

实用有限元分析技术 ——ANSYS专题与技巧

杨永谦 肖金生 等编著

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



实用有限元分析技术

——ANSYS 专题与技巧

杨永谦 肖金生 刘 杰 编著
赵在理 钱 伟 尹奇志 杨天麒



机械工业出版社

有限元法是求解工程与科学问题的一种非常有效的数值分析方法,而 ANSYS 是一个优秀的有限元分析软件,在求解力、热、电、磁等科学问题以及机械、动力、土木、船舶、汽车、航空、材料、电子等工程问题中都得到了非常广泛的应用。

本书是作者多年来从事有限元法教学以及 ANSYS 软件培训工作的理论概括、技术积累和经验总结。全书共 5 篇计 20 章,内容丰富,实用性强。第 1 篇为有限元模型专题,第 2 篇为结构动力分析专题,第 3 篇为结构非线性有限元分析专题,第 4 篇为船体结构有限元分析专题,第 5 篇为流固耦合振动分析专题。附录中还总结了 ANSYS 相关的 34 个关键问题。

本书适合于使用 ANSYS 进行工程求解的工程技术人员及相关专业的师生,也可作为 ANSYS 软件的教学和培训的教材。

图书在版编目 (CIP) 数据

实用有限元分析技术: ANSYS 专题与技巧/杨永谦等编著. —北京:机械工业出版社, 2010. 6

ISBN 978-7-111-30913-0

I. ①实… II. ①杨… III. ①有限元分析—应用程序, ANSYS
IV. ①O241. 82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 104809 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 李万宇

版式设计: 霍永明 责任校对: 刘怡丹

封面设计: 路恩中 责任印制: 杨 曦

北京四季青印刷厂印刷 (三河市杨庄镇环伟装订厂装订)

2010 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 17 印张 · 4 插页 336 千字

0001—4000 册

标准书号: ISBN 978 - 7 - 111 - 30913 - 0

定价: 38.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

编辑热线: (010)88379732

门户网: <http://www.cmpbook.com>

社服务中心: (010)88361066

销售一部: (010)68326294

教材网: <http://www.cmpedu.com>

销售二部: (010)88379649

读者服务部: (010)68993821

封面无防伪标均为盗版

前 言

有限元法是求解工程与科学问题的一种非常有效的数值分析方法，而 ANSYS 是一个优秀的有限元分析软件，在求解力、热、电、磁等科学问题以及机械、动力、土木、船舶、汽车、航空、材料、电子等工程问题中都得到了非常广泛的应用。

本书是作者多年来从事有限元法教学以及 ANSYS 软件培训工作的理论概括、技术积累和经验总结。本书的素材来源于作者先后在武汉理工大学开设的“船舶结构有限元分析”等本科生和研究生课程的讲义，以及在校内外多次为研究生和工程技术人员进行有限元法及 ANSYS 软件的教学和培训的讲稿。本书结构分析部分主要基于杨永谦教授和肖金生教授多年来的科研和教学工作的积累。

本书不仅仅是介绍有限元法基本理论和基本算法的理论性基础教材，也不仅仅是介绍 ANSYS 软件的各项功能及操作步骤的指南性用户手册，而是一本以有限元法为手段，以 ANSYS 软件为工具，指导如何利用数值分析方法求解复杂的工程实际问题的书籍。本书不详细介绍工程问题的系统理论以及有限元法的具体算法，也没有罗列 ANSYS 软件全部功能和详细步骤，而只介绍读者在着手解决工程实际问题时所必须掌握的基本方法和应用技巧。因此，本书不同于有限元法的理论书籍，也不同于 ANSYS 软件的使用指南，而是一本以 ANSYS 软件为教学平台的有限元专题应用以及使用技巧的书籍。

全书共 5 篇计 20 章，内容丰富，实用性强。第 1 篇为有限元模型专题，第 2 篇为结构动力分析专题，第 3 篇为结构非线性有限元分析专题，第 4 篇为船体结构有限元分析专题，第 5 篇为流固耦合振动分析专题。

本书某些专题中应用的实例使用 ANSYS 早期版本，且没有在 ANSYS 10.0 和 11.0 版本上验证，但并不影响读者参考这些实例来解决自己所遇到的工程问题。其中一些程序必须注意的是：用 GUI 操作得到的点、线、面命令，在不同机器和不同 ANSYS 版本上可能不一致，因此不能通用，特此说明。

本书编著工作由杨永谦和肖金生负责，参加本书编著工作的有杨永谦、肖金生、刘杰、赵在理、钱伟、尹奇志和杨天麒。刘海强、江爱林、张小军、刘坤、蔡永华、彭政、童亮、夏胜雄和徐林志等为本书的完成也付出了辛勤的劳动，在此表示感谢。

由于作者水平有限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

杨永谦 肖金生
于武汉理工大学

目 录

前言	
绪论	1
第1篇 有限元模型专题	
第1章 有限元模型化问题	4
1.1 网格与收敛	4
1.2 完全积分、体积锁定、剪切锁定	7
1.3 一致缩减积分与沙漏模式	10
1.4 建模的一般原则	11
第2章 网格误差估计与局部网格细化	12
2.1 网格误差估计	12
2.2 局部网格细化	14
第2篇 结构动力分析专题	
第3章 模态分析	17
3.1 模态分析的一般描述	17
3.2 模态分析步骤	19
3.3 有预应力的模态分析	20
3.4 计算实例: Tacoma 吊桥模态分析	21
第4章 谐响应分析	25
4.1 谐响应分析的一般描述	25
4.2 模态叠加法的基本原理	26
4.3 谐响应分析步骤与计算实例	28
4.4 有预应力的模态叠加法谐响应分析步骤	33
4.5 计算实例: Tacoma 吊桥风振破坏分析	36
第5章 瞬态动力学分析	40
5.1 瞬态动力学分析的一般描述	40
5.2 瞬态分析积分时间步长选取准则	42
5.3 初始条件	43
5.4 完整法瞬态分析	46

5.5 模态叠加法瞬态分析步骤与计算实例	55
第3篇 结构非线性有限元分析专题	57
第6章 非线性分析的基本过程	61
6.1 非线性问题的种类	61
6.2 非线性求解 Newton-Raphson 法	61
6.3 收敛性	63
6.4 载荷步、子步、平衡迭代步、时间的意义	66
6.5 非线性求解自动控制及非线性求解步骤	67
6.6 非线性计算实例	74
6.7 高级求解控制	76
第7章 应力刚化与旋转软化	82
7.1 应力刚化	82
7.2 旋转软化	86
第8章 几何非线性	90
8.1 几何非线性的特征	90
8.2 大应变与应力张量	91
8.3 ANSYS 程序中应变与应力的度量	96
8.4 离散的非线性有限元形式与一致刚度矩阵	97
8.5 大变形(大挠度、大转动、小应变)	98
8.6 大应变、大变形分析实例	99
第9章 屈曲分析	105
9.1 屈曲分析的基本概念	105
9.2 特征值屈曲分析与计算实例	106
9.3 非线性屈曲分析、弧长法与计算实例	110
9.4 后屈曲分析实例	116
第10章 材料非线性	120
10.1 弹塑性分析	120
10.2 塑性选项及塑性材料特性的输入	125
10.3 弹塑性有限元求解原理	131
10.4 弹塑性分析步骤与计算实例	133
10.5 超弹性材料	137
10.6 超弹性分析步骤与计算实例	147

第 4 篇 船体结构有限元分析专题	
第 11 章 船体有限元分析概述	151
第 12 章 板梁组合结构计算	153
12.1 梁模型	153
12.2 交叉梁系(板架)计算	155
12.3 板梁组合结构计算示例	157
第 13 章 舱段有限元分析	161
13.1 《CCS 散货船、油船直接计算指南》的有关规定	162
13.2 《CCS 集装箱船舱段直接计算指南》的有关规定	164
13.3 《IACS 散货船结构共同规范直接强度分析》的有关规定	166
13.4 施加舷外水压力的方法	169
13.5 计算剖面形心	170
13.6 大开口船舶舱段计算示例	171
第 14 章 全船有限元分析	177
14.1 全船有限元分析的目的	177
14.2 有限元计算模型	177
14.3 首、尾端建模方法	180
14.4 平衡调整	180
14.5 计算实例	181
第 15 章 局部结构强度分析	184
15.1 实肋板上有开孔的应力分析示例	184
15.2 数据文件及计算结果	185
第 16 章 自由体结构的惯性释放计算	187
16.1 惯性释放概述	187
16.2 惯性释放计算实例	188
16.3 惯性释放在船体结构计算中的应用	191
第 17 章 有限元二次解析——子模型分析	194
17.1 子模型分析步骤	194
17.2 计算实例	197
第 5 篇 流固耦合振动分析专题	
第 18 章 耦合场分析概述	203
18.1 耦合场分析的定义	203

18.2 耦合场分析方法	203
第 19 章 流固耦合振动理论模型	206
19.1 流固耦合概述	206
19.2 流固耦合方程	206
第 20 章 流固耦合振动应用实例	215
20.1 流固耦合问题分析步骤	215
20.2 水下钢环自然频率计算实例	220
附录 I 单位制	226
附录 II ANSYS 问题集锦	229
参考文献	262

绪 论

在机械、土木、船舶、车辆、航天、航空、能源、化工、材料、电力、电子学工程领域中,通常存在着热、力、电、磁等物理过程以及化学反应过程,形成各种各样的工程问题。

工程问题中的物理化学过程,通常遵循一定的定律和原理,例如,物质不灭定律或质量守恒原理、牛顿第二定律或动量守恒原理、热力学第一定律或能量守恒原理。基于这些定律和原理,可以导出相应的工程问题的数学模型。这些数学模型,一般是常有边界条件和初始条件的微分方程组。边界条件和初始条件合称为定解条件。微分方程组及其定解条件是工程问题的微分方程表述,或称为微分方程问题。这里微分方程可能是常微分方程,也可以是偏微分方程。

微分方程或是微分方程组只有在非常简单的求解区域、物性参数、边界条件和初始条件下,才能获得解析解。有些工程问题所遵循的定律或原理以变分原理形式存在,例如,虚功原理或最小位能原理。即这些工程问题存在变分原理表述,或称为变分原理问题。

变分原理问题即为泛函数的极值问题,而泛函数即为函数(例如,温度或位移函数可能是空间和时间变量的函数)的函数,通常是带积分运算的函数 $J(T(x, y))$, 同样变分原理问题只在非常简单的情况下,才能直接求解。里兹法(Ritz)是求解变分原理问题的一种近似方法。将求解区域进行离散为一系列具有有限尺寸的单元,变分原理问题的泛函可以表示为一系列单元内单元泛之和。区域离散化后,连续的物理场(如二维稳定温度场 $T(x, y)$)用一系列(例如几个)节点之上的物理量(例如,温度值 $T_1 T_2 T_3 \cdots T_n$)。从而泛函(例如, $J(T(x, y))$)由函数的函数变为一系列离散的物理量为自变量的单元函数,(例如, $J(T_1 T_2 T_3 \cdots T_n)$)作为泛函数极值问题的变分问题变为多元函数的极值问题。根据多元函数的极值条件,最后形成的线性代数方程组(例如,以 $T_1 T_2 T_3 \cdots T_n$ 为自变量的 n 阶线性方程组)。求解代数方程组即得物理场中有几个节点处的物理量之值(例如,温度 $T_1 T_2 T_3 \cdots T_n$)。

对于某些工程问题,没有现成的变分原理可用。这时可以利用加权余量法,以基于工程问题的微分方程组及其定解条件,建立其变分原理表述。即将其表述为变分原理问题,再利用有限元法求解,也可直接基于微分方程问题,利用加权余量法推导出有限元方程式。甚至就用加权余量法求解微分方程问题,它本身就是一种数值方法。

有限元法 (Finite Element Method) 可以基于变分原理, 而变分原理可以是原由的描述工程问题的基本原理, 也可以是利用加权余量法由微分方程所导出的变分原理。这种方法由求解变分原理问题的里兹 (Ritz) 法推广而来, 所以也称为有限元法的里兹法。有限元法也可以基于微分方程问题利用加权余量法导出, 而不涉及高深的变分原理。有限元法还可以基于工程问题的物理原理, 例如力学问题中的力平衡和热学问题中的热平衡, 由此导出有限元方程式, 不涉及到变分原理, 也不涉及到加权余量法, 甚至连微分方程也不涉及。这种方法称为有限元法的直接法。

加权余量法的基本思想是使各个区域内各微分方程的余量 (或称残差) 以及各个边界条件的余量 (或称残差) 的加权之和为最小, 来求得微分方程中的物理场。加权余量法有配置法、子域法、最小二乘法、力矩法和伽辽金 (Galerkin) 法等。有限元法主要基于伽辽金法。

有限元法的基本思想的提出可以追溯到 R · Courant (1943)、冯康等数学家的贡献, 他们的方法基于变分原理, 是把变分原理与分片连续函数或有限差分法结合起来。但是, 有限元法的概念, 是力学家 R · W · Clough 基于结构力学的刚架位移法 (或称直接刚度法, 简称直接法) 提出的。这时的有限元法基于力学原理, 便于工程师的理解, 而且随着电子计算机的出现得到广泛的应用。

直到 20 世纪 60 年代中期, R · E · Jones 等力学家证明这种有限元法实际上是古老的变分原理的里兹法的一种变形和推广。不同之处在于, 有限元法假设的近似函数不是在整个求解域上而仅在单元上, 而且不满足任何边界条件。这种推广使有限元法从力学问题应用到其他具有变分原理的物理学问题, 像有限元软件 ANSYS 能够广泛的求解多物理场及其耦合场。

20 世纪 60 年代后期, 进一步利用加权余量法, 主要是伽辽金 (Galerkin) 法来建立有限元方程, 这样有限元法能用来求解那些微分方程和定解条件, 进一步扩大了有限元法的求解范围。当然, 也可以从利用加权余量法从工程的微分方程和定解条件出发, 导出变分原理和广义变分原理再建立有限元方程进行求解。

目前, 有限元法的应用已从平面扩大到空间; 从静力问题扩大到动力问题; 从线性材料扩大到非线性材料; 从各向同性材料扩大到各向异性材料; 从固体力学扩大到流体力学; 从单一材料扩大到复合材料; 从单一物理场扩大到多物理场; 其功能从分析校核扩大到优化设计, 在研究和工程设计中发挥着越来越大的作用。

ANSYS 软件是融结构、流体、电场、磁场、声场分析于一体的大型通用有限元分析软件。由世界上最大的有限元分析软件公司美国 ANSYS 开发, 它能与多数 CAD 软件接口, 实现数据的共享和交换, 如 Pro/Engineer、NASTRAN、Algor、AutoCAD 等, 是现代产品设计中的高级 CAD 工具之一。软件主要包括三个部分: 前处理模块、分析计算模块和后处理模块。前处理模块提供了一个强大的实体建模

及网格划分工具,用户可以方便地构造有限元模型;分析计算模块包括结构分析(可进行线性分析、非线性分析和高度非线性分析)、流体动力学分析、电磁场分析、声场分析、压电分析以及多物理场的耦合分析,可模拟多种物理介质的相互作用,具有灵敏度分析及优化分析能力;后处理模块可将计算结果以彩色等值线显示、梯度显示、矢量显示、粒子流迹显示、立体切片显示、透明及半透明显示(可看到结构内部)等图形方式显示出来,也可将计算结果以图表、曲线形式显示或输出。软件提供了 100 种以上的单元类型,用来模拟工程中的各种结构和材料。

ANSYS 公司成立于 1970 年,总部位于美国宾西法尼亚州的匹兹堡。ANSYS 从最初的版本发展到现在的 ANSYS11.0,其程序已经有了很大的变化。在机械应用领域,ANSYS 11.0 包括了 ANSYS Workbench 下全部的热瞬态分析功能。这不仅帮助用户进行非常复杂的时域仿真,同时 ANSYS Workbench 也可自动完成很多建模和求解工作。这样可以轻松快速地求解设备在一定运行时间内的热性能。在复杂的流固耦合问题方面,也提供了完善的解决方案,整合了世界一流的应力分析和流体分析技术,形成了一套完整的流固耦合解决方案。新的 AWE (ANSYS Workbench Environment) 环境能直接读入各种 CAD 软件的零件模型,并在其统一环境中实现任意模型装配和 CAE 分析。整合相同或不同 CAD 软件模型数据就得到 CAE 分析用的 CAD 模型库,这些模型库保留 CAD 中的设计参数,并通过连接技术实现与 CAD 的软件之间的共享,其优点是任何 CAD 和 CAE 人员对设计的改变都立即反映到对方软件环境中,从而实现设计—仿真的同步协同。

由于篇幅有限,本书主要介绍有限元模型专题、结构动力有限元分析专题、结构非线性有限元分析专题、船体结构有限元分析专题和流固耦合振动分析专题。

第 1 篇 有限元模型专题

第 1 章 有限元模型化问题

本章主要介绍了有限元模型化的一些问题，如网格收敛、完全积分、体积锁定、剪切锁定、一致缩减积分、沙漏模式，并给出了解决这些问题的基本思路。通过本章学习，读者可以掌握在 ANSYS 中解决有限元模型化的一些问题。

1.1 网格与收敛

用足够精密的网格以保证有限元模拟结果有足够的精度是非常重要的。粗网格会产生不精确的结果。随着网格密度的增加，分析所产生的数值结果会趋向一个收敛值，但是运行时间也会增加。当进一步细化网格使解答的变化可忽略不计时，就可以认为网格收敛了。

如果使用者有经验，可以判断何种细化水平将产生合适的网格，可给出可以接受的结果。然而，进行网格收敛实验是一个好的实践。可以用一个较细的网格来模拟同一问题，并比较计算结果，如果两种网格基本上给出相同的结果，那么可有信心地认为用较粗的模型，在节省计算时间的同时，也可以得到一个较精确的结果。

下面以连接环应力分析为例，连接环示意图如图 1-1 所示，采用四种不同的网格密度作比较分析。

在这个模型中考虑网格密度对三种特殊结果的影响：

- 1) 孔底部的位移；
- 2) 孔底部表面应力集中的 Von Mises (米赛斯) 应力峰值；
- 3) 连接环与固定物连接处的 Von

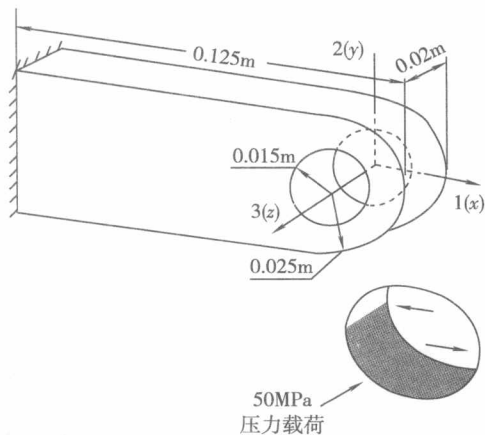


图 1-1 连接环示意图

Mises 应力峰值。

图 1-2 给出四种不同网格密度。

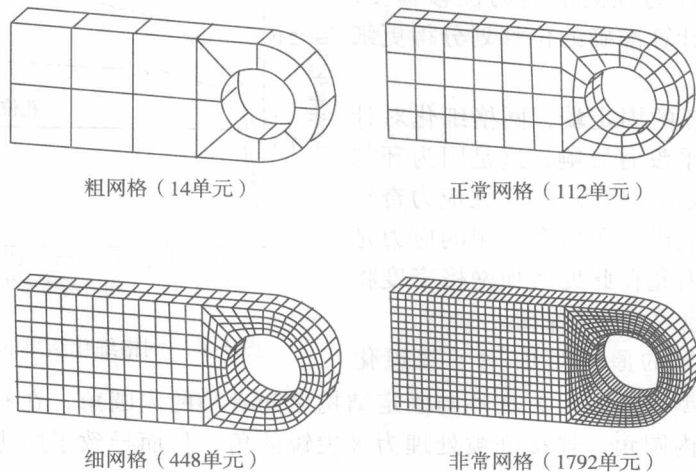


图 1-2 四种网格密度

表 1-1 给出四种不同网格计算结果比较，列出了每一项的分析结果及所需的 CPU 时间。

表 1-1 不同网格计算结果比较

网格	孔底部的位移/m	孔底部的应力/Pa	连接处的应力/Pa	相关的 CPU 时间/s
粗	2.01E-4	180. E6	205. E6	0.26
正常	3.13E-4	311. E6	365. E6	1.0
细	3.14E-4	332. E6	426. E6	2.7
很细	3.15E-4	345. E6	496. E6	22.5

图 1-3 给出 Von Mises 应力云图。

粗网格给出孔底部的位移是不准确的，正常、细和很细网格得到相近的结果。因此，正常网格对位移计算收敛速度是足够快的。

网格细化结果的收敛性如图 1-4 所示。所有的结果都以相对粗网格数值进行“无量纲化”来比较。

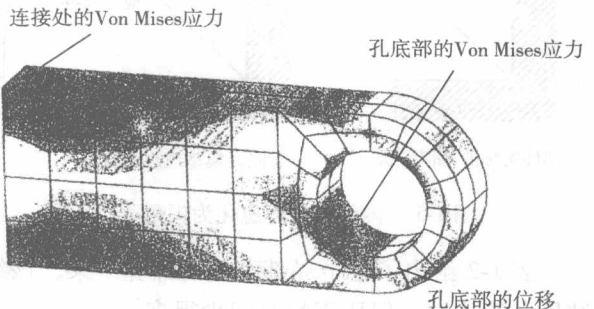


图 1-3 Von Mises 应力云图

孔底部的应力峰值比位移收敛慢得多,这是因为应力和应变是由位移梯度计算的。这样为预测准确的位移梯度,网格应该比计算准确的位移划分得更细才行。

在连接环的固定端,网格细化对计算的应力几乎没有影响,这是因为环与固定物连接处的“角点”存在应力奇异性。从理论上讲,在这个区域的应力是无限大的,因此在此处增加网格密度将不会产生一个收敛的应力结果。

产生奇异的原因是应用了理想化的有限元模型。实际上,在环与固定结构之间有小的内圆角,在有限元模型中忽略了这个内圆角,连接处被处理为极尖锐的角,从而导致了应力奇异。如果在这个位置要求精确的应力,部件之间的内角必须准确地构造出来,如图1-5所示。

一般在有限元模型中忽略一些小的细节,如圆角半径,目的是简化分析并保持模型尺寸较为合理。但是将任何尖角引入模型都将导致该处应力奇异。一般来说,对模型的总体响应没有太大影响,但在靠近奇异处所预测的应力将是不准确的。

对于所分析的结构全部采用均匀网格一般来说是不必要的,应该在高应力梯度区采用细网格,低应力梯度或对应力大小不感兴趣的地方应用粗网格,例如,图1-6所示的一种网格设计,可使孔底部应力集中的分析能够给出准确的预测。

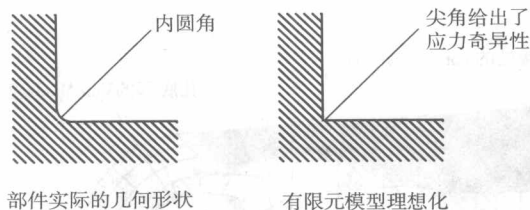


图1-5 内圆角被理想化为尖角

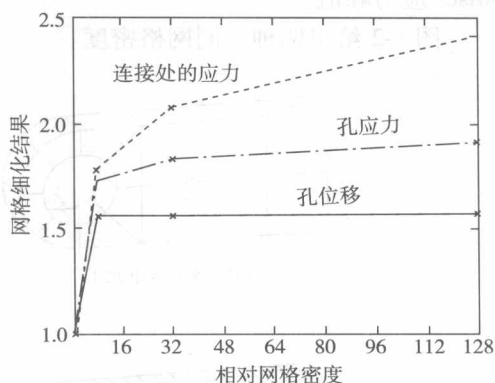


图1-4 网格细化结果的收敛性

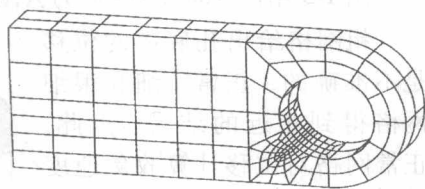


图1-6 孔周围网格细化

表1-2给出了这个局部细化的计算结果,该结果与整个模型用很细的网格计算结果是等价的,但所用的时间少得多。

通常可以用类似结构分析的经验来判断模型中的高应力区,即需要细分网格

的区域,也可以在开始时用粗网格判断高应力区,然后再在该区域进行网格细化,这可以使问题变得更简单一些。

表 1-2 网格划分很细时与局部细化的比较

网格	孔底部的位移/m	孔底部的应力/Pa	相关的 CPU 时间/s
很细	3.15E-4	345. E6	22. 5
局部细化	3.14E-4	346. E6	3. 44

ANSYS 还提供了子模型方法,先用整体粗网格分析,再取出感兴趣的局部区域进行细网格分析,粗网格分析得到的位移作为局部区域的边界条件,这一方法也称为有限元二次解析。

1.2 完全积分、体积锁定、剪切锁定

1.2.1 完全积分

完全积分是指当单元具有规则形状时,所用的高斯积分点可以对单元刚度矩阵中的多项式进行精确积分,图 1-7 所示为线性单元的高斯积分点。

线性单元如要完全积分,则在每一方向需要两个积分点。

- 1) 二维线性单元为 2×2 积分点;
- 2) 三维线性单元为 $2 \times 2 \times 2$ 积分点。

完全积分的低阶单元(线性单元)可能发生体积锁定和剪切锁定。

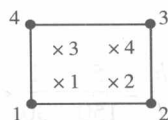


图 1-7 线性单元的高斯积分点

1.2.2 体积锁定

当材料特性几乎不可压缩(泊松比约为 0.5),并使用完全积分单元时可能发生体积锁定,如表 1-3 所示。不可压缩性一般出现于超弹性材料或塑性流动中。在单元中出现伪压应力,使单元对于不会引起任何体积变化的变形过于“刚硬”。

表 1-3 材料特性改变带来的体积锁定

泊松比 ν	理论解	Plane42 w/extra shape	Plane42 w/o extra
0	3. 75	3. 7745	3. 7236
0. 25	4. 4531	4. 4837	4. 4037
0. 3	4. 5825	4. 6143	4. 5227
0. 49	5. 0399	5. 0763	4. 1971
0. 499	5. 0602	5. 0968	1. 7
0. 499	5. 0623	5. 0989	0. 2441

体积锁定可出现于平面应变、轴对称和 3D 应力。对于平面应力不会发生体积锁定。

体积锁定实例：轴对称的厚壁圆筒的径向位移，如图 1-8 所示。发生体积锁定，计算结果则不可信。

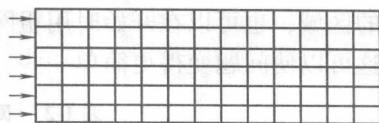


图 1-8 厚壁圆筒

如果怀疑存在体积锁定，可以细分网格或改变单元类型（用二次单元）。

1.2.3 剪切锁定

可以用悬臂梁受弯曲载荷的分析来说明什么是剪切锁定及其产生的原因。

图 1-9 所示为悬臂梁。

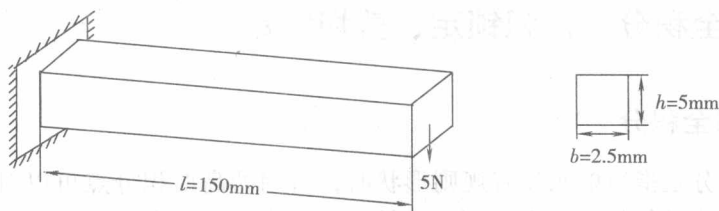


图 1-9 悬臂梁

$\frac{h}{l} = \frac{5}{150} = \frac{1}{30} < \frac{1}{15}$ 为细长梁可用 Beam4 单元计算

$$E = 70 \times 10^3 \text{ MPa}$$

$$I = \frac{2.5 \times 5^3}{12} = 26.042 \text{ mm}^4$$

$$\nu = 0.0$$

$$\delta_{\text{端}} = \frac{Pl^3}{3EI} = 3.09 \text{ mm (作为理论解)}$$

用几种不同网格密度并采用线性及二次的完全积分单元来计算，如图 1-10 所示。

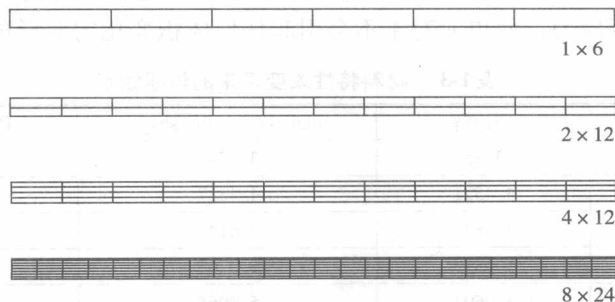


图 1-10 不同网格划分结果

计算结果与理论解的比值如表 1-4 所示。

表 1-4 不同单元划分所对应的网格尺寸

单 元	网格尺寸 (高 × 宽) /mm			
	1 × 6	2 × 12	4 × 12	8 × 24
2-D 4 节点	0.074	0.242	0.242	0.516
2-D 8 节点	0.994	1.000	1.000	1.000
3-D 8 节点	0.077	0.248	0.243	0.563
3-D 20 节点	0.994	1.000	1.000	1.000

剪切锁定使单元在弯曲时太硬，使用线性单元即使网格很密，结果也是不够准确的。剪切锁定的产生可作如下解释。

考虑一个受纯弯度的单元，如图 1-11 所示。

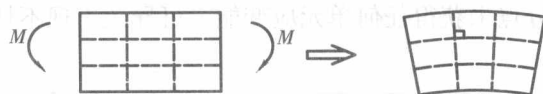


图 1-11 受纯弯度单元

线性单元的边不能弯曲，其变形如图 1-12 所示。



图 1-12 变形图

单元上面纤维长度增加 σ_{11} 拉伸，下面纤维长度缩短， σ_{11} 为负（压缩），垂直线长度没有改变（假设小位移），因此积分点上 $\sigma_{22} = 0$ ，但每一积分点上垂直线与水平线之间的尖角变形后已不是 90° ，说明剪应力 $\sigma_{12} \neq 0$ ，这与纯弯曲时剪应力为零不符。引起这一伪剪应力的原因是单元的边不能弯曲，这意味着应变能引起剪切变形而不是弯曲变形，所以挠度变小了，即单元太刚硬了。

剪切自锁只影响受弯载荷的完全积分线性单元，而这些单元受拉压或剪切载荷没有问题。

二次单元的边可弯曲，所以没有剪切锁定问题，结果与理论解一致。但是在复杂应力状态下，完全积分二次单元也可能有锁死现象，如果怀疑有此现象，应细心检查。

在模拟局部应力集中区域，完全积分单元是非常有用的。