高等代數

（物二）

數學系 代數教研室編

東北師範大學

一九五五年十二月·長春

一册

高等代數（物二）

編　者：數學系代數教研室編

出版者：東北師範大學教務處教材科

印刷者：東北師範大學教材科印刷廠

一九五五年十二月·初版，400冊

55.0.29 0.Z

目　　錄

0.2

高等代數

一九五五——一九五六學年第一學期

物理系二年級用　代數教研室編

★

（I）線性代數初步

第一章　行列式論

§1. 數環和數體

我們知道，數是在不同的時期中由於勞動人民在生活勞動中的需要而產生的。最初由於計算物體的個數而產生了自然數：

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots;$$

後來又導入了0，用它表示沒有物體；然後又由於測量上的需要就導入了分數$\frac{m}{n}$，其中m是自然數或零，而n是自然數；後來又由於測量有方向的量的需要，就產生了負數；隨後又由於實際上的需要產生了實數和複數。

任何幾個數的總體叫做數集（或數集合）。

通常採用記號z來表示由一切正整數（即自然數）、零及一切負整數所組成的整數集：

$$\cdots, -n, \cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots n, \cdots;$$

用記號R表示由一切正和負整數、零及一切正和負分數所組成的有理數集；用記號D表示由一切有理數及無理數所組成的實數集；用記號K表示由一切實數及一切複

试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com

數所組成的複數集.

若a為某一集合M的元素，我們就用記號$a \varepsilon M$表示之，記號$a \varepsilon M$讀作『a屬於M』. 例如，$1 \varepsilon z$，$15 \varepsilon z$，$-\frac{3}{5} \varepsilon R$，$\sqrt{2} \varepsilon D$等等.

我們已經知道的加法、減法、乘法、除法這四種運算，都叫做算術運算.

若在一個數集內由於施行某一算術運算所得的數仍屬於該數集，就說這個運算在該數集內是可施行的.

例如，加法和乘法運算在自然數集1，2，3，…，n，…內是可施行的，因為若a和b為任二自然數，顯然$a+b$和ab仍為自然數，然而減法和除法運算在自然數集內不是可施行的，因為若$a<b$為二自然數，則$a-b$是一個負整數，而不是自然數；又若a不是b的倍數時，則$\frac{a}{b}$也不是自然數，而是一個分數. 減法在Z內是可施行的，但除法在Z內仍不是可施行的，而除法在R內就是可施行的了.

在高等代數裏，所研究的主要對象是多項式和方程. 為了明確多項式和方程之係數的討論範圍，我們先來介紹數環和數體這兩個概念.

定義1. 如果加法、減法和乘法在一個數集內都是可施行的，那麼這個數集就叫做數環.

定義2. 在一個至少包含着一個非零之數的數環內，如果除法（零除除外）也是可施行的，則此數環叫做數體.

例1. Z，R，D，K都是數環，因為加法、減法和乘法在這些數集內都是可實行的，但是Z不是數體，因為除法在Z內不是可施行的；而R，D，K都是數體，因為它們都是能施行除法的數環.

例2. 設a是一個整數，則由a的一切倍數

$$\cdots,\ -2a,\ -a,\ 0,\ a,\ 2a\cdots$$

所成的數集是一個環，因為a的任意兩個倍數 la及ma的和、差、積仍為a的倍數：

$$la \pm ma = (l \pm m)a,\ la \cdot ma = (lma)a.$$

特別的，偶數集

$$\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots$$

是一個數環。此外，數集

$$\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots$$

和

$$\cdots, -14, -7, 0, 7, 14, \cdots$$

都是數環，而這些數環顯然都是整數環 z 的一部分，因此把它們叫做Z的子環.

例3．由一切奇數

$$\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots$$

所成的數集不是數環，因爲兩個奇數的和不是一個奇數，而是一個偶數，這就是說，加法在該數集內不是可施行的.

例4．僅由一個數0所成的數集是一個環，因爲

$$0+0=0，0-0=0， \quad 0.0=0$$

特將此環叫做零環.

定理1．任何數環都包含着零環.（即任何數環都包含着數0）.

因此把零環叫做最小數環.

證明．設a是已知環內的任一數，那麼，由於減法的可實行性，可知差$a-a=0$屬於這個環，證完.

定理2．若數a屬於某一數環P，則a的一切整倍數

$$\cdots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \cdots$$

也都屬於P.

證明．由於加法是可施行的，所以

$$a+a=2a，2a+a=3a，3a+a=4a，\cdots$$

都屬於P.

由定理1已知$0 \varepsilon P$，再藉助於減法的可施行性，可知

$0-a=-a$，$0-2a=-2a$，$0-3a=-3a$，…都屬於P，證完．

定理3．任何一個數體F都包含着有理數體R．

因此把有理數體R叫做最小數體．

證明．因為數體F是一個數環，所以$0\varepsilon F$．根據數體的定義（即定義2），可知在體F內至少含有一數$a\neq 0$．由於除法是可施行的，所以$\frac{a}{a}=1\varepsilon F$，即F含着單位1．

既知$1\varepsilon F$，由定理2可知一切整數

$$\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$$

都屬於F．

最後，藉助於除法的可施行性，可知一切分數$\frac{m}{n}\varepsilon F$，其中m和n都是任意整數，並且$n\neq 0$．

於是就證明了體F內含有一切有理數，即F包含着數體R．

例子．證明由一切形如

$$a+b\sqrt{2}$$

之數所成的數集是一個數體，其中a和b是任意有理數．

證明．我們用記號$R(\sqrt{2})$表示這個數集．設$a_1+b_1\sqrt{2}$和$a_2+b_2\sqrt{2}$為$R(\sqrt{2})$中的任意二數，顯然

$$(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}\ \varepsilon\ R(\sqrt{2}),$$

$$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\ \varepsilon\ R(\sqrt{2}).$$

當$a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$時，則$a_2-b_2\sqrt{2}$也不能等於零，因此

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+$$

$$+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}\ \varepsilon\ R(\sqrt{2}),$$

所以$R(\sqrt{2})$，是一個數體．

這個數體R（$\sqrt{2}$）顯然包含着有理數體R，因爲當$b=0$時

$$a+b\sqrt{2}=a$$

爲任意有理數.

習　題　1

1．由一切眞分數所成的數集是一個數環嗎？

2．我們知道任何數體一定含着1，試問任何數環是不是也一定含着1？並找出兩個不含1的數環來.

3．由一切形如$a+b\sqrt{2}$的數所成的數集是一個數環或數體嗎？

4．證明$\sqrt{2}$不是有理數.

§2. 排 列 及 對 換

這一節在行列式之理論的研究上起着基本的作用．行列式之概念的產生，是由於解綫性方程組（卽一次聯立方程），這在解析幾何中已經介紹過了。我們已經知道，含兩個未知量的綫性方程組

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2 \end{aligned}\right\}$$

的解爲

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}};$$

含三個未知量的綫性方程組

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3 \end{aligned}\right\}$$

的解爲

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b^2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_1 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a^2{}_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

這兩個方程組之解的公分母本來是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\\ -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

二階行列式和三階行列式的概念就是這樣產生的．由這兩個行列式可以看出，它們的每一項都是同樣多的元素之積（二階行列式的每一項是兩個元素之積，三階行列式者是三個元素之積）。就三階行列式的各項來看，在每一項中，各元素的第一個下標是三個不同的數字：１，２，３，而且都是按１，２，３，的順序排列着的；第二個下標也是這三個數字，但是，在不同的項裏，這些下標的排列法是不同的．因此，我們必須先來考察有關排列的問題．

在初等代數裏我們都知道：由１，２，３，…n這n個數字共能構成n！個

不同的排列，其中只有排列1，2，3，…n是按自然順序排列的，因此特把這個排列叫做自然排列，其餘的n！－1個排列都不是按自然順序排列的．例如，當n＝3時，由1，2，3共形成3！＝6個排列：123，132，213，231，312，321，其中只有123是自然排列，其餘的5個都是非自然排列．在一個非自然排列中，一定有大數在小數前邊的情形發生．在一個非自然排列中，當某一個大數在另一個小數前邊時（這兩個數字不一定相鄰），我們就說，由這兩個數字產生一個反序．例如，在排列213內只有一個大數（即2）在一個小數（即1）前邊，因此在排列213內只有一個反序，而在排列231內就有兩個反序：2在1前邊和3在1前邊．

顯然在自然排列中沒有反序，即其反序個數為0．

我們用下面的方法來計算一個排列中的反序個數：先計算在1前邊有多少數字，接着把1劃去；再計算在2前邊有多少數字（不計算已劃去的數字1），接着把2劃去；然後再計算在3前邊有多少數字（不計算已劃去的數字1和2），接着把3劃去；依此類推．這樣，在由n個數字所成的一個排列內，如果在1前邊有m_1個數字，在2前邊有m_2個，…，在n前邊有m_n個，則在這個排列內共有$m_1+m_2+\cdots+m_n$個反序．

例子．試求排列451362內的反序個數．

在1前邊有兩個數字（4和5），劃去1：45~~1~~362；

在2前邊有四個數字（4，5，3，6），劃去2：45~~1~~36~~2~~；

在3前邊有兩個數字（4和5），劃去3：45~~1~~~~3~~6~~2~~；

在4前邊沒有數字，劃去4：~~4~~5~~1~~~~3~~6~~2~~；

顯然在5和6前邊也都沒有數字，劃去5和6．所以在排列451362內共有2＋4＋2＋0＋0＋0＝8個反序．

含有偶數個反序的排列，叫做偶排列；含有奇數個反序的排列，叫做奇排列．例如，451362是一個偶排列，因為它的反序個數8是一個偶數；而213是

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

一個奇排列，因爲它的反序個數1是一個奇數．因爲任一個排列不是偶排列，便是奇排列（自然排列是偶排列，因爲其反序個數0是一個偶數），所以由n個數字1，2，…，n所成的n！個排列可分成奇偶兩類，隨後卽將證明這兩類中的排列個數相等，都等於$\frac{n!}{2}$．

現在我們再進一步來研究排列的一些性質，這些性質在行列式的理論上將起着基本的作用．

設

$$i_1 i_2 i_3 \cdots i_n$$

是由n個數字1，2，3，…，n所成的任一個排列，如果把此排列中的任二數字的位置互相對調，例如，對調i_1和i_3，顯然就得到另一個排列：

$$i_3 i_2 i_1 \cdots i_n.$$

排列的這種運算，叫做<u>對換</u>．上面這個對換，我們用記號（i_1，i_3）來表示．

連續利用幾個對換，能把某一個排列變成另一個同數字的排列．現在我們用一個實際的例子來說明，欲把排列

$$5\ 7\ 1\ 4\ 6\ 2\ 3 \tag{1}$$

變成

$$6\ 2\ 3\ 1\ 7\ 4\ 5, \tag{2}$$

需要用那幾個對換．

因爲排列（2）的第一個數字是6，而（1）的第1個數字是5，爲了把（1）變成（2），必須在（1）上施行對換（5，6），這樣一來，則（1）變成：

$$6\ 7\ 1\ 4\ 5\ 2\ 3. \tag{1}$$

這一變化的過程可用下面的記號表示出來：

$$5\ 7\ 1\ 4\ 6\ 2\ 3 \xrightarrow{(5,\ 6)} 6\ 7\ 1\ 4\ 5\ 2\ 3.$$

顯然排列（1′）與（2）還不相同，因此必須就（1′）再來實行對換；比較（1′）和（2）的第二個數字，可見若在（1′）上施行對換（7，2），就把（1′）的第

二個數字變成2：

$$6714523 \xrightarrow{(7,\ 2)} 6214573.$$

如此繼續作下去，結果一定能把（1）變成排列（2）．這一變化的整個過程以及所用的幾個對換如下：

$$5714623 \xrightarrow{(5,\ 6)} 6714523 \xrightarrow{(7,\ 2)} 6214573 \xrightarrow{(1,\ 3)}$$

$$\rightarrow 6234571 \xrightarrow{(4,\ 1)} 6231574 \xrightarrow{(5,\ 7)} 6231754 \xrightarrow{(5,\ 4)}$$

$$\rightarrow 6231745.$$

定理1．每一個排列經過一個對換就變更其奇偶性，換言之，一個奇排列經過一個對換就變成偶排列，一個偶排列經過一個對換就變成奇排列．

證明．假設所施行的對換是（i，j）

我們就兩種情形來證明．先證明一種特別的情形，就是被對換的兩個數字 i 和 j 在排列中相隣．我們用記號A i j B表示這個排列，其中A表示該排列中所有在 i 左邊的那些數字，而B表示所有在 j 右邊的那些數字．排列A i j B經過對換（i，j）變成A j i B．顯然在排列A i j B和A j i B內，由於A和B中的數字沒變動，因此由A，B以及A和B中的數字所產生的反序個數保持不變；同樣，由 i 與A中諸數字所產生的反序個數以及 i 與B中諸數字所產生的反序個數完全一樣，由 j 與A中諸數字以及 j 與B中諸數字所產生的反序個數也完全一樣．假若 i j 是自然順序，則 j i 有一個反序，故排列A i j B中的反序個數比排列A j i B中的反序個數少一個．然若 i j 有一個反序，則 j i 就沒有反序，故排列A i j B中的反序個數比排列A j i B中者多一個．由此可見，不管是那一種情形，由排列A i j B經過對換（i，j）所變成的排列A j i B，它們的奇偶性不相同．

其次，我們再證明一般的情形，即被對換的兩個數字 i 和 j 在排列中不相隣．設 i 和 j 中間有m個數字，並設這個排列的形式為：

$$A\ i\ k_1k_2\cdots k_m\ j\ B, \tag{3}$$

其中A和B的意義同前，而k_λ本身代表一個數字.

排列（3）經過對換（i，j）顯然變成排列

$$A\ j\ k_1k_2\cdots k_m\ i\ B. \tag{4}$$

但是這個對換（i，j）的作用，與下面所指出的 2m＋1個相隣數字的對換之作用相同：由（3）把 i 向右依次與相隣數字 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 一一對調，也就是使（3）依次經過m個對換（i, k_1），（i, k_2），…，（i, k_m），就把（3）變成：

$$Ak_1k_2\cdots k_m\ i\ j\ B. \tag{5}$$

然後再由（5）把 j 向左依次與相隣數字 $i, k_m, \cdots k_2, k_1$ 一一對調，也就是使（5）依次經過m＋1個對換（i，j），（k_m，j）…，（k_2，j），（k_1，j），就把（5）變成（4）．這就表明，這m＋（m＋1）＝2m＋1 個相隣數字的對換把（3）變成（4）．根據前邊已經證明的結果：即一個相隣數字的對換改變排列的奇偶性，可知排列（3）和排列（4）的奇偶性相反，證完.

系．由某一個排列變成另一個奇偶性相同的排列，必須經過偶數個對換．反之，由某一個排列變成另一個奇偶性不同的排列，必須經過奇數個對換．

定理2．可以把由n個數字所成的n！個排列按下面的順序排出來：除最後一個排列外，任何一個排列只經過一個對換就變成下面一個相隣的排列，並且這種排法可以由任一排列開始.

這個定理不加證明．我們僅就n＝3的例子加以說明．在由三個數字1，2，3所成的3！即6個排列中，比方從排列312開始，排成定理2所說的順序如下：

$$312 \xrightarrow{(1,\,2)} 321 \xrightarrow{(3,\,2)} 231 \xrightarrow{(3,\,1)} 213 \xrightarrow{(2,\,1)}$$
$$\rightarrow 123 \xrightarrow{(2,\,3)} 132.$$

系．由n個數字所成的n！個排列中，有$\frac{n!}{2}$個奇排列，也有$\frac{n!}{2}$個偶排列（$n\geq 2$）．

證明．先把這n！個排列按定理2所說的方法排出來．由定理1可知這些排列奇（偶）偶（奇）相間．但是當$n\geq 2$時，n！是一個偶數，所以在n！個排列中奇排列和偶排列的個數相等，各等於n！的一半，即$\frac{n!}{2}$，證完．

習 題 2

1．求出使排列3 5 2 4 1變成排列5 1 4 3 2的那些對換．

2．計算下列各排列中的反序個數：

（a）2 1 7 9 8 6 3 5 4；

（b）n, n-1, n-2，…，3，2，1；

（c）2k，1，2k-1，2，2k-2，3，…k+1，k.

§3. n階行列式的定義及其基本性質

我們已經知道，二階和三階行列式的概念是由解綫性方程組而導入的．現在我們自然要問：是否也用解綫性方程組的方法來導入n階行列式的概念呢？這個問題的答案是否定的，因爲對於每一個n都這樣作是很麻煩的，而且當n很大時，這樣來作是不可能的．因此，我們不得不採取定義的方式來確定n階行列式的概念．爲了給n階行列式下定義，我們先來考察二階和三階行列式．

由二階行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

可以看出，二階行列式有兩項：$a_{11}a_{22}$，$a_{12}a_{21}$，每一項都是兩個元素之積，這兩個元素旣不同行，又不同列；每一項中二元素的第一個下標都是按自然順序排列

的，而其第二個下標是由1和2這兩個數字所成的一切排列，即12和21．並且第二個下標形成偶排列的項是正的，形成奇排列的項是負的．

由二階行列式所考察出來的這些結果，對於三階行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{32}a_{31} -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

來說也成立：三階行列式的每一項都是三個元素之積，在這三個元素中沒有任意兩個同行或同列，每一項中三元素的第一個下標都是按自然順序排列的，而其第二個下標是由1，2，3這三個數字所成的3！個排列：123，231，312，321，213，132．並且第二個下標為偶排列的項是正的，為奇排列的項是負的．

由n^2個元素所排成的正方形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

叫做n階方陣．現在我們根據以上所考察出來的規律性來給n階行列式下定義．

定義．由方陣（1）的元素按照下列方式所形成的n！個不同項的代數和就叫做n階行列式：每一項都是方陣（1）的n個元素之積，這n個元素沒有任意兩個同行，也沒有任意兩個同列．各項中諸元素的第一個下標都排成自然順序，第二個下標為偶排列的項取正號，否則取負號．

這個n階行列式，通常採用下面的記號來表示它：

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

從這個行列式可以看出：第i行各元素的第一個下標都是i，第j列各元素的第二個下標都是j，這也就是說，每一元素的第一個下標表示它所在的行數，第二

個下標表示它所在的列數．設

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \tag{2}$$

是n階行列式的一項，由定義可知 i_1，i_2，……，i_n是n個不同的數字，j_1，j_2，…j_n也是n個不同的數字．如果排列 $i_1, i_2\cdots i_n$ 是自然排列，那麼這一項的符號可由排列 $j_1, j_2\cdots j_n$ 的奇偶性來決定；但是如果$i_1, i_2\cdots i_n$不是自然排列，能不能直接決定它的符號呢？下面的定理就是來解答這個問題的．

定理．n階行列式的一項（2）的符號是 $(-1)^{\alpha+\beta}$，其中α是其諸第一下標所成的排列$i_1, i_2\cdots\cdots i_n$的反序個數，β是其諸第二下標所成的排列$j_1, j_2\cdots\cdots j_n$ 的反序個數．

證明．我們先來證明：調動項（2）的各元素並不改變它的符號，也就是不改變$\alpha+\beta$的奇偶性．

實際上，比方我們來對調元素$a_{i_1j_1}$和$a_{i_2j_2}$，這時項（2）變成

$$a_{i_2j_2}\,a_{i_1j_1}\,a_{i_3j_3}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{3}$$

其第一下標所成的排列爲

$$i_2 i_1 i_3\cdots i_n, \tag{4}$$

而其第二下標所成的排列爲

$$j_2 j_1 j_3\cdots j_n. \tag{5}$$

設α'和β'各爲排列（4）和（5）中的反序個數；因爲排列（4）是由排列 $i_1i_2i_3\cdots i_n$經過一個對換（i_1，i_2）而變成的，所以α'和α的奇偶性相反；同理，β'和β的奇偶性也相反．由此可見，$\alpha'-\alpha$和$\beta'-\beta$是兩個奇數．因爲

$$(\alpha'+\beta')-(\alpha+\beta)=(\alpha'-\alpha)+(\beta'-\beta)$$

恆爲偶數，所以$\alpha'+\beta'$和$\alpha+\beta$必須同爲偶數或同爲奇數，即$\alpha'+\beta'$和$\alpha+\beta$的奇偶性相同．

現在我們這樣來調動項（2）的各元素，使其第一下標成爲自然順序：

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n} \tag{6}$$

试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com