命题专家亲解历年真题

2011 人大考研

2011 历年考研数学真题名家解析与指导

主编/李恒沛 高文森

以知识点为纲，着重基本概念、基本方法和基本理论

全书按照考试大纲规定内容编写，每章分为内容导读和考题选析两部分：内容导读概述内容，引领复习，帮助考生系统掌握；考题选析精选历年试题，一题多解，开拓思路，并指出典型错误。

中国人民大学出版社

历年考研数学真题名家解析与指导

▶ 主　编　李恒沛　高文森
▶ 副主编　徐　兵　郝志峰　徐淑珍

2011

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

历年考研数学真题名家解析与指导/李恒沛，高文森主编
北京：中国人民大学出版社，2010
ISBN 978-7-300-12077-5

Ⅰ. ①历…
Ⅱ. ①李… ②高…
Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 076619 号

历年考研数学真题名家解析与指导

主编　李恒沛　高文森

Linian Kaoyan Shuxue Zhenti Mingjia Jiexi yu Zhidao

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn（中国 1 考网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	三河汇鑫印务有限公司		
规　　格	210 mm×285 mm　16 开本	**版　　次**	2010 年 5 月第 1 版
印　　张	21.75	**印　　次**	2010 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	631 000	**定　　价**	36.00 元

前言

从 1987 年开始，全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试，至今二十余年. 对于数学考试而言，具有相对的稳定性. 为了更好地帮助考生备考，我们从历年考题中精选出一部分，从中归纳出考试内容的重点、难点及经常考的题型，以便了解试题的特点，把握命题的方向. 全国硕士研究生入学数学统考试题是参加命题的专家、教授的智慧和劳动的结晶，是一份十分宝贵的资料，本书就是在此基础上，结合多年命题、授课及辅导体会精心编写而成的，相信对广大考生从容应考，十分有益.

从已往的数学试题来看，主要着重于对基本概念、基本方法和基本理论的测试. 无论考试的形式如何，题目的类型怎样，考生只要掌握了以上“三基”，就能运用自如，在考试中考出好的成绩. 全书正文按照《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》规定的内容，主要包括高等数学、线性代数和概率统计等三章，各章由两部分组成，一为内容导学，概括这一章全部内容，并举例说明，引领考生复习，达到系统掌握的目的；二为考题选析，从历年的试卷中挑选出一定数量的考题，逐题进行分析、解答（或证明）与注释，力求简明扼要，一题多解，开拓思路，使考生做到举一反三，触类旁通. 同时指出考生在解题过程中出现的典型错误，提醒考生注意并引以为戒. 为了提高广大考生的复习效率，建议考生开始阅读本书之前，先参阅《数学考试大纲》，明确考试内容及要求，接下来要仔细阅读有关教材和参考书（推荐考生阅读由中国人民大学出版社出版、李恒沛、侯书会、高文森等主编的《考研数学新编考试参考书》），这些做完之后，再认真阅读本书，最后为了考量复习效果，建议用该出版社出版的《考研数学模拟冲刺试卷》来检验，考生不妨亲自动手做一做，孰对孰错，再与书中答案对照一下，这样就会达到更好的应试效果.

本书习题按填空题、选择题和解答题（含证明题）题型分类. 每道题前用数码表明试题使用的年份及卷种. 例如，某题号后括号内的数码为（96，1），表明该题为 1996 年数学一试卷中的一道题，数码（00，2）表明该题为 2000 年数学二试卷中的一道题，余下类推. 在长期的教学、辅导及阅卷过程中，发现不少考生对选择题、填空题及证明题采取“蒙”的办法，十分没有把握，原因是对基本概念理解有误，基本定理、公式记的不牢，因而失分较多. 为了帮助考生提高判断及推理能力，本书已将如何正确处理上述三类题的方法和技巧，作一简要阐述、归纳，辟为单独一章，以备考生复习参考.

本书的编者都是长期在高等院校中从事教学、科研的教授，大多数是教育部考试中心原数学命题组成员，多年参加考研命题、辅导，他们都具备丰富的命题、辅导经验.

本书在编写、编辑和出版过程中，得到中国人民大学出版社有关编辑的大力支持，在此一并表示谢意. 鉴于时间仓促，编写水平有限，书中如有不妥之处，敬请广大考生和教师指正. 预祝考生一帆风顺，考研成功！

编　者

2010. 3

目　录

第零章　选择题、填空题与证明题 ………………………………………………… 1
一、关于选择题 ………………………………………………………………… 1
二、关于填空题 ………………………………………………………………… 4
三、关于证明题 ………………………………………………………………… 7
第一章　高等数学 ……………………………………………………………… 10
一、内容导读 …………………………………………………………………… 10
二、考题选析 …………………………………………………………………… 31
第二章　线性代数 ……………………………………………………………… 191
一、内容导读 …………………………………………………………………… 191
二、考题选析 …………………………………………………………………… 215
第三章　概率论与数理统计 …………………………………………………… 258
一、内容导读 …………………………………………………………………… 258
二、考题选析 …………………………………………………………………… 272

第零章

选择题、填空题与证明题

历年考研数学试题都设有选择题、填空题与证明题，这三类题在试卷结构中占有相当重要的位置，特别是选择题和填空题的分值是相对固定的，大体上占总分的五分之二. 从阅卷的情况来看，这部分的得分率较低，加上证明题的失分，因而卷面总分不易上去. 究其原因不外乎两方面，一方面是考生对基本概念和基本理论把握得不牢，运算的失误率较高；另一方面是考生处理这三类题的方法比较欠缺. 对待选择题，采取“蒙”的方式；对待填空题，粗枝大叶，计算不仔细；至于证明题，思路不明，难以下手. 诚然，上述几种情形，只是出现在部分考生部分试卷上，但不可忽视. 本章旨在通过一些典型例题，提出一些应对方法，以期提高考生求解（证）这类考题的效率和能力.

一、关于选择题

选择题主要考查基本概念和基本理论. 方法得当，可以做到事半功倍，快捷有效，提高答对率. 考研数学试卷的选择题是单项选择题，即四个选项中有唯一的一个选项是正确的. 下面介绍几种常用的解题方法.

1. 观察法

观察法就是应用基本概念或理论，直接选出正确的答案.

例 1 考虑二元函数的下面 4 条性质：

① $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续；

② $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续；

③ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微；

④ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有

A. ②⇒③⇒①　　B. ③⇒②⇒①　　C. ③⇒④⇒①　　D. ③⇒①⇒④

分析　由基本定理知选项 A 正确.

（这是 2002 年数学一试卷中的一道试题.）

解　应选 A.

例 2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

A. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

分析　因

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0},$$

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

解 应选 A.

(这是 2007 年数学一试卷中的一道试题.)

例 3 设 A, B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有

A. $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$ B. $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$ D. $P(AB)\neq P(A)P(B)$

分析 因当 $0<P(A)<1$ 时，$P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充要条件.

解 应选 C.

(这是 1998 年数学一试卷中的一道试题.)

2. 演绎法

由已掌握的概念或定理，经过简单推导就可得到正确答案.

例 4 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

A. α, β, γ B. α, γ, β C. β, α, γ D. β, γ, α

分析 将 α, β, γ 与 x^k 比较：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\,dt}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{kx^{k-1}}\xlongequal{\text{取 }k=1}1,$$

即 α 是 x 的 1 阶无穷小；

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x\cdot2x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{k}\cdot\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{x^{k-3}}\xlongequal{\text{取 }k=3}\frac{2}{3},$$

即 β 是 x 的 3 阶无穷小；

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2k}\cdot\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{x^{k-2}}\xlongequal{\text{取 }k=2}\frac{1}{4},$$

即 γ 是 x 的 2 阶无穷小.

解 应选 B.

(这是 2004 年数学一试卷中的一道试题.)

例 5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$，则

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆 B. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

C. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆 D. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

分析 因 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$,

$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$,

故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 皆可逆.

解 应选 C.

(这是 2008 年数学一试卷中的一道试题.)

例 6 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2，则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是

A. 8 B. 16 C. 28 D. 44

分析 一般地，若随机变量 X 和 Y 相互独立，则数学期望

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y).$$

方差 $$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y).$$

对于本题 $a=3$，$b=-2$，$D(X)=4$，$D(Y)=2$.

故 $D(3X-2Y)=44$.

解 应选 D.

（这是 1997 年数学一试卷中的一道试题.）

3. 排除法

排除法就是否定四个选项中的三个，余下的一个必为正确的选项. 使用这种方法时，举反例是快捷有效的.

例 7 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

A. 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数

B. 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数

C. 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数

D. 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数

分析 B. 的反例：令 $f(x)=x^2$，取 $F(x)=\frac{x^3}{3}+1$；

C. 的反例：令 $f(x)=\cos x+1$，取 $F(x)=\sin x+x$；

D. 的反例：令 $f(x)=x$，取 $F(x)=\frac{x^2}{2}$.

解 应选 A.

（这是 1999 年数学一～四试卷中的一道试题.）

例 8 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则

A. 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

B. 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$

C. 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

D. 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$

分析 A. 的反例：令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=[3,\ 4]$，

则有 $|\boldsymbol{AB}|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 6 & 8\end{vmatrix}=0$；

C. 的反例：令 $\boldsymbol{A}=[1\quad 2]$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，

则有 $|\boldsymbol{AB}|=0$；

D. 的反例：令 $\boldsymbol{A}=[1\quad 2]$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，

则有 $|\boldsymbol{AB}|=3\neq 0$.

故选项 B 正确.

事实上，因 $\boldsymbol{AB}$ 是 m 阶矩阵，$|\boldsymbol{AB}|=0$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})<m$. 由

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant \min(m,\ n),$$

知当 $m>n$ 时，必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant n<m$.

解 应选 B.

（这是 1999 年数学一试卷中的一道试题.）

例 9 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则

A. $X+Y$ 服从正态分布

B. X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

C. X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布　　　　　　D. X^2/Y^2 服从 F 分布

分析　当随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，且二者相互独立时，A、B、C、D 四选项均成立．当未给出 X、Y 相互独立这一条件，A、B、D 均不一定成立．

解　应选 C.

（这是 2002 年数学三试卷中的一道试题.）

二、关于填空题

从历年考研试题来看，填空题基本上是计算题（计算量不大），用来考查考生基本概念与基本运算的能力．因为只看答案，没有过程，所以不允许出一点错，否则不得分.

1. 推算法

直接利用概念、公式计算.

例 1　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$________.

分析　利用 L'Hospital 法则，求"$\dfrac{0}{0}$"型未定式极限.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}\cdot\sin x}{\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}e^{\cos x}\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^2}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{3}{2}e.$$

解　应填 $\dfrac{3}{2}e$.

（这是 2009 年数学三试卷中的一道试题.）

例 2　曲线

$$\begin{cases} x=\displaystyle\int_0^{1-t}e^{-u^2}\,du, \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$$

在点 (0，0) 处的切线方程为________.

分析　曲线上点 (0，0) 对应 $t=1$，切线的斜率

$$k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right|_{t=1}=\left.\frac{2t\ln(2-t^2)-\dfrac{t^2\cdot 2t}{2-t^2}}{-e^{-(1-t)^2}}\right|_{t=1}=2$$

于是所求切线方程为 $y=2x$.

解　应填 $y=2x$.

（这是 2009 年数学二试卷中的一道试题.）

例 3　设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

分析　由 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1$，

$$\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

于是由定义知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 和 0．从而 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 1.

解　应填 1.

（这是 2008 年数学一试卷中的一道试题.）

例 4　设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$________.

分析 由题设，知 $E(X)=D(X)=\lambda=1$. 又 $E(X^2)=D(X^2)+(E(X))^2=2$，从而有

$$P\{X=E(X^2)\}=P\{X=2\}=\frac{e^{-1}}{2}=\frac{1}{2e}.$$

解 应填$\frac{1}{2e}$.

（这是 2008 年数学一试卷中的一道试题.）

2. 图示法

由题意画出图形，从几何图形直观寻求答案.

例 5 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

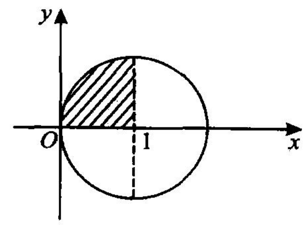

图 0—2—1

分析 令 $y=\sqrt{2x-x^2}\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1$，显见这是圆心在点 (1，0)、半径为 1 的圆的方程，该圆的面积 $S=\pi\cdot1^2=\pi$，由定积分的几何意义，如图 0—2—1，知

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{S}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

解 应填$\frac{\pi}{4}$.

本题采用配方、置换的方法也可做，但计算量偏大.

（本题是 2000 年数学一试卷中的一道试题.）

例 6 由曲线 $y=x+\frac{1}{x}$，$x=2$ 及 $y=2$ 所围图形的面积 $S=$ ________.

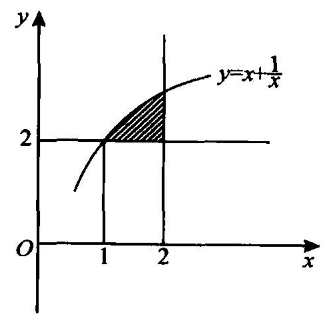

图 0—2—2

分析 先画草图，如图 0—2—2 所示.

$$S=\int_1^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right]\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+\ln x-2x\right)\Big|_1^2=\ln2-\frac{1}{2}.$$

解 应填 $\ln2-\frac{1}{2}$.

（这是 1996 年数学二试卷中的一道试题.）

3. 对称法

利用函数的奇偶性、区域对称性，使计算简化.

例 7 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2x)\cos^2x\mathrm{d}x=$ ________.

分析 注意到被积函数的奇偶性及积分区间的对称性，知

$$\begin{aligned}原式&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x(1-\sin^2x)\mathrm{d}x\\&=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4x\mathrm{d}x\right)=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

解 应填$\frac{\pi}{8}$.

（这是 2001 年数学二试卷中的一道试题.）

例 8 设曲面Σ：$|x|+|y|+|z|=1$，则$\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=$ ________.

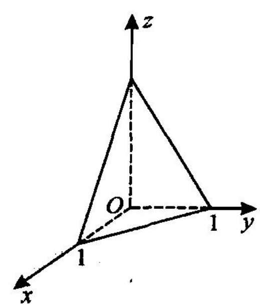

图 0—2—3

分析 如图 0—2—3，因Σ关于 yz 平面对称，x 关于 x 为奇函数，故有 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S=0$.

由变量的轮换对称性，知

$$\iint_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}|x|\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}|z|\mathrm{d}S,$$

于是

$$\iint_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S$$
$$=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}1\cdot\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\text{（曲面}\textstyle\sum\text{的面积）}$$

用σ表示Σ在第一卦限部分的面积，$\sigma=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而

$$\text{原式}=\frac{1}{3}(8\sigma)=\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

解 应填$\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

（这是 2007 年数学一试卷中的一道试题.）

例 9 设L为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长为$a$，则$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ ________.

分析 因L关于x轴（y轴）对称，$2xy$关于y(关于x)为奇函数，故$\oint_L 2xy\mathrm{d}s=0$.

又 $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\Rightarrow 3x^2+4y^2=12,$$

于是 $$\oint_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L 12\mathrm{d}s=12a.$$

解 应填$12a$.

（这是 1998 年数学一试卷中的一道试题.）

例 10 设区域D为$x^2+y^2\leqslant R^2$，则$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

分析 因积分域D: $x^2+y^2\leqslant R^2$，关于x轴、y轴对称，由x和y的轮换对称性，有

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是

$$\text{原式}=\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\theta}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

或直接利用极坐标计算也较方便.

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

解 应填$\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$.

(这是 1994 年数学一、二试卷中的一道试题.)

三、关于证明题

证明题就是依据已有的概念、定理、公式，用逻辑推理的方法证明给定的命题结论. 一般比较抽象，考生感到困难，难以下手. 下面针对考题，给出常见的一些方法.

1. 数学归纳法

设 P 是与正整数 n 有关的数学命题.

1° 当 $n=1$，命题 P 成立;

2° 设 $n=k$，命题 P 成立，能推出 $n=k+1$ 命题也成立，则命题 P 对一切正整数 n 成立.

例 1 设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1, 2, \cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

分析 利用归纳法.

证 由 $x_1=10$，$x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$ 知 $x_1>x_2$. 设对正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$，则有

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

故由归纳法知，对一切正整数 n，都有 $x_n>x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 为单减数列. 又显见 $x_n>0(n=1, 2, \cdots)$，即 $\{x_n\}$ 有下界，故根据极限存在准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $a=\sqrt{6+a}$成立，于是得 $a^2-a-6=0\Rightarrow a=3(a=-2$ 舍去)，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

(这是 1996 年数学一、二试卷中的一道试题.)

2. 辅助函数法

由欲证命题的结论，适当地构造一个辅助函数，利用已知的定理、公式，问题就解决了.

例 2 设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0$，$x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

分析 构造辅助函数，利用函数单调性或利用 Lagrange 中值定理.

证法 1 令 $\varphi(x)=f(x+x_2)-f(x)$，则

$$\varphi'(x)=f'(x+x_2)-f'(x)=x_2f''(x+\theta x_2)<0,\ 0<\theta<1,$$

从而 $\varphi(x)$单减，又 $x_1>0$，有 $\varphi(x_1)<\varphi(0)$，即 $f(x_1+x_2)-f(x_1)<f(x_2)-f(0)$，亦即

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

证法 2 不妨设 $x_1\leqslant x_2$($x_2\leqslant x_1$ 类似可证)，则由 Lagrange 中值定理得

$$f(x_1)-f(0)=x_1f'(\xi_1),\ 0<\xi_1<x_1,$$
$$f(x_1+x_2)-f(x_2)=x_1f'(\xi_2),\ x_2<\xi_2<x_1+x_2,$$

由题设 $f''(x)<0$，又 $\xi_1<\xi_2$，知 $f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$，

即有 $\quad f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)$,

故得 $\quad f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

(这是 1992 年数学一～三试卷中的一道试题.)

3. 反证法

若命题结论不成立，则由此导出矛盾，即与已知命题假设相抵触. 说明“命题结论不成立”的假设不对，从而肯定命题是成立的.

例 3 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明存在 $\xi\in(a, b)$ 和 $\eta\in(a, b)$ 使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

分析 先用反证法证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$. 再证存在 $\eta\in(a,b)$，使 $f''(\eta)=0$.

证 若不存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$，则在 (a,b) 内恒有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$，不妨设 $f(x)>0$（$f(x)<0$，类似可证），则

$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant 0,$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant 0,$$

从而 $f'(a)f'(b)\leqslant 0$，此与题设矛盾. 故在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

由 $f(a)=f(b)=f(\xi)$ 及 Rolle 定理，知存在 $\eta_1\in(a,\xi)$，$\eta_2\in(\xi,b)$，使 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$，再由 Rolle 定理知存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使 $f''(\eta)=0$.

（这是 1996 年数学三试卷中的一道试题.）

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量，$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置. 证明

(1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$；

(2) 当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

分析 由题设导出 (1)；用反证法证明 (2).

证 (1)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\xi}(2-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{I}-(2-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 即 $\boldsymbol{I}-(2-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}$，亦即

$$(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}-1)\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{\xi}$ 是非零列向量，$\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，

故 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}-1=0$，即 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$.

(2) 用反证法. 当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$ 时 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，从而 $\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，这与 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{I}$ 矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

（这是 1996 年数学一、二试卷中的一道试题.）

4. 综合法

利用已知定义、定理及不等式证明一些命题，上述三种方法往往不是单独使用的，而是相互关联、综合使用的.

例 5 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

分析 $f(x)$ 有两个零点，相当于其原函数 $F(x)$ 有三个零点，往下证明，综合利用反证法及微分中值定理（或定积分中值定理）证得.

证法 1 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$0\leqslant x\leqslant\pi$，

则有 $F(0)=0$，$F(\pi)=0$. 又因为

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}F(x)=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以存在 $\xi\in(0,\pi)$，使 $F(\xi)\sin\xi=0$. 因若不然，则在 $(0,\pi)$ 内或 $F(x)\sin x$ 恒为正或 $F(x)\sin x$ 恒为负，均与 $\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x=0$ 矛盾. 但当 $\xi\in(0,\pi)$ 时，$\sin\xi\neq0$，故 $f(\xi)=0$.

由上证得 $F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0 \quad (0<\xi<\pi)$.

再对 $F(x)$ 在区间 $[0,\xi]$，$[\xi,\pi]$ 上分别用罗尔定理，知至少存在 $\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$，使

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0,$$

即 $$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$$

证法 2 由 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 知，存在 $\xi_1\in(0,\pi)$，使 $f(\xi_1)=0$. 因若不然，则在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)$ 恒为正，或 $f(x)$ 恒为负，均与 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

若在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)=0$ 仅有一个实根 $x=\xi_1$，则由 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 推知，$f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 内异号，不妨设在 $(0,\xi_1)$ 内 $f(x)>0$，在 (ξ_1,π) 内 $f(x)<0$. 于是再由 $\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$ 与 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 及 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调性知：

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x+\int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x>0,\end{aligned}$$

得出矛盾.

从而推知，在 $(0,\pi)$ 内除 ξ_1 外，$f(x)=0$ 至少还有另一实根 ξ_2，故知存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$，$\xi_1\neq\xi_2$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

注：证法 1 中的 ξ 和证法 2 中的 ξ_1 也可用积分中值定理得到.

（这是 2000 年数学一～四试卷中的一道试题.）

例 6 设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$.

(1) 当 n 为正整数，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，证明 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$；

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

分析 由设证 (1)；利用 (1) 及夹逼定理得 (2).

解 (1) 因为 $|\cos x|\geqslant0$，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\mathrm{d}x\leqslant S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\mathrm{d}x.$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数，在每个周期上积分值相等，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=n\int_0^\pi|\cos x|\mathrm{d}x=2n,$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=2(n+1).$$

因此当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，有

$$2n\leqslant S(x)<2(n+1).$$

(2) 由 (1) 知，当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

令 $x\to+\infty$，由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

（这是 2000 年数学二试卷中的一道试题.）

第一章

高等数学

一、内容导读

高等数学是研究生入学数学考试最重要的内容.《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（简称《数学考试大纲》）规定，无论是数学试卷一、试卷二（工学类），还是数学试卷三（经济学类、管理学类），都要求考高等数学，其在数学试卷一中约占 56%，数学试卷二中约占 78%，数学试卷三中约占 56%. 因此，如何复习高等数学，考生非常关注. 为了帮助考生有效地进行复习，下面按照考试大纲规定的考试内容的顺序一一阐述.

（一）函数、极限、连续

函数是高等数学的研究对象，极限是研究的方法，而且贯穿于微积分的始终. 连续是用极限研究函数的一种性态，可以说是由极限派生而来的. 连续函数是重要的一类函数. 本单元考查重点，是函数（含表示方法）、极限（含左极限与右极限）、连续（含左连续与右连续）的概念及性质，函数间断点类型的判断，函数的表示（用变量替换转换其表达形式），求极限的若干方法，运用闭区间上连续函数的性质证明一些命题. 本单元试题类型包括：① 函数记号的转换；② 分段函数的运算；③ 简单反函数的定义域及其表示；④ 考查函数在一点极限存在及连续性的充要条件；⑤ 判断函数间断点及其类型；⑥ 无穷小的比较；⑦ 判断函数的性质（有界性，单调性，奇偶性，周期性）；⑧ 利用闭区间上连续函数性质证明一类题；⑨ 求极限（包括用极限的定义，等价无穷小，极限的运算法则，极限存在准则，两个重要极限，函数的连续性，L'Hospital 法则，导数定义，定积分定义以及级数收敛的必要条件等方法）.

下面仅就几种重点题型，举例加以说明.

例 1 试证函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的，但当 $x\to 0$ 时不成为无穷大.

分析 在点 $x=0$ 的某邻域内，函数无界与当 $x\to 0$，$f(x)\to\infty$ 是两个容易混淆的概念，函数无界未必就是无穷大（无穷大显见是无界的）.

证 对于无论多大的正数 G，总有充分接近于 $x=0$ 的点，使得 $|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|>G$. 例如，若取 $x=\frac{1}{n\pi}$，则 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|=n\pi$. 所以，若 $n\pi>G$，即 $n>\frac{G}{\pi}$，则存在点 $x=\frac{1}{n\pi}$，有 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|>G$，即函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的.

又如，若取 $x=\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$，则当 $n\to\infty$ 时 $x\to 0$，但此时 $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\to 0$，因此函数 $f(x)$ 并不趋于无

穷大.

例 2 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，试证在 $[0,a]$ 上至少存在一点 x，使 $f(x)=f(x+a)$.

分析 引入辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，欲证存在一点 $x\in[0,a]$，使 $f(x)=f(x+a)$，即要证 $F(x)=0$，而要达到这一点，只需对函数 $F(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上引用零点存在定理.

证 令 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，由题设，易知 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续. 又

$$F(0)=f(0)-f(a),$$
$$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0).$$

若 $f(0)-f(a)=0$，则 $f(0)=f(a)=f(2a)$，即当 $x=0$，a 时，有 $f(x)=f(x+a)$；

若 $f(0)-f(a)\neq 0$，则 $F(0)\cdot F(a)<0$，由零点存在定理，知必有一点 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

例 3 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

分析 由题设，知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}=3$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=0 \quad（否则上述极限不存在）$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0) \quad（f(x)连续）$$

从而 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

下面求 $f''(0)$，或用 L'Hospital 法则，或用 Taylor 展式，最后利用重要极限求出欲求之极限.

解法 1 由题设，有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}=3$，

从而有 $f(0)=0$，$f'(0)=0$ （连续性，导数定义），

因当 $x\to 0$，有 $\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]\sim x+\frac{f(x)}{x}$，

故知 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=3,$$

即有 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=2\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=4,$$

即 $$f''(0)=4,$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2.$$

解法 2 由题设，有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}=3$， ①

推知 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，而由 Taylor 公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

可得$\frac{f(x)}{x}=\frac{f''(0)}{2}x+o(x)$，代入①，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x\left(1+\frac{f''(0)}{2}+o(1)\right)\right]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(1+\frac{f''(0)}{2}+o(1)\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f''(0)}{2}+o(1)\right)=3\Rightarrow f''(0)=4.$$

故 $$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}[1+2x+o(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}[1+2x+o(x)]^{\frac{1}{2x+o(x)}\cdot\frac{2x+o(x)}{x}}=e^2.$$

注：① 例 1 说明函数无界与无穷大是两个不同的概念，不能混为一谈．无穷大必无界，而无界却未必无穷大．函数无界相对函数有界而言，从函数有界的定义可以立即得出函数无界的定义．函数有界的定义：$\exists M>0$，$\forall x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant M$；于是有函数无界的定义：$\forall G>0$，$\exists x_0\in I$，有 $|f(x_0)|>G$．（其中 I 表示某区间）．从某种意义上来说，函数"有界"与"无界"可以认为是一对孪生的概念，这样就容易理解，也便于记忆．

② 例 2 是一道证明题，用的是常规方法，但却是很重要的方法，那就是"辅助函数"法．引入什么样的函数，至关重要，通常是从结论出发，由已知条件，寻找理论根据（定理、公式），这样作出的辅助函数即可达到证明的目的．

③ 例 3 是一道关于极限的综合题，在解题过程中，涉及极限概念，等价无穷小，连续性，L'Hospital 法则，导数定义，Taylor 公式，重要极限等，知识点较多，但只要充分理解题设条件，把握住极限存在性这一主体思路，还是容易入手的．事实上，由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}=3$ 立知 $f(0)=0$（因 $f(x)$连续，若 $f(0)\neq0$，则上述极限不存在）进而由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 知 $f'(0)=0$．注意到，在涉及与二阶导数或二阶以上导数有关的命题时，应用 Taylor 公式往往是有效的，本题在求 $f''(0)$ 时，用了 Taylor 公式比较方便．解法 2 比解法 1 更直接一些．

（二）一元函数微分学

本单元考查重点是导数（微分）的概念，导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程与法线方程，可导（可微）与连续；微分运算（按定义求导数，各种函数形式的导数，分段函数求导数，高阶导数等）；微分中值定理（含 Rolle 定理，Lagrange 定理，Cauchy 定理以及 Taylor 定理）并用之于证明某些函数不等式，函数方程及其相关命题；导数应用（函数单调性、极值判别法，函数图形凹凸性、拐点判别法，求曲率）并用之于绘图（会求渐近线）；会用 L'Hospital 法则求极限．本单元的试题类型包括：① 求已知函数（包括显式、隐式、参数式以及变上限积分所确定的函数等）的导数（微分，高阶导数）；② 判定函数在一点的可导性（包含连续性、极限存在性）；③ 利用导数确定函数性态（单调性，极值，凹凸性，拐点），描绘函数图形（含渐近线）；④ 利用导数方法，求实际问题中的最大值、最小值问题；⑤ 利用微分中值定理，证明函数属性的命题；⑥ 证明函数不等式（利用函数单调性，微分中值定理）．如果说上一单元的证明题主要用到闭区间上连续函数的性质，那么本单元的证明题几乎都要用到微分中值定理了，就这方面的问题举例以说明之．

例 1 设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上具有二阶导数，且 $|f(x)|\leqslant1$，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$，试证：至少存在一点 $\xi\in(-2,2)$，使 $f(\xi)+f''(\xi)=0$．