



高等学校理工科规划教材

高等数学

(下册)

ADVANCED MATHEMATICS

史俊贤 ● 主编

3
2
12



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY TECHNOLOGY PRESS

高等学校理工科规划教材

高等数学

(下册)

ADVANCED MATHEMATICS

主 编 史俊贤

副主编 靖 新 李 扬 滕 勇

编 者 (按姓氏笔划)

石鸿雁 史俊贤 李 扬

靖 新 滕 勇



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY TECHNOLOGY PRESS

© 大连理工大学出版社 2006

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册) / 史俊贤主编. — 大连:大连理工大学出版社,
2006.2(2006.8重印)
ISBN 7-5611-2966-1

I. 高… II. 史… III. 高等数学—高等学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 082792 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm	印张:13.25	字数:300千字
2006年2月第1版	2006年8月第2次印刷	

责任编辑:刘新彦	于建辉	责任校对:欣宇
封面设计:张金		

定 价:44.00 元(上、下册)



序 言

随着精英教育向大众教育的转化,高等教育呈现出了多层次、多样性的特点。如何使培养的人才更加适应社会的需要,为高等教育,特别是基础教育提出了许多新的课题。

大众教育阶段的人才不同于精英型人才的特点,我们必须因材施教,建立针对他们的培养方式、培养目标和评价标准,简而言之,即一个不同于精英型教育的教育模式。

新起点系列教材以“联系实际,加强计算,注重应用,提高素质”为特色,在概念的引入上,力求自然,通过实例来阐述其直观背景和现实意义;在基本理论上,力求直观,通俗易懂,着眼于培养学生的分析问题、解决问题的能力;在基本技能的培养上,注重基本运算能力和方法的训练。

新起点系列教材的作者都是从事教学多年的一线教师,他们从切身的体会中,把这套教材用由浅入深,通俗易懂的语言进行了重新组织,使读者在学习中真正领悟到高等教育的思想内涵与巨大价值!在此衷心感谢各位作者的辛勤劳动!

愿本系列教材成为同学们学习道路上的一个新的起点,从此踏上成功人生。

如果您有任何建议或意见,请与我们联系,联系方式:

电话:0411-84707962

邮箱:jcjf@dutp.cn

大连理工大学出版社
科技教育出版中心
2006年2月



前言

本书分上、下两册。上册内容为一元函数微积分学,书末附有初等数学中的常用公式及积分表。下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数和常微分方程。

本书力图体现下列特点:

1. 对于概念、定理、公式,尽可能从直观背景出发,提出问题,分析问题,水到渠成地得出结论。

2. 本着宏观不动,微观调整的原则,对传统内容适当删减,适当调整知识体系。

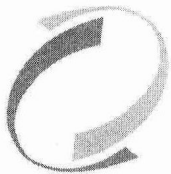
3. 各章节的例题和习题比较丰富,有利于打好基础,提高分析问题和解决问题的能力,并着重加强应用意识的培养。

本书的编写得到沈阳工业大学、沈阳建筑大学、沈阳化工学院的许多同行和朋友的大力支持,另外,书中引用了许多参考文献,在此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,难免有错漏不妥之处,恳请读者随时批评指正。

编者

2006年2月



目录

第7章 向量代数与空间解析几何 /1

7.1 空间直角坐标系 / 2

7.1.1 空间直角坐标系的建立 / 2

7.1.2 空间点的直角坐标 / 2

习题 7-1 / 3

7.2 向量及其运算 / 3

7.2.1 向量的概念 / 3

7.2.2 向量的加减法 / 4

7.2.3 数与向量的乘法 / 5

7.2.4 向量的坐标表示 / 6

7.2.5 向量的数量积 / 8

7.2.6 向量的向量积 / 9

习题 7-2 / 11

7.3 平面 / 12

7.3.1 平面的点法式方程 / 12

7.3.2 平面的一般式方程 / 13

7.3.3 两平面间的夹角 / 14

习题 7-3 / 15

7.4 空间直线 / 16

7.4.1 直线的点向式方程和参数式方程 / 16

7.4.2 直线的一般式方程 / 17

7.4.3 两直线的夹角 / 18

习题 7-4 / 18

7.5 二次曲面与空间曲线 / 19

7.5.1 二次曲面 / 19



7.5.2 空间曲线 / 22

习题 7-5 / 23

总习题 7 / 24

第 8 章 多元函数微分法及其应用 / 27

8.1 多元函数 二元函数的极限和连续性 / 28

8.1.1 多元函数的概念 / 28

8.1.2 二元函数的极限 / 31

8.1.3 二元函数的连续性 / 32

习题 8-1 / 33

8.2 偏导数 / 34

8.2.1 偏导数的概念 / 34

8.2.2 二元函数的偏导数的几何意义 / 36

8.2.3 高阶偏导数 / 36

习题 8-2 / 38

8.3 全微分 / 39

习题 8-3 / 41

8.4 多元函数的求导法则 / 42

8.4.1 多元复合函数的求导法则 / 42

8.4.2 隐函数的求导公式 / 46

习题 8-4 / 48

8.5 偏导数的应用 / 49

8.5.1 空间曲线的切线与法平面 / 49

8.5.2 曲面的切平面与法线 / 50

习题 8-5 / 52

8.6 方向导数与梯度 / 53

8.6.1 方向导数 / 53

8.6.2 梯度 / 54

习题 8-6 / 55

8.7 多元函数的极值 / 56

8.7.1 极值 / 56

8.7.2 最大值与最小值 / 58

8.7.3 条件极值 / 60

习题 8-7 / 62

总习题 8 / 63

第9章 多元函数积分学 / 65**9.1 二重积分的概念及性质 / 66**

9.1.1 二重积分的概念 / 66

9.1.2 二重积分的性质 / 67

习题 9-1 / 69

9.2 二重积分的计算 / 69

9.2.1 在直角坐标系下计算二重积分 / 70

9.2.2 在极坐标系下计算二重积分 / 75

习题 9-2 / 78

9.3 三重积分的计算 / 78

9.3.1 三重积分的概念 / 78

9.3.2 三重积分的计算 / 79

习题 9-3 / 83

9.4 重积分的应用 / 83

习题 9-4 / 88

9.5 对弧长的曲线积分 / 88

9.5.1 对弧长的曲线积分的概念与性质 / 88

9.5.2 对弧长的曲线积分的计算 / 90

习题 9-5 / 91

9.6 对坐标的曲线积分与格林公式 / 92

9.6.1 对坐标的曲线积分的概念 / 92

9.6.2 对坐标的曲线积分的计算 / 94

9.6.3 格林公式 / 96

9.6.4 平面上的曲线积分与路径无关的条件 / 99

习题 9-6 / 101

***9.7 曲面积分 / 102**

9.7.1 对面积的曲面积分 / 102

9.7.2 对坐标的曲面积分 / 104

9.7.3 两类曲面积分之间的关系 / 108

9.7.4 高斯公式 / 110

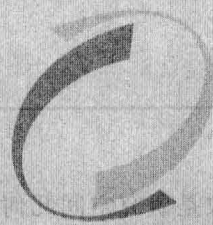
习题 9-7 / 111

总习题 9 / 111

第10章 无穷级数 / 115**10.1 常数项级数 / 116**

- 10.1.1 常数项级数的概念 / 116
- 10.1.2 级数收敛的必要条件 / 118
- 10.1.3 级数的基本性质 / 119
- 10.1.4 正项级数及其审敛法 / 121
- 10.1.5 交错级数及其审敛法 / 125
- 10.1.6 绝对收敛与条件收敛 / 127
- 习题 10-1 / 128
- 10.2 幂级数 / 129
 - 10.2.1 幂级数及其收敛性 / 130
 - 10.2.2 幂级数的运算 / 133
 - 习题 10-2 / 135
- 10.3 函数展开成幂级数 / 136
 - 10.3.1 泰勒级数 / 136
 - 10.3.2 函数展开成幂级数 / 137
 - *10.3.3 函数的幂级数展开式的应用 / 142
 - 习题 10-3 / 146
- 10.4 傅里叶级数 / 147
 - 10.4.1 三角级数与三角函数系的正交性 / 147
 - 10.4.2 周期为 2π 的函数展开成傅里叶级数 / 148
 - 10.4.3 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 / 152
 - 习题 10-4 / 156
- 总习题 10 / 156
- 第 11 章 微分方程 / 159
 - 11.1 微分方程的基本概念 / 160
 - 习题 11-1 / 163
 - 11.2 一阶微分方程 / 163
 - 11.2.1 可分离变量的方程 / 164
 - 11.2.2 一阶线性微分方程 / 167
 - 11.2.3 一阶微分方程的应用 / 170
 - 习题 11-2 / 172
 - 11.3 可降阶的高阶微分方程 / 173
 - 11.3.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型微分方程 / 173
 - 11.3.2 $y'' = f(x, y')$ 型微分方程 / 174
 - 11.3.3 $y'' = f(y, y')$ 型微分方程 / 175

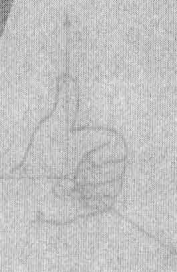
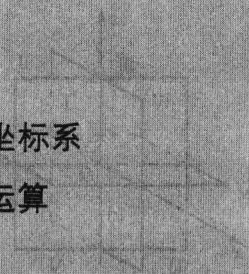
习题 11-3 / 176
11.4 二阶常系数线性齐次微分方程 / 177
11.4.1 二阶常系数线性齐次微分方程解的结构 / 177
11.4.2 二阶常系数线性齐次微分方程的通解 / 178
习题 11-4 / 181
11.5 二阶常系数线性非齐次微分方程 / 181
11.5.1 二阶常系数线性非齐次微分方程解的结构 / 182
11.5.2 二阶常系数线性非齐次微分方程的解法 / 182
习题 11-5 / 188
总习题 11 / 189
部分习题参考答案 / 191
参考文献 / 202

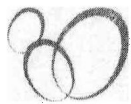


第7章

向量代数与空间解析几何

- 空间直角坐标系
- 向量及其运算
- 平面
- 空间直线
- 二次曲面与空间曲线





向量代数是研究空间几何图形的重要工具,是我们学习微积分的重要基础,它在工程技术上也有着广泛的应用.本章首先建立空间直角坐标系,引入向量的概念及其运算,并以此为工具研究空间的平面与直线.最后,介绍几种常见的空间曲面和曲线.

7.1 空间直角坐标系

7.1.1 空间直角坐标系的建立

过空间一个定点 O , 作三条互相垂直的数轴, 它们都以 O 为原点, 且一般具有相同的长度单位. 这三条轴分别叫做 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 统称为坐标轴. 它们的指向符合右手法则, 即以右手握住 z 轴, 当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向(图 7-1). 这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系, 点 O 叫做坐标原点. 习惯上 x 轴和 y 轴取水平位置, 而 z 轴铅直向上.

任意两个坐标轴可以确定一个平面, x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 面, y 轴和 z 轴所确定的平面称为 yOz 面, z 轴和 x 轴所确定的平面称为 zOx 面, 这三个平面统称为坐标面. 三个坐标面把空间分成八个部分, 每部分称为一个卦限(图 7-2). 以 x 轴正半轴、 y 轴正半轴、 z 轴正半轴为棱的卦限称为第 I 卦限, 在 xOy 面上方的其他三个卦限依逆时针方向依次称为第 II、III、IV 卦限, 在 xOy 平面下方与第 I、II、III、IV 卦限相对的依次为第 V、VI、VII、VIII 卦限(图 7-2).

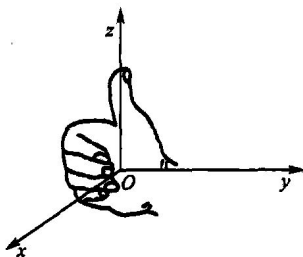


图 7-1

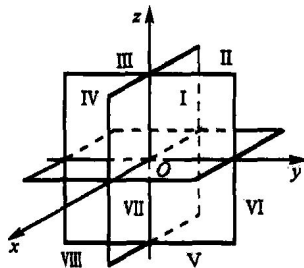


图 7-2

7.1.2 空间点的直角坐标

设 M 为空间一点, 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴, 它们与 x 轴、 y 轴和 z 轴的交点依次为 P 、 Q 、 R (图 7-3), 这三点在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x 、 y 、 z , 于是, 空间点 M 就惟一地确定一个有序数组 x 、 y 、 z .

反过来, 已知一个有序数组 x 、 y 、 z , 我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P , 在 y 轴上取

坐标为 y 的点 Q , 在 z 轴上取坐标为 z 的点 R , 然后, 通过点 P 、 Q 、 R 分别作 x 轴、 y 轴与 z 轴的垂直平面, 由这三个平面得到唯一的一个交点 M (图 7-3).

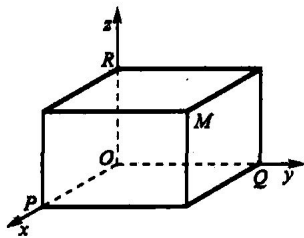


图 7-3

这样, 我们就建立了空间点 M 和有序数组 x, y, z 之间的一一对应关系, x, y, z 就叫做点 M 的坐标, 并依次称 x, y, z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为 x, y, z 的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$.

坐标面上和坐标轴上的点, 其坐标各有一定的特点. 如果点 M 在 xOy 面上, 其竖坐标 $z = 0$; 如果点 M 在 yOz 面上, 其横坐标 $x = 0$; 如果点 M 在 x 轴上, 则 $y = z = 0$; 如果点 M 为原点, 则 $x = y = z = 0$.

【例 7-1】 在直角坐标系中作出点 $M(2, 3, -1)$, 并作出点 M 关于 xOy 面, xOz 面的对称点.

解 点 $M(2, 3, -1)$ 关于 xOy 面的对称点为 $M_1(2, 3, 1)$, 点 $M(2, 3, -1)$ 关于 xOz 面的对称点为 $M_2(2, -3, -1)$, 作 M, M_1, M_2 (图 7-4).

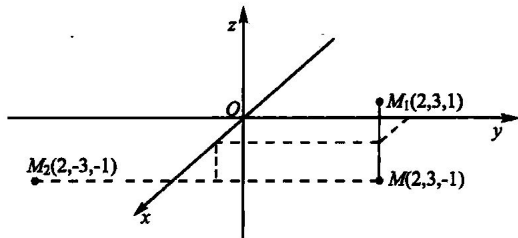


图 7-4

习 题 7-1

- 在空间直角坐标系中, 作出下列坐标点:
(1) $(4, 3, 5)$; (2) $(1, 2, -1)$; (3) $(4, 4, 4)$; (4) $(-4, -4, -4)$.
- 一立方体放置在 xOy 面上, 其底面中心与原点重合, 底面的顶点在 x 轴和 y 轴上, 已知立方体的边长为 a , 求其各顶点的坐标.
- 设某点与给定点 $(2, -3, 1)$ 分别对称于下列各轴, 求它们的坐标.
(1) x 轴; (2) y 轴; (3) z 轴.

7.2 向量及其运算

7.2.1 向量的概念

在物理学中, 常见的物理量有两种: 一种完全可以用数值来确定, 例如温度、时间、质



量等,这种量称为数量;另一种不仅有大小而且还有方向,例如力、速度、位移等,这种量称为向量(也称为矢量)。

在数学上,往往用一条有向线段来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.如以 M_1 为起点, M_2 为终点的向量,记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ (图 7-5),有时也用一个粗体字母或上面加箭头的字母来表示向量.例如,向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{F}$ 或 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{F}$ 等。

只研究向量的大小和方向,而不考虑它的起点位置的向量称为自由向量.在自由向量中,向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 相等是指它们大小相等,相互平行且指向相同,记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$,即经过平移后能完全重合的向量是相等的。

向量的大小叫做向量的模,向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 、 $\vec{a}$ 、 $\mathbf{a}$ 的模依次记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 、 $|\vec{a}|$ 、 $|\mathbf{a}|$.模等于 1 的向量叫做单位向量.模为零的向量叫做零向量,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$.零向量的方向是任意的,在直角坐标系中,如以坐标原点 O 为起点,向一点 M 引向量 $\overrightarrow{OM}$,这个向量叫做点 M 对于原点 O 的向径(图 7-6),通常用粗体字母 $\mathbf{r}$ 表示。



图 7-5

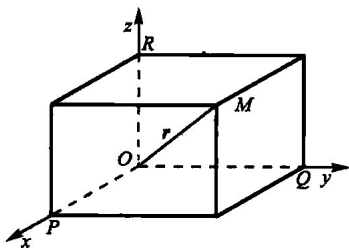


图 7-6

7.2.2 向量的加减法

定义 7.1

取一定点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. 以 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 为边作平行四边形 $OACB$ (图 7-7(a)), 其对角线 $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和, 记作 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. 这种方法称为向量加法的平行四边形法则。

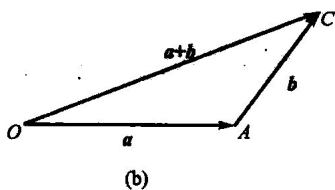
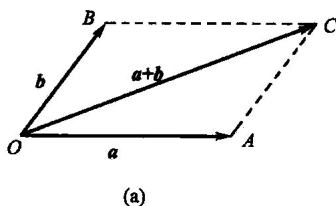


图 7-7

平行四边形的对边平行且相等,从图 7-7(a) 可以看出:我们还可以这样定义两个向

量的和:取一定点 O 作向量 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, 以 $\overrightarrow{OA}$ 的终点为起点作 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 连接 O, C 就得 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ (图 7-7(b)), 这种方法叫做向量加法的三角形法则.

三角形法则可以推广到任意有限个向量的和, 只需将前一向量的终点作为后一向量的起点, 相继作向量 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$, 再以第一个向量的起点为起点, 以最后一个向量的终点为终点作一向量, 这个向量即为所求的和.

向量的加法符合下列运算律:

(1) 交换律 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;

(2) 结合律 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

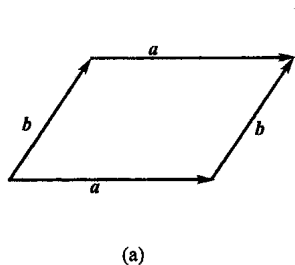
这两个规律从图 7-8(a)、图 7-8(b) 中很容易得知.

定义 7.2

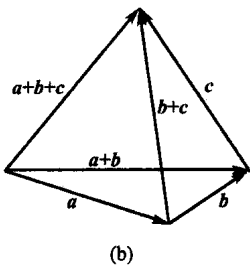
设 $\mathbf{a}$ 为一个向量, 与 $\mathbf{a}$ 模相同而方向相反的向量叫做 $\mathbf{a}$ 的负向量, 记作 $-\mathbf{a}$ (图 7-9).

由此我们规定两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的差:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$



(a)



(b)

图 7-8

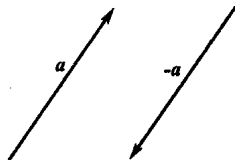


图 7-9

7.2.3 数与向量的乘法

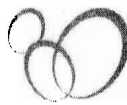
“一个力的三倍”表示力的方向不变, 而大小为原来的三倍, 据此我们定义数与向量的乘法 (简称数乘).

定义 7.3

设给定数 λ 与向量 $\mathbf{a}$, 数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 的乘积是一个向量, 记作 $\lambda\mathbf{a}$, 它的模为 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$. 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 的方向相同, 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 的方向相反 (图 7-10), 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$. 特别地, 当 $\lambda = -1$ 时, 有 $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$, 即得到 $\mathbf{a}$ 的负向量.

数与向量的乘法符合下列运算律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$;



(2) 分配律 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a; \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

由数与向量的乘法的定义可以得到两个重要结论:

(1) $a \parallel b$ 的充要条件是 $a = \lambda b$, 其中 λ 为某一非零常数;

(2) 若 $a \neq 0$, 则 $a = |a| a^0$, 或 $a^0 = \frac{a}{|a|}$, 其中 a^0 表示与 a 方向一致的单位向量.

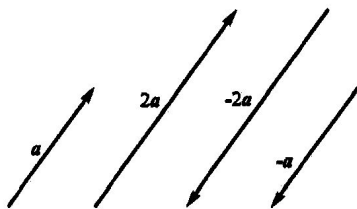


图 7-10

7.2.4 向量的坐标表示

我们已从几何的角度介绍了向量及其运算, 现在讨论向量的坐标表示法, 把向量的运算化为坐标的代数运算.

如图 7-11, $M(x, y, z)$ 为空间直角坐标系内一点, 连接 O, M 得 $\overrightarrow{OM}$, 称其为向径. 令 $a = \overrightarrow{OM}$, 过点 M 分别作垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的三个平面, 与坐标轴分别交于 $M_1(x, 0, 0)$ 、 $M_2(0, y, 0)$ 、 $M_3(0, 0, z)$, 向量 $\overrightarrow{OM_1}$ 、 $\overrightarrow{OM_2}$ 、 $\overrightarrow{OM_3}$ 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在坐标轴上的分向量. 由向量加法知

$$a = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

把沿 x 轴、 y 轴、 z 轴正向的三个单位向量称为空间直角坐标系的基本单位向量, 分别记作 i, j, k . 由数乘的定义知

$$\overrightarrow{OM_1} = xi, \overrightarrow{OM_2} = yj, \overrightarrow{OM_3} = zk,$$

于是

$$a = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk. \quad (7-1)$$

式(7-1)称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式, 有序数组 x, y, z 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标, 记作 $a = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$.

显然, 向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标与其终点的坐标是一致的, 基本单位向量 i, j, k 的坐标表示为

$$i = \{1, 0, 0\}, \quad j = \{0, 1, 0\}, \quad k = \{0, 0, 1\};$$

零向量的坐标表示为 $\{0, 0, 0\}$; 两个相等的向量坐标是相同的.

由向量的坐标表示, 可以把向量的运算转化为向量坐标之间的代数运算. 设 λ 是一个常数, 向量

$$a = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad b = \{b_x, b_y, b_z\},$$

则有

$$a = a_x i + a_y j + a_z k, \quad b = b_x i + b_y j + b_z k,$$

所以

$$a \pm b = (a_x i + a_y j + a_z k) \pm (b_x i + b_y j + b_z k)$$

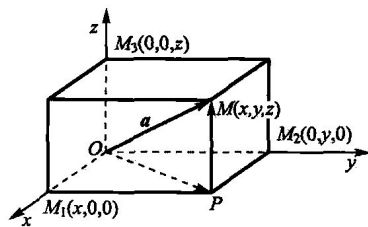


图 7-11

$$= (a_x \pm b_x)i + (a_y \pm b_y)j + (a_z \pm b_z)k;$$

$$\lambda a = \lambda(a_x i + a_y j + a_z k) = \lambda a_x i + \lambda a_y j + \lambda a_z k$$

$$\text{即 } \{a_x, a_y, a_z\} \pm \{b_x, b_y, b_z\} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\};$$

$$\lambda \{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

$a // b$ 的充要条件是 $a = \lambda b$, 故

$$\{a_x, a_y, a_z\} = \lambda \{b_x, b_y, b_z\} = \{\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z\},$$

从而得 $a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z$, 即

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (7-2)$$

式(7-2)说明两个向量平行的充要条件是它们的坐标对应成比例. 这里规定: 若分母中有零, 则对应的分子也为零.

【例 7-2】 已知点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 求向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标.

解 如图 7-12 所示, $\overrightarrow{OP_1} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overrightarrow{OP_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$. 由向量的减法, 有

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1},$$

所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} &= \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_1, y_1, z_1\} \\ &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \end{aligned}$$

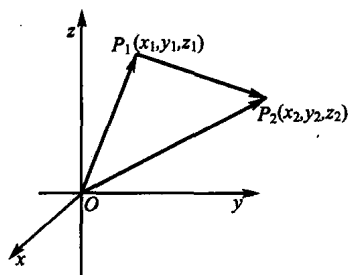


图 7-12

这说明向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标是其终点坐标与起点坐标之差.

已知 a 的坐标为 $\{a_x, a_y, a_z\}$, 怎样来表示 a 的大小和方向呢?

设点 $M(a_x, a_y, a_z)$, 则 $\overrightarrow{OM} = \{a_x, a_y, a_z\} = a$, $|\overrightarrow{OM}|$ 即是 a 的大小, 由图 7-13 及立体几何的知识, 得

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{M_1P}|^2 + |\overrightarrow{PM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2,$$

所以

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{|\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2},$$

即

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (7-3)$$

设非零向量 a 与三个坐标轴的正向夹角为 α, β, γ , 且规定 $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$, 则称 α, β, γ 为非零向量 a 的方向角. 它们的余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 a 的方向余弦, 由图 7-13 可知

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|a|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|a|}. \quad (7-4)$$

显然, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 又非零向量 a 的单位

向量 $a^0 = \frac{a}{|a|}$, 所以

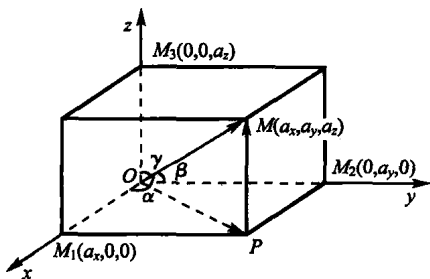


图 7-13