

高等代數

(物 二)

數學系 代數教研室編

東北師範大學

一九五五年十二月・長春

附

高等代數 (物二)

編者：數學系代數教研室編

出版者：東北師範大學教務處教材科

印刷者：東北師範大學教材科印刷廠

一九五五年十二月·初版，400冊

54.01.29 0.2

目 錄

0.2

(I) 綫性代數初步.....	1
第一章 行列式論	1
§ 1. 數環和數體.....	1
§ 2. 排列及對換.....	5
§ 3. n 階行列式的定義及其基本性質.....	11
§ 4. 子式及代數餘子式.....	20
§ 5. 行列式按一行(或一列)的元素的展開 式. 拉普拉斯定理(不加證明)	22
§ 6. 行列式的計算法.....	27
§ 7. 克萊姆法則.....	30
第二章 綫性方程組	36
§ 8. n 維向量組的綫性相關.....	36
§ 9. 矩陣及其秩.....	48
§ 10. 綫性方程組之相容性的判別法則.....	51
第三章 綫性變換和矩陣, 二次齊式	59
§ 11. 變數的綫性變換和矩陣.....	59
§ 12. 關於兩個方陣之乘積的行列式定理.....	62
§ 13. 方陣乘法的基本性質.....	66
§ 14. 化二次齊式為標準形式.....	73

§ 15. 慣性定律 (不加證明), 實二次齊式的分類 82

§ 16. 正交變換 90

終

目

I	 卷四 幾何學 (I)	
I	 論及幾何 第一章	
I	 幾何學 第一章	1. 1
I	 幾何學 第二章	2. 1
II	 幾何學 第三章	3. 1
III	 幾何學 第四章	4. 1
IV	 幾何學 第五章	5. 1
V	 幾何學 第六章	6. 1
VI	 幾何學 第七章	7. 1
VII	 幾何學 第八章	8. 1
VIII	 幾何學 第九章	9. 1
IX	 幾何學 第十章	10. 1
X	 幾何學 第十一章	11. 1
XI	 幾何學 第十二章	12. 1
XII	 幾何學 第十三章	13. 1
XIII	 幾何學 第十四章	14. 1
XIV	 幾何學 第十五章	15. 1
XV	 幾何學 第十六章	16. 1
XVI	 幾何學 第十七章	17. 1
XVII	 幾何學 第十八章	18. 1
XVIII	 幾何學 第十九章	19. 1
XIX	 幾何學 第二十章	20. 1
XX	 幾何學 第二十一章	21. 1
XXI	 幾何學 第二十二章	22. 1
XXII	 幾何學 第二十三章	23. 1
XXIII	 幾何學 第二十四章	24. 1
XXIV	 幾何學 第二十五章	25. 1
XXV	 幾何學 第二十六章	26. 1
XXVI	 幾何學 第二十七章	27. 1
XXVII	 幾何學 第二十八章	28. 1
XXVIII	 幾何學 第二十九章	29. 1
XXIX	 幾何學 第三十章	30. 1
XXX	 幾何學 第三十一章	31. 1
XXXI	 幾何學 第三十二章	32. 1
XXXII	 幾何學 第三十三章	33. 1
XXXIII	 幾何學 第三十四章	34. 1
XXXIV	 幾何學 第三十五章	35. 1
XXXV	 幾何學 第三十六章	36. 1
XXXVI	 幾何學 第三十七章	37. 1
XXXVII	 幾何學 第三十八章	38. 1
XXXVIII	 幾何學 第三十九章	39. 1
XXXIX	 幾何學 第四十章	40. 1
XL	 幾何學 第四十一章	41. 1
XLI	 幾何學 第四十二章	42. 1
XLII	 幾何學 第四十三章	43. 1
XLIII	 幾何學 第四十四章	44. 1
XLIV	 幾何學 第四十五章	45. 1
XLV	 幾何學 第四十六章	46. 1
XLVI	 幾何學 第四十七章	47. 1
XLVII	 幾何學 第四十八章	48. 1
XLVIII	 幾何學 第四十九章	49. 1
XLIX	 幾何學 第五十章	50. 1
L	 幾何學 第五十一章	51. 1
LI	 幾何學 第五十二章	52. 1
LII	 幾何學 第五十三章	53. 1
LIII	 幾何學 第五十四章	54. 1
LIV	 幾何學 第五十五章	55. 1
LV	 幾何學 第五十六章	56. 1
LVI	 幾何學 第五十七章	57. 1
LVII	 幾何學 第五十八章	58. 1
LVIII	 幾何學 第五十九章	59. 1
LIX	 幾何學 第六十章	60. 1
LX	 幾何學 第六十一章	61. 1
LXI	 幾何學 第六十二章	62. 1
LXII	 幾何學 第六十三章	63. 1
LXIII	 幾何學 第六十四章	64. 1
LXIV	 幾何學 第六十五章	65. 1
LXV	 幾何學 第六十六章	66. 1
LXVI	 幾何學 第六十七章	67. 1
LXVII	 幾何學 第六十八章	68. 1
LXVIII	 幾何學 第六十九章	69. 1
LXIX	 幾何學 第七十章	70. 1
LXX	 幾何學 第七十一章	71. 1
LXXI	 幾何學 第七十二章	72. 1
LXXII	 幾何學 第七十三章	73. 1
LXXIII	 幾何學 第七十四章	74. 1
LXXIV	 幾何學 第七十五章	75. 1
LXXV	 幾何學 第七十六章	76. 1
LXXVI	 幾何學 第七十七章	77. 1
LXXVII	 幾何學 第七十八章	78. 1
LXXVIII	 幾何學 第七十九章	79. 1
LXXIX	 幾何學 第八十章	80. 1
LXXX	 幾何學 第八十一章	81. 1
LXXXI	 幾何學 第八十二章	82. 1
LXXXII	 幾何學 第八十三章	83. 1
LXXXIII	 幾何學 第八十四章	84. 1
LXXXIV	 幾何學 第八十五章	85. 1
LXXXV	 幾何學 第八十六章	86. 1
LXXXVI	 幾何學 第八十七章	87. 1
LXXXVII	 幾何學 第八十八章	88. 1
LXXXVIII	 幾何學 第八十九章	89. 1
LXXXIX	 幾何學 第九十章	90. 1
LXXXX	 幾何學 第九十一章	91. 1
LXXXXI	 幾何學 第九十二章	92. 1
LXXXXII	 幾何學 第九十三章	93. 1
LXXXXIII	 幾何學 第九十四章	94. 1
LXXXXIV	 幾何學 第九十五章	95. 1
LXXXXV	 幾何學 第九十六章	96. 1
LXXXXVI	 幾何學 第九十七章	97. 1
LXXXXVII	 幾何學 第九十八章	98. 1
LXXXXVIII	 幾何學 第九十九章	99. 1
LXXXXIX	 幾何學 第一百章	100. 1

高等代數

一九五五——一九五六學年第一學期

物理系二年級用 代數教研室編

★

(I) 線性代數初步

第一章 行列式論

§ 1. 數環和數體

我們知道，數是在不同的時期中由於勞動人民在生活勞動中的需要而產生的。

最初由於計算物體的個數而產生了自然數：

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots;$$

後來又導入了0，用它表示沒有物體；然後又由於測量上的需要就導入了分數 $\frac{m}{n}$ ，其中m是自然數或零，而n是自然數；後來又由於測量有方向的量的需要，就產生了負數；隨後又由於實際上的需要產生了實數和複數。

任何幾個數的總體叫做數集（或數集合）。

通常採用記號 $\mathbb{Z}$ 來表示由一切正整數（即自然數）、零及一切負整數所組成的整數集：

$$\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots;$$

用記號 $\mathbb{R}$ 表示由一切正和負整數、零及一切正和負分數所組成的有理數集；用記號

$\mathbb{D}$ 表示由一切有理數及無理數所組成的實數集；用記號 $\mathbb{C}$ 表示由一切實數及一切複

數所組成的複數集。

若 a 為某一集合 M 的元素，我們就用記號 $a \in M$ 表示之，記號 $a \in M$ 讀作「 a 屬於 M 」。例如， $1 \in \mathbb{Z}$ ， $15 \in \mathbb{Z}$ ， $-\frac{3}{5} \in \mathbb{R}$ ， $\sqrt{2} \in \mathbb{D}$ 等等。

我們已經知道的加法、減法、乘法、除法這四種運算，都叫做算術運算。

若在一個數集內由於施行某一算術運算所得的數仍屬於該數集，就說這個運算在該數集內是可施行的。

例如，加法和乘法運算在自然數集 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 內是可施行的，因為若 a 和 b 為任二自然數，顯然 $a+b$ 和 ab 仍為自然數，然而減法和除法運算在自然數集內不是可施行的，因為若 $a < b$ 為二自然數，則 $a-b$ 是一個負整數，而不是自然數；又若 a 不是 b 的倍數時，則 $\frac{a}{b}$ 也不是自然數，而是一個分數。減法在 $\mathbb{Z}$ 內是可施行的，但除法在 $\mathbb{Z}$ 內仍不是可施行的，而除法在 $\mathbb{R}$ 內就是可施行的了。

在高等代數裏，所研究的主要對象是多項式和方程。為了明確多項式和方程之係數的討論範圍，我們先來介紹數環和數體這兩個概念。

定義 1。如果加法、減法和乘法在一個數集內都是可施行的，那麼這個數集就叫做數環。

定義 2。在一個至少包含着一個非零之數的數環內，如果除法（零除除外）也是可施行的，則此數環叫做數體。

例 1。 $\mathbb{Z}$ ， $\mathbb{R}$ ， $\mathbb{D}$ ， $\mathbb{K}$ 都是數環，因為加法、減法和乘法在這些數集內都是可實行的，但是 $\mathbb{Z}$ 不是數體，因為除法在 $\mathbb{Z}$ 內不是可施行的；而 $\mathbb{R}$ ， $\mathbb{D}$ ， $\mathbb{K}$ 都是數體，因為它們都是能施行除法的數環。

例 2。設 a 是一個整數，則由 a 的一切倍數

$$\dots, -2a, -a, 0, a, 2a, \dots$$

所成的數集是一個環，因為 a 的任意兩個倍數 la 及 ma 的和、差、積仍為 a 的倍數：

$$la \pm ma = (l \pm m)a, la \cdot ma = (lma)a.$$

特別的，偶數集 $\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots$

$\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots$

是一個數環。此外，數集

$\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots$

和 $\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots$

$\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots$

都是數環，而這些數環顯然都是整數環 $\mathbb{Z}$ 的一部分，因此把它們叫做 $\mathbb{Z}$ 的子環。

例 3. 由一切奇數

$\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots$

所成的數集不是數環，因為兩個奇數的和不是一個奇數，而是一個偶數，這就是說，加法在該數集內不是可施行的。

例 4. 僅由一個數 0 所成的數集是一個環，因為

$$0 + 0 = 0, 0 - 0 = 0, 0 \cdot 0 = 0$$

特將此環叫做零環。

定理 1. 任何數環都包含着零環。（即任何數環都包含着數 0）。

因此把零環叫做最小數環。

證明。 設 a 是已知環內的任一數，那麼，由於減法的可實行性，可知差 $a - a = 0$ 屬於這個環，證完。

定理 2. 若數 a 屬於某一數環 P ，則 a 的一切整倍數

$\dots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \dots$

也都屬於 P 。

證明。 由於加法是可施行的，所以

$$a + a = 2a, 2a + a = 3a, 3a + a = 4a, \dots$$

都屬於 P 。

由定理 1 已知 $0 \in P$ ，再藉助於減法的可施行性，可知

$0 - a = -a$, $0 - 2a = -2a$, $0 - 3a = -3a$, ... 都屬於 P , 證完。

定理 3. 任何一個數體 F 都包含着有理數體 R .

因此把有理數體 R 叫做最小數體。

證明. 因為數體 F 是一個數環, 所以 $0 \in F$. 根據數體的定義 (即定義 2), 可知在體 F 內至少含有一數 $a \neq 0$. 由於除法是可施行的, 所以 $\frac{a}{a} = 1 \in F$, 即 F 含着單位 1.

既知 $1 \in F$, 由定理 2 可知一切整數

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

都屬於 F .

最後, 藉助於除法的可施行性, 可知一切分數 $\frac{m}{n} \in F$, 其中 m 和 n 都是任意整數, 並且 $n \neq 0$.

於是就證明了體 F 內含有一切有理數, 即 F 包含着數體 R .

例子. 證明由一切形如

$$a + b\sqrt{2}$$

之數所成的數集是一個數體, 其中 a 和 b 是任意有理數.

證明. 我們用記號 $R(\sqrt{2})$ 表示這個數集. 設 $a_1 + b_1\sqrt{2}$ 和 $a_2 + b_2\sqrt{2}$ 爲 $R(\sqrt{2})$ 中的任意二數, 顯然

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{2} \in R(\sqrt{2}),$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} \in R(\sqrt{2}).$$

當 $a_2 + b_2\sqrt{2} \neq 0$ 時, 則 $a_2 - b_2\sqrt{2}$ 也不能等於零, 因此

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}} &= \frac{(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2})}{(a_2 + b_2\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2})} = \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \\ &+ \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}\sqrt{2} \in R(\sqrt{2}), \end{aligned}$$

所以 $R(\sqrt{2})$, 是一個數體.

這個數體 $R(\sqrt{2})$ 顯然包含着有理數體 R ，因為當 $b=0$ 時

$$a+b\sqrt{2}=a$$

為任意有理數。

習題 1

1. 由一切真分數所成的數集是一個數環嗎？
2. 我們知道任何數體一定含着 1，試問任何數環是不是也一定含着 1？並找出兩個不含 1 的數環來。
3. 由一切形如 $a+b\sqrt{2}$ 的數所成的數集是一個數環或數體嗎？
4. 證明 $\sqrt{2}$ 不是有理數。

§ 2. 排列及對換

這一節在行列式之理論的研究上起着基本的作用。行列式之概念的產生，是由於解綫性方程組（即一次聯立方程），這在解析幾何中已經介紹過了。我們已經知道，含兩個未知量的綫性方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的解為

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}};$$

含三個未知量的綫性方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的解爲

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

這兩個方程組之解的公分母本來是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

二階行列式和三階行列式的概念就是這樣產生的。由這兩個行列式可以看出，它們的每一項都是同樣多的元素之積（二階行列式的每一項是兩個元素之積，三階行列式者是三個元素之積）。就三階行列式的各項來看，在每一項中，各元素的第一個下標是三個不同的數字：1，2，3，而且都是按1，2，3，的順序排列着的；第二個下標也是這三個數字，但是，在不同的項裏，這些下標的排列法是不同的。因此，我們必須先來考察有關排列的問題。

在初等代數裏我們都知道：由1，2，3，…n這n個數字共能構成n!個

不同的排列，其中只有排列 $1, 2, 3, \dots, n$ 是按自然順序排列的，因此特把這個排列叫做自然排列，其餘的 $n! - 1$ 個排列都不是按自然順序排列的。例如，當 $n = 3$ 時，由 $1, 2, 3$ 共形成 $3! = 6$ 個排列： $123, 132, 213, 231, 312, 321$ ，其中只有 123 是自然排列，其餘的 5 個都是非自然排列。在一個非自然排列中，一定有大數在小數前邊的情形發生。在一個非自然排列中，當某一個大數在另一個小數前邊時（這兩個數字不一定相隣），我們就說，由這兩個數字產生一個反序。例如，在排列 213 內只有一個大數（即 2）在一個小數（即 1）前邊，因此在排列 213 內只有一個反序，而在排列 231 內就有兩個反序：2 在 1 前邊和 3 在 1 前邊。

顯然在自然排列中沒有反序，即其反序個數為 0。

我們用下面的方法來計算一個排列中的反序個數：先計算在 1 前邊有多少數字，接着把 1 劃去；再計算在 2 前邊有多少數字（不計算已劃去的數字 1），接着把 2 劃去；然後再計算在 3 前邊有多少數字（不計算已劃去的數字 1 和 2），接着把 3 劃去；依此類推。這樣，在由 n 個數字所成的一個排列內，如果在 1 前邊有 m_1 個數字，在 2 前邊有 m_2 個， $\dots$ ，在 n 前邊有 m_n 個，則在這個排列內共有 $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 個反序。

例子。試求排列 451362 內的反序個數。

在 1 前邊有兩個數字（4 和 5），劃去 1：451362；

在 2 前邊有四個數字（4, 5, 3, 6），劃去 2：451362；

在 3 前邊有兩個數字（4 和 5），劃去 3：451362；

在 4 前邊沒有數字，劃去 4：451362；

顯然在 5 和 6 前邊也都沒有數字，劃去 5 和 6。所以在排列 451362 內共有 $2 + 4 + 2 + 0 + 0 + 0 = 8$ 個反序。

含有偶數個反序的排列，叫做偶排列；含有奇數個反序的排列，叫做奇排列。

例如， 451362 是一個偶排列，因為它的反序個數 8 是一個偶數；而 213 是

一個奇排列，因為它的反序個數 1 是一個奇數。因為任一個排列不是偶排列，便是奇排列（自然排列是偶排列，因為其反序個數 0 是一個偶數），所以由 n 個數字 1, 2, ..., n 所成的 $n!$ 個排列可分成奇偶兩類，隨後即將證明這兩類中的排列個數相等，都等於 $\frac{n!}{2}$ 。

現在我們再進一步來研究排列的一些性質，這些性質在行列式的理論上將起着基本的作用。

設

$$i_1 i_2 i_3 \cdots i_n$$

是由 n 個數字 1, 2, 3, ..., n 所成的任一個排列，如果把此排列中的任二數字的位置互相對調，例如，對調 i_1 和 i_3 ，顯然就得到另一個排列：

$$i_3 i_2 i_1 \cdots i_n.$$

排列的這種運算，叫做對換。上面這個對換，我們用記號 (i_1, i_3) 來表示。

連續利用幾個對換，能把某一個排列變成另一個同數字的排列。現在我們用一個實際的例子來說明，欲把排列

$$5 \ 7 \ 1 \ 4 \ 6 \ 2 \ 3 \tag{1}$$

變成

$$6 \ 2 \ 3 \ 1 \ 7 \ 4 \ 5, \tag{2}$$

需要用那幾個對換。

因為排列 (2) 的第一個數字是 6，而 (1) 的第 1 個數字是 5，爲了把 (1) 變成 (2)，必須在 (1) 上施行對換 (5, 6)，這樣一來，則 (1) 變成：

$$6 \ 7 \ 1 \ 4 \ 5 \ 2 \ 3. \tag{1'}$$

這一變化的過程可用下面的記號表示出來：

$$5 \ 7 \ 1 \ 4 \ 6 \ 2 \ 3 \xrightarrow{(5, 6)} 6 \ 7 \ 1 \ 4 \ 5 \ 2 \ 3.$$

顯然排列 (1') 與 (2) 還不相同，因此必須就 (1') 再來實行對換；比較 (1') 和 (2) 的第二個數字，可見若在 (1') 上施行對換 (7, 2)，就把 (1') 的第

二個數字變成 2:

$$6714523 \xrightarrow{(7, 2)} 6214573.$$

如此繼續作下去，結果一定能把 (1) 變成排列 (2)。這一變化的整個過程以及所用的幾個對換如下：

$$\begin{aligned} 5714623 &\xrightarrow{(5, 6)} 6714523 \xrightarrow{(7, 2)} 6214573 \xrightarrow{(1, 3)} \\ &\rightarrow 6234571 \xrightarrow{(4, 1)} 6231574 \xrightarrow{(5, 7)} 6231754 \xrightarrow{(5, 4)} \\ &\rightarrow 6231745. \end{aligned}$$

定理 1. 每一個排列經過一個對換就變更其奇偶性，換言之，一個奇排列經過一個對換就變成偶排列，一個偶排列經過一個對換就變成奇排列。

證明。 假設所施行的對換是 (i, j) 。

我們就兩種情形來證明。先證明一種特別的情形，就是被對換的兩個數字 i 和 j 在排列中相隣。我們用記號 $AijB$ 表示這個排列，其中 A 表示該排列中所有在 i 左邊的那些數字，而 B 表示所有在 j 右邊的那些數字。排列 $AijB$ 經過對換 (i, j) 變成 $AjiB$ 。顯然在排列 $AijB$ 和 $AjiB$ 內，由於 A 和 B 中的數字沒變動，因此由 A 、 B 以及 A 和 B 中的數字所產生的反序個數保持不變；同樣，由 i 與 A 中諸數字所產生的反序個數以及 i 與 B 中諸數字所產生的反序個數完全一樣，由 j 與 A 中諸數字以及 j 與 B 中諸數字所產生的反序個數也完全一樣。假若 ij 是自然順序，則 ji 有一個反序，故排列 $AijB$ 中的反序個數比排列 $AjiB$ 中的反序個數少一個。然若 ij 有一個反序，則 ji 就沒有反序，故排列 $AijB$ 中的反序個數比排列 $AjiB$ 中者多一個。由此可見，不管是那一種情形，由排列 $AijB$ 經過對換 (i, j) 所變成的排列 $AjiB$ ，它們的奇偶性不相同。

其次，我們再證明一般的情形，即被對換的兩個數字 i 和 j 在排列中不相隣。設 i 和 j 中間有 m 個數字，並設這個排列的形式為：

$$A i k_1 k_2 \cdots k_m j B, \quad (3)$$

其中A和B的意義同前，而 k_λ 本身代表一個數字。

排列(3)經過對換 (i, j) 顯然變成排列

$$A j k_1 k_2 \cdots k_m i B. \quad (4)$$

但是這個對換 (i, j) 的作用，與下面所指出的 $2m+1$ 個相隣數字的對換之作用相同：由(3)把 i 向右依次與相隣數字 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 一一對調，也就是使(3)依次經過 m 個對換 $(i, k_1), (i, k_2), \dots, (i, k_m)$ ，就把(3)變成：

$$A k_1 k_2 \cdots k_m i j B. \quad (5)$$

然後再由(5)把 j 向左依次與相隣數字 $i, k_m, \dots, k_2, k_1$ 一一對調，也就是使(5)依次經過 $m+1$ 個對換 $(i, j), (k_m, j), \dots, (k_2, j), (k_1, j)$ ，就把(5)變成(4)。這就表明，這 $m + (m+1) = 2m+1$ 個相隣數字的對換把(3)變成(4)。根據前邊已經證明的結果：即一個相隣數字的對換改變排列的奇偶性，可知排列(3)和排列(4)的奇偶性相反，證完。

系。由某一個排列變成另一個奇偶性相同的排列，必須經過偶數個對換。反之，由某一個排列變成另一個奇偶性不同的排列，必須經過奇數個對換。

定理 2. 可以把由 n 個數字所成的 $n!$ 個排列按下面的順序排出來：除最後一個排列外，任何一個排列只經過一個對換就變成下面一個相隣の排列，並且這種排法可以由任一排開始。

這個定理不加證明。我們僅就 $n=3$ 的例子加以說明。在由三個數字1, 2, 3所成的 $3!$ 即6個排列中，比方從排列312開始，排成定理2所說的順序如下：

$$\begin{aligned} 312 &\xrightarrow{(1, 2)} 321 \xrightarrow{(3, 2)} 231 \xrightarrow{(3, 1)} 213 \xrightarrow{(2, 1)} \\ &\xrightarrow{(2, 3)} 123 \xrightarrow{(2, 3)} 132. \end{aligned}$$

系. 由 n 個數字所成的 $n!$ 個排列中, 有 $\frac{n!}{2}$ 個奇排列, 也有 $\frac{n!}{2}$ 個偶排列 ($n \geq 2$).

證明. 先把這 $n!$ 個排列按定理 2 所說的方法排出來. 由定理 1 可知這些排列奇(偶)偶(奇)相間. 但是當 $n \geq 2$ 時, $n!$ 是一個偶數, 所以在 $n!$ 個排列中奇排列和偶排列的個數相等, 各等於 $n!$ 的一半, 即 $\frac{n!}{2}$, 證完.

習題 2

1. 求出使排列 3 5 2 4 1 變成排列 5 1 4 3 2 的那些對換.
2. 計算下列各排列中的反序個數:
 - (a) 2 1 7 9 8 6 3 5 4;
 - (b) $n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$;
 - (c) $2k, 1, 2k-1, 2, 2k-2, 3, \dots, k+1, k$.

§ 3. n 階行列式的定義及其基本性質

我們已經知道, 二階和三階行列式的概念是由解綫性方程組而導入的. 現在我們自然要問: 是否也用解綫性方程組的方法來導入 n 階行列式的概念呢? 這個問題的答案是否定的, 因為對於每一個 n 都這樣作是很麻煩的, 而且當 n 很大時, 這樣來作是不可能的. 因此, 我們不得不採取定義的方式來確定 n 階行列式的概念. 為了給 n 階行列式下定義, 我們先來考察二階和三階行列式.

由二階行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

可以看出, 二階行列式有兩項: $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$, 每一項都是兩個元素之積, 這兩個元素既不同行, 又不同列; 每一項中二元素的第一個下標都是按自然順序排列

的，而其第二個下標是由 1 和 2 這兩個數字所成的一切排列，即 12 和 21。並且第二個下標形成偶排列的項是正的，形成奇排列的項是負的。

由二階行列式所考察出來的這些結果，對於三階行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

來說也成立：三階行列式的每一項都是三個元素之積，在這三個元素中沒有任意兩個同行或同列，每一項中三元素的第一個下標都是按自然順序排列的，而其第二個下標是由 1, 2, 3 這三個數字所成的 3! 個排列：1 2 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1, 2 1 3, 1 3 2。並且第二個下標為偶排列的項是正的，為奇排列的項是負的。

由 n^2 個元素所排成的正方形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

叫做 n 階方陣。現在我們根據以上所考察出來的規律性來給 n 階行列式下定義。

定義。由方陣 (1) 的元素按照下列方式所形成的 $n!$ 個不同項的代數和就叫做 n 階行列式：每一項都是方陣 (1) 的 n 個元素之積，這 n 個元素沒有任意兩個同行，也沒有任意兩個同列。各項中諸元素的第一個下標都排成自然順序，第二個下標為偶排列的項取正號，否則取負號。

這個 n 階行列式，通常採用下面的記號來表示它：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

從這個行列式可以看出：第 i 行各元素的第一個下標都是 i ，第 j 列各元素的第二個下標都是 j ，這也就是說，每一元素的第一個下標表示它所在的行數，第二

個下標表示它所在的列數。設

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad (2)$$

是 n 階行列式的一項，由定義可知 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 是 n 個不同的數字， $j_1, j_2, \dots, j_n$ 也是 n 個不同的數字。如果排列 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 是自然排列，那麼這一項的符號可由排列 $j_1, j_2, \dots, j_n$ 的奇偶性來決定；但是如果 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 不是自然排列，能不能直接決定它的符號呢？下面的定理就是來解答這個問題的。

定理. n 階行列式的一項 (2) 的符號是 $(-1)^{\alpha+\beta}$ ，其中 α 是其諸第一下標所成的排列 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 的反序個數， β 是其諸第二下標所成的排列 $j_1, j_2, \dots, j_n$ 的反序個數。

證明. 我們先來證明：調動項 (2) 的各元素並不改變它的符號，也就是不改變 $\alpha + \beta$ 的奇偶性。

實際上，比方我們來對調元素 $a_{i_1 j_1}$ 和 $a_{i_2 j_2}$ ，這時項 (2) 變成

$$a_{i_2 j_2} a_{i_1 j_1} a_{i_3 j_3} \cdots a_{i_n j_n}, \quad (3)$$

其第一下標所成的排列為

$$i_2 i_1 i_3 \cdots i_n, \quad (4)$$

而其第二下標所成的排列為

$$j_2 j_1 j_3 \cdots j_n. \quad (5)$$

設 α' 和 β' 各為排列 (4) 和 (5) 中的反序個數；因為排列 (4) 是由排列 $i_1 i_2 i_3 \cdots i_n$ 經過一個對換 (i_1, i_2) 而變成的，所以 α' 和 α 的奇偶性相反；同理， β' 和 β 的奇偶性也相反。由此可見， $\alpha' - \alpha$ 和 $\beta' - \beta$ 是兩個奇數。因為

$$(\alpha' + \beta') - (\alpha + \beta) = (\alpha' - \alpha) + (\beta' - \beta)$$

恆為偶數，所以 $\alpha' + \beta'$ 和 $\alpha + \beta$ 必須同為偶數或同為奇數，即 $\alpha' + \beta'$ 和 $\alpha + \beta$ 的奇偶性相同。

現在我們這樣來調動項 (2) 的各元素，使其第一下標成為自然順序：

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n} \quad (6)$$