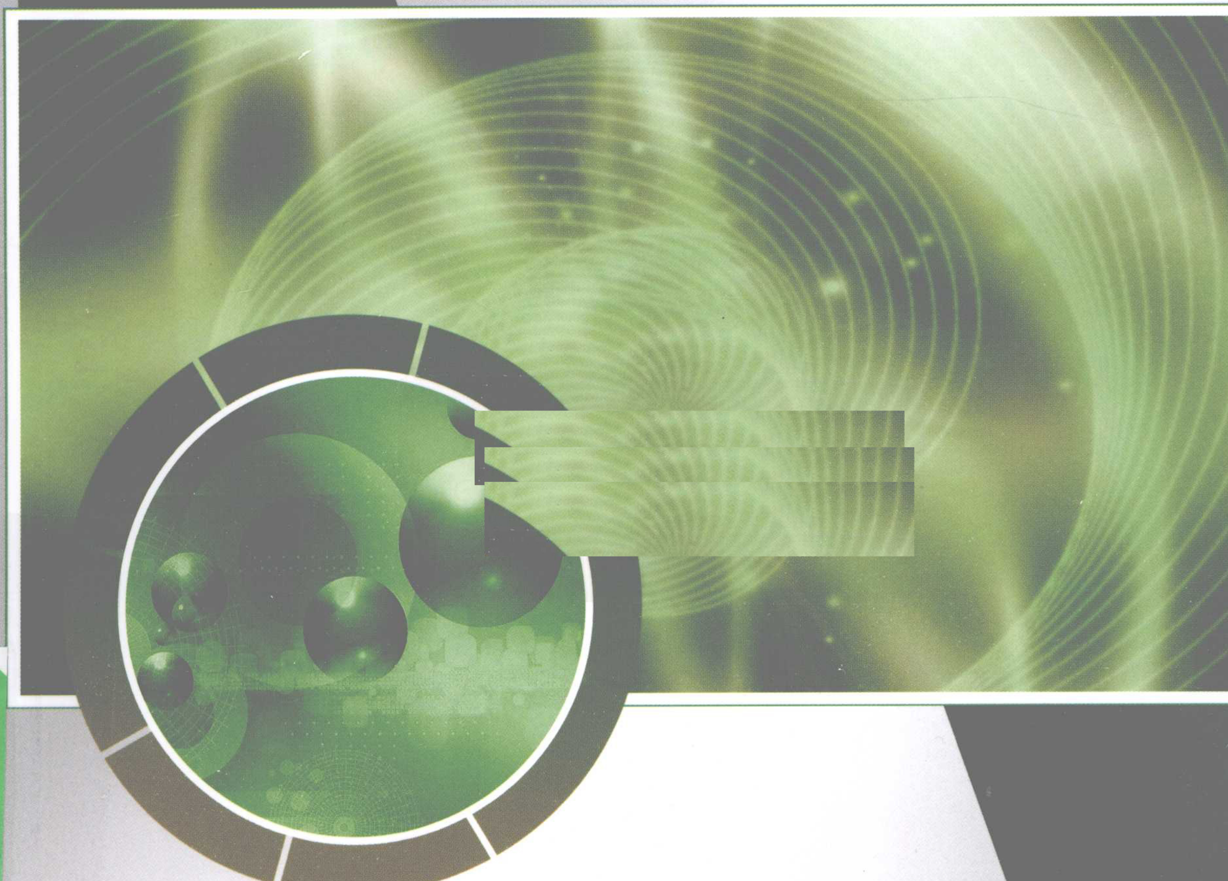
中国科学院“十一五”规划教材

经·济·管·理·类·数·学·基·础·系·列

概率论与数理统计

主编　李伯德　张再玲



科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院“十一五”规划教材·经济管理类数学基础系列

概率论与数理统计

主　编　李伯德　张再玲

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是中国科学院“十一五”规划教材.全书包括九章内容:随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、多维随机变量及其分布、大数定律与中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验及回归分析.

本书体系完整,逻辑清晰,深入浅出,便于自学,既可作为高等学校经济类、管理类专业和其他相关专业概率论与数理统计课程的教材或教学参考书,也可供报考研究生者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/李伯德,张再玲主编.—北京:科学出版社,2010.8
(中国科学院“十一五”规划教材·经济管理类数学基础系列)
ISBN 978-7-03-028530-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①李…②张… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 154485 号

责任编辑:李鹏奇 滕亚帆 唐保军 / 责任校对:朱光兰
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2010 年 8 月第一次印刷 印张:15 1/4
印数:1—9 000 字数:300 000

定价:24.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

总　序

“中国科学院‘十一五’规划教材·经济管理类数学基础系列”是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”，由多年从事数学教学实践的教师编写而成，包括《微积分》、《线性代数》及《概率论与数理统计》.

为了保证本系列教材的教学适用性，在编写过程中，我们对近年来国内外出版的同类教材的特点进行了比较和分析，在教材体系、内容安排、写作特点和例题配置等方面汲取了它们的优点. 本系列教材的特点如下：

(1) 在教材内容安排上进行了适当的取舍，避免了偏多、偏深的弊端.

(2) 考虑目前教学学时普遍较少的实际，力求在体系、内容上既符合数学学科本身的特点，又兼顾报考研究生学生的需要.

(3) 内容简明扼要，深入浅出，语言准确，易于阅读.

(4) 从体系、内容和方法上进行了改革，有所创新，恰到好处地反映一些现代数学的思想.

(5) 教材内容在现行“经济管理类数学基础课程教学基本要求”的基础上略有拓宽和加深，以满足近年来高校部分新增专业对数学基础的更高要求，强化了理论与实际的结合.

(6) 习题配置合理，难易适度，适当融入了一些研究生入学考试内容，选用了近年全国硕士研究生入学统一考试中的部分优秀试题，如 1998 年考研真题用(1998)表示，2009 年考研真题用(2009)表示. 每章后的习题均分为(A)、(B)两组，其中(A)组习题反映了本科经济管理类专业数学基础课的基本要求，(B)组习题综合性较强，可供学有余力或有志报考硕士研究生的学生练习.

各章中标有“*”号的内容是为对数学基础要求较高的院校或专业编写的，可以作为选学内容或供读者自学用.

本系列教材在编写过程中得到了科学出版社高等教育出版中心领导的大力支持，科学出版社高等教育出版中心李鹏奇副编审、院校代表马玉龙及其他工作人员在出版过程中做了大量的工作，编委会在此对他们表示由衷的感谢！

虽然我们希望编写一套质量较高、适合当前教学实际需要的教材，但限于水平，教材中仍可能有未尽人意之处，敬请读者不吝指正.

丛书编委会

2010 年 3 月

前　言

本书是“中国科学院‘十一五’规划教材·经济管理类数学基础系列”教材之一，是全国高等学校教学研究中心“科学思维、科学方法在高校数学课程教学创新中的应用与实践”的研究成果. 本书由多年从事数学教学实践的教师，根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”和最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学(三)》考试大纲的要求，按照继承与改革的精神编写而成.

“概率论与数理统计”是一门研究随机现象统计规律性的数学课程，在工程技术、军事、经济、管理乃至社会科学诸多领域有着广泛的应用，是经济管理类专业学生必修的基础课程.

同时，它还是一门基础理论和应用方法并重的课程. 对基础理论部分，本书从实例出发，逐步归纳分析，最终给出一般性的概念和结论，并注重其实际意义的解释说明，力求通俗易懂，如概率的公理化定义、中心极限定理等. 这样由浅入深学习，可以培养学生的抽象思维能力. 在实际应用方面，本书对应用型例题进行了精心编排，力求具有针对性、实用性，注重对学生解决问题能力的训练，有利于激发学生的学习兴趣，提高学习效率.

书中的大多数例题和习题都体现了经济管理的特色，学生可以更多地接触用数学方法解决经济管理问题的实例，以提高分析问题、解决问题的能力.

本书由李伯德教授、张再玲副教授主编. 第 1 章由张再玲编写，第 2、3 章由智婕编写，第 4、5 章由李伯德编写，第 6、7 章由刘转玲编写，第 8、9 章由王媛媛编写，全书由主编统稿定稿.

由于编者水平有限，书中疏漏及不妥之处在所难免，恳请读者及专家学者批评指正.

编　者

2010 年 3 月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门应用性学科. 它的理论与方法广泛应用于工业、国防、经济与工程技术等领域. 本章主要内容有：随机事件、随机事件的概率、古典概型和几何概型、条件概率与概率的三个基本公式(乘法公式、全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式)及事件的独立性与独立重复试验等.

1.1 随 机 事 件

一、随机现象

在自然界和人类社会生活中出现的现象，大致可分为两类：一类是在一定条件下必然出现的现象，称为**确定性现象**. 例如：向上抛一石子必然下落，同性电荷必然排斥，“旭日东升”，“夕阳西下”等. 而另一类则是在一定条件下无法事先准确预知其结果的现象，称为**随机现象**.

例如：

(1) 抛掷一枚硬币，有可能正面朝上，也有可能反面朝上；

(2) 掷一颗骰子，出现的点数；

(3) 将来某日某种股票的价格；

(4) 某型号电池的寿命；

(5) 未来某天进入某超市的顾客数.

随机现象到处可见. 由于随机现象的结果事先不能预知，初看起来似乎毫无规律. 然而，人们发现同一随机现象在大量重复出现时，其每种可能的结果的频率却具有稳定性，从而表明随机现象也有其固有的量的规律性，人们把随机现象在大量重复出现时所表现出来的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**. 例如，一名优秀的射手，一两次射击不足以反映其真正水平，只有多次重复射击才能反映其真正水平. 再例如，抛掷一枚硬币，尽管掷一次时，有可能正面朝上，也有可能反面朝上，但是重复掷多次时，将会发现正面与反面朝上的次数大致相等，各占总次数的 1/2.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门学科.

二、随机试验与样本空间

1. 随机试验

为了对随机现象的统计规律性进行研究，就需要对随机现象进行大量的重复

观察，对随机现象的观察称为**随机试验**，简称**试验**，记为 E.

例 1　抛掷一枚硬币，观察朝上的是哪个面.

例 2　同时抛掷两枚硬币，观察两枚分别朝上的是哪个面.

例 3　掷一颗骰子，观察出现的点数.

例 4　观察某高速公路上一段时间内发生的交通事故数.

例 5　考察某地 12 月份的最低气温(设范围为 $t_1 \sim t_2$).

例 6　从一批灯泡中任取一只，测定灯泡的寿命.

以上都是随机试验的例子. 一般地，随机试验具有如下三个特点：

(1) **可重复性**. 试验在相同的条件下可重复进行；

(2) **随机性**. 每次试验的结果是不确定的，事先无法准确预知；

(3) **可观察性**. 试验结果是可观察的，所有可能的结果是明确的.

2. 样本空间

随机试验 E 的每一个可能的结果称为一个**样本点**，记为 ω. 由全体样本点组成的集合称为**样本空间**，记为 Ω，即 $\Omega=\{\omega\}$.

例 1 的样本空间 $\Omega_1=\{$正，反$\}$.

例 2 的样本空间 $\Omega_2=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$.

例 3 的样本空间 $\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$.

例 4 的样本空间 $\Omega_4=\{0,1,2,\cdots\}$.

例 5 的样本空间 $\Omega_5=\{t \mid t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$.

例 6 的样本空间 $\Omega_6=\{t \mid 0 \leqslant t < +\infty\}$.

注　样本空间的元素可以是数也可以不是数；样本空间中至少有两个样本点；从样本空间所含元素的个数来区分，样本空间可分为有限与无限两类.

三、随机事件

在概率论中，把具有某一可观察特征的随机试验的结果称为事件. 事件可分为以下三类.

1. 随机事件

在试验中可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**，随机事件通常用字母 A,B,C 等表示.

在例 3 中，用 A 表示“点数是 3”，用 B 表示“点数小于 4”，用 C 表示“点数小于 5 的偶数”.

2. 必然事件

在每次试验中必然发生的事件称为**必然事件**，用字母 Ω 表示.

在例 3 中,“点数小于 7”是一个必然事件.

3. 不可能事件

在任何一次试验中都不可能发生的事件称为不可能事件,用字母$\varnothing$表示.

在例 3 中,“点数是 10”是一个不可能事件.

虽然必然事件与不可能事件是完全对立的,但它们的共同特点是在试验之前能够准确预知其是否发生,因而均不是随机事件,通常称为**确定性事件**. 概率论研究的是随机事件,但为方便起见,常常将必然事件与不可能事件视为特殊的随机事件,即随机事件的极端情形.

四、随机事件的集合表示

前面用直观语言描述了随机事件,事实上随机事件还可以用集合的形式来表示.

在实际中,进行随机试验时,人们常常关心满足某种条件的那些样本点组成的集合. 若规定某种灯泡的寿命(单位:h)小于 500 为次品,则在例 6 中人们关心灯泡的寿命是否有 $t\geqslant 500$,满足这一条件的样本点组成 Ω_6 的一个子集 $A=\{t\mid t\geqslant 500\}$,$A$ 显然是一个随机事件.

一般地,在一个随机试验中,称样本空间 Ω 的子集为**随机事件**,简称**事件**. 在每次试验中,当且仅当这一子集中的某一样本点出现时,称这一**事件发生**.

例 2 的样本空间 $\Omega_2=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$.

事件 A 为“两枚都出现正面”,$A=\{$(正,正)$\}$;

事件 B 为“恰有一枚出现正面”,$B=\{$(正,反),(反,正)$\}$;

事件 C 为“至少有一枚出现正面”,$C=\{$(正,正),(正,反),(反,正)$\}$.

恰由一个样本点组成的事件称为**基本事件**,由两个或两个以上的样本点组成的事件称为**复杂事件**. 以上事件 A 为基本事件,事件 B,C 为复杂事件.

五、事件的关系与运算

在一个随机试验中,一般有很多个事件,为了通过对简单事件的研究来掌握复杂事件,需要研究事件之间的关系与运算. 因为事件是样本空间的一个子集,所以事件之间的关系与运算可按集合之间的关系与运算来处理.

1. 包含关系

如果属于 A 的样本点必属于 B,则称**事件 A 包含于事件 B**,或称**事件 B 包含事件 A**,记为 $A\subset B$. 其含义是:事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

例 3 中,事件 A“点数是 3”的发生必然导致事件 B“点数小于 4”的发生,故 $A\subset B$.

2. 相等关系

如果属于 A 的样本点必属于 B，同时属于 B 的样本点必属于 A，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称**事件 A 与事件 B 相等**，记为 $A=B$. 显然相等的两个事件总是同时发生或同时不发生.

3. 和(并)

由事件 A 与 B 中所有的样本点(相同的只计入一次)组成的新事件称为**事件 A 与事件 B 的和(并)**，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$. 其含义是：事件 A 与事件 B 中至少有一个发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和事件.

4. 积(交)

由事件 A 与 B 中公共的样本点组成的新事件称为**事件 A 与事件 B 的积(交)**，记为 $A\cap B$ 或 AB. 其含义是：事件 A 与事件 B 同时发生.

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积事件.

5. 差

由事件 A 中而不在事件 B 中的样本点组成的新事件称为**事件 A 与事件 B 的差**，记为 $A-B$. 其含义是：事件 A 发生而事件 B 不发生.

例 3 中，事件 A 为“点数是 3”，事件 B 为“点数小于 4”，则 $B-A=\{1,2\}$.

6. 互不相容事件

如果 A 与 B 没有共同的样本点，则称**事件 A 与事件 B 互不相容**，或称为**互斥的**，记为 $AB=\varnothing$. 其含义是：事件 A 与事件 B 不可能同时发生.

基本事件是两两互不相容的.

7. 对立事件

由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的新事件称为**事件 A 的对立事件**，或称为 **A 的逆事件**，记为 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=\Omega-A$. 其含义是：事件 A 不发生. 显然 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件. 两个相互对立的事件 A 与 $\overline{A}$，在每次试验中有且仅有一个发生.

注　两个相互对立的事件一定是互不相容事件，但是两个互不相容的事件一

般未必是对立事件.

例 1 中"正"与"反"两个事件是互不相容事件,也是对立事件.

例 3 中"点数是 3"与"点数大于 3"两个事件是互不相容事件,但不是对立事件.

图 1-1 是事件的关系与运算的维恩图,以助于直观上的理解.

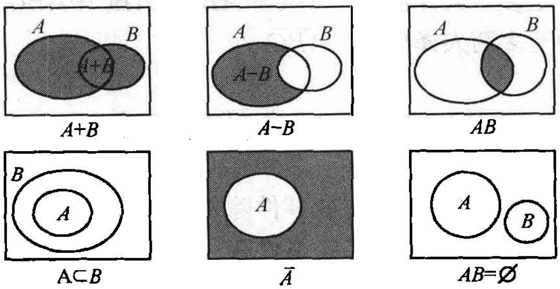


图 1-1 维恩图

六、事件的运算性质

由集合的运算性质,容易得出事件的运算性质. 设 A,B,C 是同一随机试验中的事件,则有

(1) **交换律** $A\cup B=B\cup A, AB=BA$;

(2) **结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$;

(3) **分配律** $(A\cup B)C=AC\cup BC, (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) **对偶律** $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

注 上述各运算律可推广到有限个或可数个事件的情形.

例 7 在例 3 中,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 设事件 A 为"奇数点",事件 B 为"被 3 整除的点",事件 C 为"点数小于 2",事件 D 为"偶数点",事件 F 为"点数不超过 5",写出各事件间的关系.

解 $A=\{1,3,5\}, B=\{3,6\}, C=\{1\}, D=\{2,4,6\}, F=\{1,2,3,4,5\}$; $A\supset C$, $F\supset C$, B 与 C, D 与 C, A 与 D 都是不相容事件,其中 A 与 D 为对立事件.

例 8 甲、乙、丙三人同时各译一份密码,记事件 A 为"甲译出",事件 B 为"乙译出",事件 C 为"丙译出",则可用上述三个事件的运算表示下列事件.

(1) "甲未译出": $\bar{A}$.

(2) "甲译出而乙未译出": $A\bar{B}$.

(3) "三人中只有乙未译出": $A\bar{B}C$.

(4) "三人中恰好有一人译出": $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$.

(5)“三人中至少有一人译出”：　$A+B+C$.

(6)“三人中至少有一人未译出”：　$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

(7)“三人中恰有两人译出”：　$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$.

(8)“三人中至少有两人译出”：　$AB+AC+BC$.

(9)“三人均未译出”：　$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(10)“三人中至多一人译出”：　$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$.

(11)“三人中至多两人译出”：　$\overline{ABC}$.

1.2　随机事件的概率

每个随机事件(必然事件与不可能事件除外)在一次试验中都有可能发生,也有可能不发生. 人们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如,在开办学生平安保险业务中,保险公司按一定标准,将一个学生的平安情况分为平安、轻度意外伤害、严重意外伤害以及意外事故死亡等多种结果. 由于这些结果都是随机事件,因此重要的是知道各个事件发生的可能性的大小. 于是希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此,首先引入频率,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

一、用频率估计概率

定义 1.1　若在相同的条件下进行了 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 $\mu_n(A)$ 称为事件 A 发生的**频数**,比值 $\frac{\mu_n(A)}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**,记为

$$f_n(A)=\frac{\mu_n(A)}{n}. \tag{1.1}$$

由定义可直接得出频率的基本性质:

(1) **非负性**. 对每一事件 A,都有 $f_n(A)\geqslant 0$;

(2) **正则性**. $f_n(\Omega)=1$;

(3) **有限可加性**. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两不相容的事件,则

$$f_n\Big(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i).$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验总次数之比,其大小表示事件 A 发生的频繁程度. 频率越大,就意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性越大. 因而,直观的想法是用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性的大小,但这是否可行呢?