新起点

高等学校理工科规划教材

高等数学

（下册）

ADVANCED MATHEMATICS

史俊贤 主编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY TECHNOLOGY PRESS

高等学校理工科规划教材

高等数学

（下册）

ADVANCED MATHEMATICS

主　编　史俊贤
副主编　靖　新　李　扬　滕　勇
编　者　（按姓氏笔划）
石鸿雁　史俊贤　李　扬
靖　新　滕　勇

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册) / 史俊贤主编 . — 大连 :大连理工大学出版社,
2006. 2(2006. 8 重印)
ISBN 7-5611-2966-1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 史…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 082792 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:13.25　字数:300 千字
2006 年 2 月第 1 版　2006 年 8 月第 2 次印刷

责任编辑:刘新彦　于建辉　责任校对:欣　宇
封面设计:张　金

定　价:44.00 元(上、下册)

序言

随着精英教育向大众教育的转化，高等教育呈现出了多层面、多样性的特点。如何使培养的人才更加适应社会的需要，为高等教育，特别是基础教育提出了许多新的课题。

大众教育阶段的人才有不同于精英型人才的特点，我们必须因材施教，建立针对他们的培养方式、培养目标和评价标准，简而言之，即一个不同于精英型教育的教育模式。

新起点系列教材以“联系实际，加强计算，注重应用，提高素质”为特色，在概念的引入上，力求自然，通过实例来阐述其直观背景和现实意义；在基本理论上，力求直观，通俗易懂，着眼于培养学生的分析问题、解决问题的能力；在基本技能的培养上，注重基本运算能力和方法的训练。

新起点系列教材的作者都是从事教学多年的一线教师，他们从切身的体会中，把这套教材用由浅入深，通俗易懂的语言进行了重新组织，使读者在学习中真正领悟到高等教育的思想内涵与巨大价值！在此衷心感谢各位作者的辛勤劳动！

愿本系列教材成为同学们学习道路上的一个新的起点，从此踏上成功人生。

如果您有任何建议或意见，请与我们联系，联系方式：

电话：0411-84707962

邮箱：jcjf@dutp.cn

大连理工大学出版社

科技教育出版中心

2006年2月

前言

本书分上、下两册。上册内容为一元函数微积分学，书末附有初等数学中的常用公式及积分表。下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数和常微分方程。

本书力图体现下列特点：

1. 对于概念、定理、公式，尽可能从直观背景出发，提出问题，分析问题，水到渠成地得出结论。

2. 本着宏观不动，微观调整的原则，对传统内容适当删减，适当调整知识体系。

3. 各章节的例题和习题比较丰富，有利于打好基础，提高分析问题和解决问题的能力，并着重加强应用意识的培养。

本书的编写得到沈阳工业大学、沈阳建筑大学、沈阳化工学院的许多同行和朋友的大力支持，另外，书中引用了许多参考文献，在此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，难免有错漏不妥之处，恳请读者随时批评指正。

编者

2006年2月

目录

第7章

向量代数与空间解析几何

- 空间直角坐标系
- 向量及其运算
- 平面
- 空间直线
- 二次曲面与空间曲线

向量代数是研究空间几何图形的重要工具，是我们学习微积分的重要基础，它在工程技术上也有着广泛的应用. 本章首先建立空间直角坐标系，引入向量的概念及其运算，并以此为工具研究空间的平面与直线. 最后，介绍几种常见的空间曲面和曲线.

7.1 空间直角坐标系

7.1.1 空间直角坐标系的建立

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且一般具有相同的长度单位. 这三条轴分别叫做 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴. 它们的指向符合右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向（图 7-1）. 这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系，点 O 叫做坐标原点. 习惯上 x 轴和 y 轴取水平位置，而 z 轴铅直向上.

任意两个坐标轴可以确定一个平面，x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 面，y 轴和 z 轴所确定的平面称为 yOz 面，z 轴和 x 轴所确定的平面称为 zOx 面，这三个平面统称为坐标面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每部分称为一个卦限（图 7-2）. 以 x 轴正半轴、y 轴正半轴、z 轴正半轴为棱的卦限称为第Ⅰ卦限，在 xOy 面上方的其他三个卦限依逆时针方向依次称为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，在 xOy 平面下方与第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限相对的依次为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限（图 7-2）.

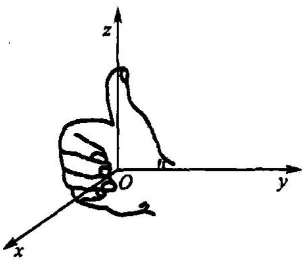

图 7-1

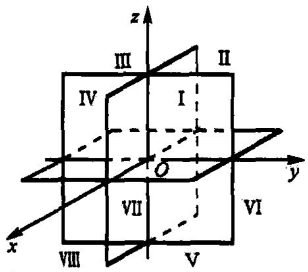

图 7-2

7.1.2 空间点的直角坐标

设 M 为空间一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，它们与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点依次为 P、Q、R（图 7-3），这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x、y、z，于是，空间点 M 就惟一地确定一个有序数组 x、y、z.

反过来，已知一个有序数组 x、y、z，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取

坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后，通过点 P、Q、R 分别作 x 轴、y 轴与 z 轴的垂直平面，由这三个平面得到惟一的一个交点 M(图 7-3).

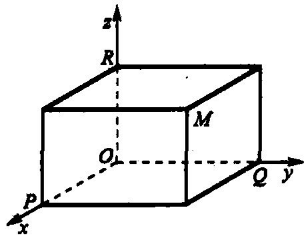

图 7-3

这样，我们就建立了空间点 M 和有序数组 x、y、z 之间的一一对应关系，x、y、z 就叫做点 M 的坐标，并依次称 x、y、z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为 x、y、z 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特点. 如果点 M 在 xOy 面上，其竖坐标 $z=0$；如果点 M 在 yOz 面上，其横坐标 $x=0$；如果点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$；如果点 M 为原点，则 $x=y=z=0$.

【例 7-1】 在直角坐标系中作出点 $M(2,3,-1)$，并作出点 M 关于 xOy 面，xOz 面的对称点.

解 点 $M(2,3,-1)$ 关于 xOy 面的对称点为 $M_1(2,3,1)$，点 $M(2,3,-1)$ 关于 xOz 面的对称点为 $M_2(2,-3,-1)$，作 M、M_1、M_2(图 7-4).

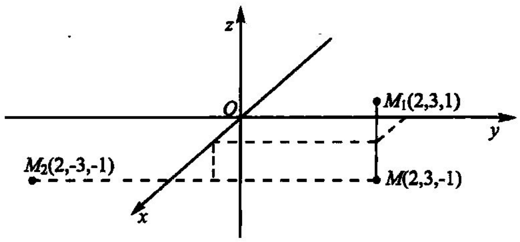

图 7-4

习题 7-1

1. 在空间直角坐标系中，作出下列坐标点：

(1)(4,3,5)；　(2)(1,2,−1)；　(3)(4,4,4)；　(4)(−4,−4,−4).

2. 一立方体放置在 xOy 面上，其底面中心与原点重合，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，已知立方体的边长为 a，求其各顶点的坐标.

3. 设某点与给定点 $(2,-3,1)$ 分别对称于下列各轴，求它们的坐标.

(1)x 轴；　(2)y 轴；　(3)z 轴.

7.2 向量及其运算

7.2.1 向量的概念

在物理学中，常见的物理量有两种：一种完全可以用数值来确定，例如温度、时间、质

量等，这种量称为数量；另一种不仅有大小而且还有方向，例如力、速度、位移等，这种量称为向量(也称为矢量).

在数学上，往往用一条有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 如以 M_1 为起点，M_2 为终点的向量，记为$\overrightarrow{M_1M_2}$(图 7-5)，有时也用一个粗体字母或上面加箭头的字母来表示向量. 例如，向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{F}$ 等.

只研究向量的大小和方向，而不考虑它的起点位置的向量称为自由向量. 在自由向量中，向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 相等是指它们大小相等，相互平行且指向相同，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，即经过平移后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫做向量的模，向量$\overrightarrow{M_1M_2}$、$\vec{a}$、$\boldsymbol{a}$ 的模依次记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$、$|\vec{a}|$、$|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 模为零的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的方向是任意的，在直角坐标系中，如以坐标原点 O 为起点，向一点 M 引向量$\overrightarrow{OM}$，这个向量叫做点 M 对于原点 O 的向径(图 7-6)，通常用粗体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示.

图 7-5

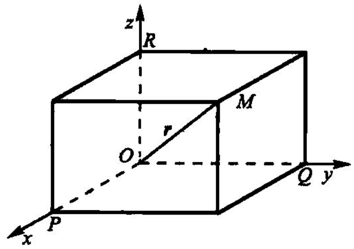

图 7-6

7.2.2 向量的加减法

定义 7.1

取一定点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 为边作平行四边形 $OACB$(图 7-7(a))，其对角线$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种方法称为向量加法的平行四边形法则.

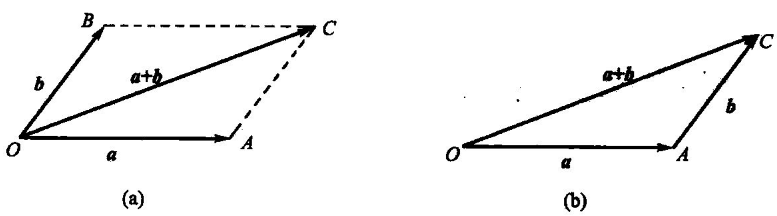

图 7-7

平行四边形的对边平行且相等，从图 7-7(a) 可以看出：我们还可以这样定义两个向

量的和:取一定点 O 作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,以$\overrightarrow{OA}$ 的终点为起点作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,连接 O、C 就得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$(图 7-7(b)),这种方法叫做向量加法的三角形法则.

三角形法则可以推广到任意有限个向量的和,只需将前一向量的终点作为后一向量的起点,相继作向量 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$、…、$\boldsymbol{A}_n$,再以第一个向量的起点为起点,以最后一个向量的终点为终点作一向量,这个向量即为所求的和.

向量的加法符合下列运算律:

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

这两个规律从图 7-8(a)、图 7-8(b) 中很容易得知.

定义 7.2

设 $\boldsymbol{a}$ 为一个向量,与 $\boldsymbol{a}$ 模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$(图 7-9).

由此我们规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

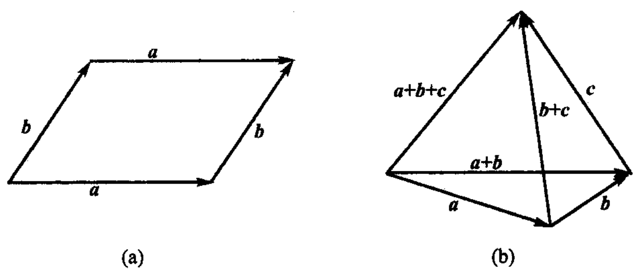

图 7-8

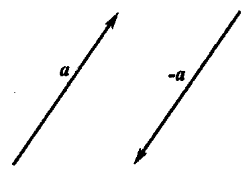

图 7-9

7.2.3　数与向量的乘法

"一个力的三倍"表示力的方向不变,而大小为原来的三倍,据此我们定义数与向量的乘法(简称数乘).

定义 7.3

设给定数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$,数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反(图 7-10),当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.特别地,当 $\lambda=-1$ 时,有 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$,即得到 $\boldsymbol{a}$ 的负向量.

数与向量的乘法符合下列运算律:

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

由数与向量的乘法的定义可以得到两个重要结论：

(1) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，其中 λ 为某一非零常数；

(2) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$，或 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，其中 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致的单位向量.

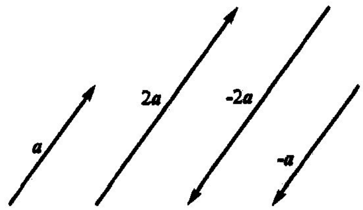

图 7-10

7.2.4　向量的坐标表示

我们已从几何的角度介绍了向量及其运算，现在讨论向量的坐标表示法，把向量的运算化为坐标的代数运算.

如图 7-11，$M(x,y,z)$ 为空间直角坐标系内一点，连接 O、M 得$\overrightarrow{OM}$，称其为向径. 令 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，与坐标轴分别交于 $M_1(x,0,0)$、$M_2(0,y,0)$、$M_3(0,0,z)$，向量$\overrightarrow{OM_1}$、$\overrightarrow{OM_2}$、$\overrightarrow{OM_3}$称为向量$\overrightarrow{OM}$ 在坐标轴上的分向量. 由向量加法知

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}.$$

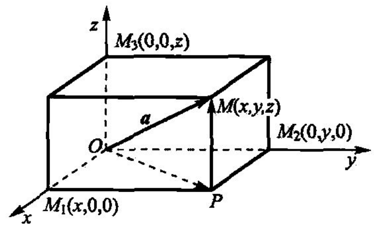

图 7-11

把沿 x 轴、y 轴、z 轴正向的三个单位向量称为空间直角坐标系的基本单位向量，分别记作 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$. 由数乘的定义知

$$\overrightarrow{OM_1}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OM_2}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OM_3}=z\boldsymbol{k},$$

于是

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \qquad (7\text{-}1)$$

式(7-1) 称为向量$\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式，有序数组 x、y、z 称为向量$\overrightarrow{OM}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$.

显然，向量$\overrightarrow{OM}$ 的坐标与其终点的坐标是一致的，基本单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的坐标表示为

$$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\},\quad \boldsymbol{j}=\{0,1,0\},\quad \boldsymbol{k}=\{0,0,1\};$$

零向量的坐标表示为$\{0,0,0\}$；两个相等的向量坐标是相同的.

由向量的坐标表示，可以把向量的运算转化为向量坐标之间的代数运算. 设 λ 是一个常数，向量

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\quad \boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\},$$

则有

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

所以

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$

$$= (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k};$$

$$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k}$$

即
$$\{a_x, a_y, a_z\} \pm \{b_x, b_y, b_z\} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\};$$
$$\lambda\{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$，故

$$\{a_x, a_y, a_z\} = \lambda\{b_x, b_y, b_z\} = \{\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z\},$$

从而得 $a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z$，即

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{7-2}$$

式(7-2)说明两个向量平行的充要条件是它们的坐标对应成比例. 这里规定：若分母中有零，则对应的分子也为零.

【例 7-2】 已知点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，求向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标.

解 如图 7-12 所示，$\overrightarrow{OP_1} = \{x_1, y_1, z_1\}$，$\overrightarrow{OP_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$. 由向量的减法，有

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1},$$

所以

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_1, y_1, z_1\}$$
$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

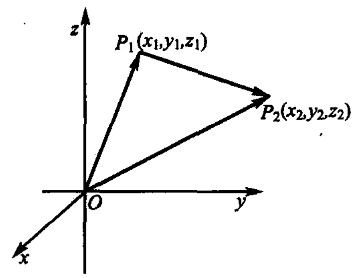

图 7-12

这说明向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标是其终点坐标与起点坐标之差.

已知 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $\{a_x, a_y, a_z\}$，怎样来表示 $\boldsymbol{a}$ 的大小和方向呢？

设点 $M(a_x, a_y, a_z)$，则 $\overrightarrow{OM} = \{a_x, a_y, z_z\} = \boldsymbol{a}$，$|\overrightarrow{OM}|$ 即是 $\boldsymbol{a}$ 的大小，由图 7-13 及立体几何的知识，得

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{M_1P}|^2 + |\overrightarrow{PM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2,$$

所以

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{|\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2},$$

即

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{7-3}$$

设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的正向夹角为 α、β、γ，且规定 $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant \pi$，则称 α、β、γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. 它们的余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，由图 7-13 可知

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{7-4}$$

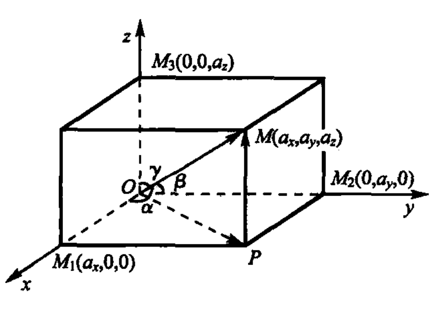

图 7-13

显然，$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$，又非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，所以