}{C_1e^x}=Cx\neq k$，$y_1+y_2$ 一定含有两个任意常数，所以是方程的通解.

定义 2 设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是定义在某个区间上的两个函数，如果存在常数 $k(k\neq 0)$ 或不全为 0 的常数 k_1,k_2，使得对于该区间内的一切 x，有

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)}=k \quad 或 \quad k_1y_1(x)+k_2y_2(x)=0$$

成立，则称 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在该区间内**线性相关**，否则称 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在该区间内**线性无关**.

在例 1 的(2)中 $y_1=C_1e^x$ 与 $y_2=C_2e^x$ 是线性相关的，(1)中的 $y_1=C_1e^x$ 与 $y_2=C_2xe^x$ 是线性无关的.

2. 二阶线性齐次微分方程通解的结构

定理 2(线性齐次方程通解的结构) 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是二阶线性齐次微分方程②的两个线性无关的特解，则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 就是方程的通解，其中 C_1,C_2 为两个任意常数.

例 2 验证 $y_1=e^{-x}$，$y_2=e^{2x}$ 都是微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

解 $y_1'=-e^{-x}$，$y_1''=e^{-x}$；$y_2'=2e^{2x}$，$y_2''=4e^{2x}$. 把它们分别代入方程 $y''-y'-2y=0$ 的左端，得

$$e^{-x}+e^{-x}-2e^{-x}=0, 4e^{2x}-2e^{2x}-2e^{2x}=0,$$

等式成立，故 $y_1=e^{-x}$，$y_2=e^{2x}$ 都是微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的解.

由于 $\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{e^{2x}}{e^{-x}}=e^{3x}\neq k$，因此 $y_1=e^{-x}$ 与 $y_2=e^{2x}$ 是两个线性无关的特解，所以所给方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$（C_1,C_2 为两个任意常数）.

3. 二阶线性非齐次微分方程解的结构与性质

定理 3(线性非齐次方程解的结构) 设 y^* 是二阶线性非齐次微分方程①的一个特解，而 Y 是其对应的齐次方程②的通解，则 $y=Y+y^*$（齐次方程通解＋非

齐次方程特解）就是方程 ① 的通解.

定理 4(线性非齐次方程解的可加性)　设 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

与

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^* + y_2^*$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的特解.

* **定理 5**　若 $y_1 + \mathrm{i}y_2$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + \mathrm{i}f_2(x)$$

的解，则 y_1, y_2 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

与

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的解（其中 $P(x), Q(x), f_1(x), f_2(x)$ 为实值函数，i 为纯虚数）.

7.2.2　二阶常系数线性齐次微分方程的解法

根据定理2，要求二阶常系数齐次线性微分方程③的通解，关键是寻找其任意两个线性无关的特解 y_1, y_2，即可得通解 $y = C_1y_1 + C_2y_2$. 而找方程 ③ 的特解，就是要找一个函数 y，使 y, y', y'' 分别乘以 $1, p, q$ 后相加为 0.

指数函数 $y = \mathrm{e}^{rx}$（r 为常数）的各阶导数仍为指数函数，之间相差一个常系数，所以猜想指数函数 $y = \mathrm{e}^{rx}$ 是方程的解.

设指数函数 $y = \mathrm{e}^{rx}$（r 为待定常数）是方程的解，将 y, y', y'' 代入方程 $y'' + py' + qy = 0$，整理得

$$(r^2 + pr + q)\mathrm{e}^{rx} = 0.$$

因为 $\mathrm{e}^{rx} \neq 0$，所以

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{5}$$

这表明，只要常数 r 满足方程 ⑤，函数 $y = \mathrm{e}^{rx}$ 就是二阶常系数齐次线性微分方程 ③ 的解，所以方程 ③ 的求解就转化为方程 ⑤ 的求解.

我们把一元二次方程 ⑤ 称为二阶常系数齐次线性微分方程 ③ 的**特征方程**，方程 ⑤ 的根 $r = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ 称为方程 ⑤ 的**特征根**.

比较方程 ③ 和 ⑤ 可知，r^2, r, r^0（即常数项）的系数与 y'', y', y 的系数是一样的.

下面按照特征根的 3 种不同情况，分别讨论二阶常系数齐次线性微分方程 ③