东北师範大學函授專修班教材

初等函數

朱靜航 編

東北師範大學函授教育處

1956年1月出版

初等函數

東北師範大學函授教育處出版

1956年1月

初 等 函 數

（本校教材 請勿翻印）

編　者：	朱　靜　航
出版者：	東北師範大學函授教育處
印刷者：	吉林省長春新生企業公司

1956年1月 初 版 1——1210

初 等 函 數

目　　錄

第一章 一 般 概 念

第二章 羃　函　數

第三章 指數函數及對數函數

第四章 三 角 函 數

第五章 逆三角函數

第六章 初等函數的研究

第七章 初等超越方程

第一章　一般概念

§1.1　引　　言

「初等函數」所要研究的函數，就整個來說，就是我們在中學數學裡所討論的那些函數的全體。那就是：中學代數和三角裡所包括的代數函數、冪函數、指數函數、對數函數、三角函數和逆三角函數及由之所組成的複合函數等。這些函數統稱爲**初等函數**。它們不但在實際應用上佔着重要的地位，而且在其他各種較複雜函數的研究上，也要廣泛地應用它們的性質。因此對於初等函數，我們要特別地、仔細地加以研究，並查明它們的某些性質；對於數學教育工作者來說，用初等方法仔細地研究初等函數的性質並熟練地運用，則更具有特殊重要的實際意義。

應該指出：我們所要研究的這些函數（初等函數），都是在科學的發展過程中，從各種各樣的函數中挑選出的一類最簡單最基本的函數。因之，爲了更好地研究和討論它們的性質，我們有必要從函數的一般概念討論起。

§1.2　函數的概念

1°.　常量和變量

當我們對自然現象進行 觀察和研究時， 經常要遇 到各種各樣的量，例如：時間、長度、重量、體積、熱容量、電子、原子價、溶解度等等。這些量都是隨着自然現象的存在、運動、變化和發展的進行過程，依不同的情況呈現着不同的狀態，有的不起變化而保持常值，有的則發生變化，忽而變大忽而變小，而取不同的數值。我們把前一種量稱爲**常量**，後一種量稱爲**變量**。

例如：在標準狀況下，氣體的克分子體積（是22.4升）；任一三角形的三內角的和（等於二直角或 180°)；任一圓的圓周長與直徑的

比值（等於 $\pi=3.14159\cdots$） 等等都是常量。而直角三角形的高與其斜邊的比，水的溫度，大氣壓力，火車速度等等，則又都是變量。

應該注意的是：自然界是受着普遍發展和變化的規律所支配，因之我們所遇到的量，絕大多數是變量。因為同是一個量，在某種條件下可能是常量，而在另一種條件下又是變量。例如：一個黑板的長度，看來好像是不變的量，而事實上它却隨着空氣的溫度和濕度的變化不斷地變化着，有時在增長、有時在縮短。又如：球的體積在半徑不變的條件下是常量，而在半徑變化的條件下，却又是變量。因此，數學為了更好地反映客觀實際，就把變量作為研究的主要對象。在初等數學裡如代數、幾何、三角等課目的某些場合討論它，在高等數學裡它更是不可缺少的研究對象。因之變量概念也是本科目的主要研究對象。

2°. 函數的概念

根據辯證唯物論的觀點，自然界的各種現象的形成，和現象間的結合，不但是複雜的、多種多樣的，而且在存在、運動、變化和發展的進行過程上，都是遵循着互相密切聯系，互相依賴、互相制約着的規律的。那就是說：任何一個現象，在變化的過程上，都不是孤立的。一方面它是由其他一系列的現象所决定；另一方面它也要引起一系列現象的變化和發展。我們所遇到的量（常量和變量），同樣也是遵循着這個規律而存在和變化着的。例如：圓的圓周長 C 與半徑 r；正方形的面積 A 與一邊之長 a；氣體的體積 V 與壓力 p 等等，其間都是存在着互相制約、關聯、依賴的變化規律的。這些變化規律用數學的語言，可以分別表現為：

$$C=2\pi r;\qquad A=a^2;\qquad V=\frac{k}{p}\ (k\text{是常數})；\text{等等。}$$

從這些變化規律裡，一方面我們可以明顯地看到研究函數的重要性。因為參與變化過程裡變化着的量，既然是不能彼此分裂地、彼此孤立地存在和發展，那末在研究它的過程上，就應該研究它們之間的相互關係——那種在實際上連繫着它們的依存關係。其中實際的量與

量之間的相互關係的數學表現，就是函數關係的概念。無論出於數學理論上的考慮，或出於實踐要求上的考慮，僅僅對個別的量進行研究是不能反映客觀實際的，因此我們都有必要經常地來研究變量與變量之間的函數關係。這就是在歷史上，爲什麽數學研究的主要內容，由研究數量進入到研究函數，以及爲什麽，現在我們要專門來研究初等函數的原因。

另一方面，我們可以由此給函數的概念下一個定義。事實上，從這些變化規律的數學表現裡，我們也淸楚地看到：對於（半徑）r 的每一個值，都有（圓周長）C 的一個確定的值與之對應；對於（正方形一邊之長）a 的每一個值，都有（面積）A 的一個確定的值與之對應；對於（氣體壓力）p 的每一個值，都有（體積）V 的一個確定的值與之對應；一般地講，當我們抽去所研究的量的具體意義，便可以得出函數的定義如下：

函數定義： 當對於變量 x 的每一個值，都有變量 y 的一個確定的值與之對應時，便稱 y 是 x 的函數。並用符號：$y=f(x)$，或 $y=\Phi(x)$，等等來表示，其中 x 稱爲**自變量**，y 稱爲**因變量或函數**，括弧外的字母代表函數和自變量間的依從關係，**或稱對應規律**。

應該注意的是：定義裡的“變量 x 的每一個值”，並不等於說是任何一個值，但究竟應該是那些值，在許多情形下，是要依據 x 與 y 的實際意義或所研究的問題之具體內容來决定的。例如：

函數 $y=x!$，祇有當 x 是正整數時才有意義，所以 x 只能考慮是**正整數**。

函數 $y=\sqrt{1-x}$，祇有當 $x\leq 1$ 時在實數域內才有意義，所以 x 只能考慮取 $x\leq 1$ 的值；而函數 $y=3x^2+4$，對於 x 的任意一個值都可以完全合理地確定出函數值，所以 x 可以取任意一個值。

這種根據對應規律，使所確定的函數 y 的值有意義的自變量 x 的值的集合 M，是很重要的。我們稱之爲**函數的定義域**，或**變量 x 的（允許）值集**，函數 y 的值所組成的集合 N，稱爲**函數值集或值域**。由此可見，在函數定義裡，是應該包含着集合概念的。現在我們得函數的一般定義如下：

函數的一般定義： 如果對於（自）變量 x 之屬於集合 M 的每一個值，都有（因）變量 y 的一個確定的值與之對應，則稱 y 是確定於集合 M 上關於 x 的一個函數（函數 y 的集合 N，通常並不指出，因爲對應規律本身，就已經確定了函數值的集合了）。

3°. 函數概念的更一般的定義

上述函數的一般定義，雖然是基於集合、集合的元素、兩集合元素間的對應等幾個最基本的概念，以建立起來的一般定義；而在近代數學中，由於數學更進一步的發展，不管這個定義是如何的一般化，但仍顯得非常狹隘。因爲依照這個定義，函數：

$$y=f(x)$$

祇不過是對於每一個數值（定義域內的變量 x 的值），以一個數值（對應的 y 值）與之對應而已。而在近代數學上，要求把函數概念，建立在更一般的觀點上。因爲具有極大價值的更一般的函數定義，所論的集合，應該是討論由不論怎樣性質的元素所組成的集合。

函數的更一般定義： 設有任意兩個集合 $M=\{x\}$ 與 $N=\{y\}$，它們的元素 x 和 y 可以是任意的事物，如果對於集合 M 的每一個元素 x，都有集合 N 的某一個元素 y 與之對應，那麼，就說 y 是定義於 M 上關於 x 的一個函數。寫成：

$$y=f(x)$$

其中集合 M 的元素 x，稱爲**變量的值**，集合 N 的對應元素 y，稱爲**函數的值**，集合 M 稱爲函數的**定義域或變量 x 的（允許）值集**，對應值 $y=f(x)$ 的集合 N，稱爲函數**值集或值域**。例如：

1. 設 M 是一個班裡的30個學生的集合，N 是各種成績（2—5分）的集合，考試的結果便確定一種對應規律。

2. 設 M 是已知圖書館內書的集合，而 N 是讀者的集合，對於某一本書，使所有讀過這本書的人與之對應。這個函數的定義域是圖書館內書的集合，自變量 x 是已知圖書館內的書，而函數值 y 是所有讀過 x 這本書的人的集合。

3. 平面上的每一點 x，可以使之對應一點 y，y 代表 x 在某一直

線上的正射影。此時平面上的點 x 是變量值，射影軸上的點 y 是函數值，對應律是 x 在直線上的正射影。函數的定義域是平面上所有點的集合，值域是整個射影軸。

4. 空間的每一個球 x，有點 y——球心——與之對應。此處球是變量值，空間點 y 是函數值。函數的定義域是空間所有球的集合，函數值域是整個空間。

5. 設 M 是所有正實數的集合，N 是平面上所有矩形的集合，對於每一個正實數 x，使面積爲 x 的矩形 y 與之對應。這裡自變量 x 是正實數，函數值 y 是所有那些面積等於 x 的矩形。這個例子裡對於每一個自變量 x 都對應着無限多個面積等於 x 的矩形。

定義： 如果（自）變量的值與函數值都是實數，即函數的定義域和值域都是某些實數集合，這樣的函數，便稱爲**實函數**。如果對於集合 M 中的每一個數，只有集合 N 中的一個數與之對應的**函數**，稱爲**單值函數**。今後我們主要研究單值實函數，而且是**連續函數**。

§ 1.3 函數的表示法

函數可以用各種方式來表示，而最重要的則是解析法、列表法和圖示法三種。

1°. 解 析 法

解析法又稱公式法，是數學上表示函數的優越而基本的方法。它是利用公式，或稱解析表達式來給出函數與自變量之間的對應規律的方法。從公式裡，可以明顯地表現出：自變量的值與常數之間，應該施行哪些運算（加、減、乘、除、乘方、開方、對數、求正弦、正切等等），和怎樣的運算順序，以求得對應的函數值。

反之，我們把按一定順序施行於變量的值與常數上的某些運算的整體，稱爲**解析表達式**或**公式**，利用解析表達式（公式）表示函數的方法稱爲**解析法**。

例如：公式 ① $y=\sqrt{(x-2)(x-3)(x-4)}$；

② $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}+\log_a(x-3)$，$a>0$；

③ $y=\sqrt{\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-4}}$；

④ 一般地是：$y=f(x)$，$a\leq x\leq b$，

都表示着 y 是 x 的函數。它們的定義域依次爲：〔2，3〕，$x\geqq 4$；(3，4)；〔2，3〕，$x>4$；〔a，b〕。如果把變量 x 的已知值代入右邊，並按公式所指出的運算和運算順序施行運算後，就可以求得其對應的 y 的值。

解析法對於確定函數關係起着很大的作用，尤其是在研究和計算上，解析表達式（公式）是簡單而合用的。無論在函數的研究上或在其實際運用上，解析法的確是一個極可貴的方法，歷史上在很長一個時期（十八世紀至部十九世紀初期），函數概念與表示函數的解析表達式是不可分割的。那時候，認爲函數一定要用公式來表示；同時還認爲解析法是建立具有任何性質的各種函數的最自然的方法。**伯努利**（1718年）和**尤拉**（1748年），對於函數所下的"運算"定義，就是把函數與公式等量齊觀的。**尤拉**曾提出了這樣的函數定義："變量的函數就是由這變量和數（或常量），用任何方法所構成的解析表達式"。到了十九世紀，在自然科學和其他科學發展的影響下，人們才認識到函數不一定要用公式來表達。而且事實上，自然界中許許多多的變量之間的函數關係，根本不可能用公式表示出來，或者雖有了公式，但是由於公式很複雜，就削弱了它的實用價值和意義。這樣，我們就沒有必要，一定要用公式來表達變量之間的函數關係。因此，列表法和圖示法，也就進一步有它的重要意義和作用。

這裡還應該指出的是：一個用公式來表達的函數，並不是假定函數一定要由一個公式來定義，十九世紀中葉，**狄里克萊**首先提出：函數可由不同的公式在其定義域的不同部分內來確定。例如：

1. 函數 $y=\begin{cases} x, & (\text{若 } x\geqslant 0) \\ -x, & (\text{若} x<0)\text{。} \end{cases}$

2. 函數 $y=f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & (\text{若} x\neq 0) \\ 2, & (\text{若 } x=0)\text{。} \end{cases}$

3. 函數 $y=f(x)=\begin{cases} -1-x^2 & (\text{當} x<0) \\ 0 & (\text{當} x=0) \\ 1+x^2 & (\text{當} x>0)\text{。} \end{cases}$

4. 函數 $y=f(x)=\begin{cases} x-1 & (\text{若} x>1) \\ \sqrt{1-x^2} & (\text{若} -1\leqslant x\leqslant 1) \\ -(x+1) & (\text{若} x<-1)\text{。} \end{cases}$

5. 函數 $y=f(x)=\begin{cases} 2 & (\text{若} x\leqslant -1) \\ 1-x & (\text{若} -1\leqslant x\leqslant 0) \\ 1+x & (\text{若} 0\leqslant x\leqslant 1) \\ 2 & (\text{若} x\geqslant 1)\text{。} \end{cases}$

2°. 列 表 法

這個方法在社會科學、自然科學、及工程技術上都經常應用。它是用表格表示函數與自變量之間的對應規律的方法。因爲在實用上，應用公式法，對於每一個情況，都要完成數目很多而且麻煩的計算，那就不如預先把自變量的值與其對應的函數值算出來，並列成一表，顯得簡單。例如：對於任一自然數，有它的因數的個數(也是自然數)與之對應。基於這個函數，可以列成下表，來指出這種對應關係：

$x=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,\cdots\cdots$

$y=1,2,2,3,2,4,2,4,3,4,2,6,2,4,\cdots\cdots$

從這個表裡，對於每個 x 的值如12，就可以直接找到對應的函數值是6，這就是列表法的便利處。

我們常用的平方表、立方表、對數表、三角函數表、雙曲線函數表、橢圓函數表、貝塞耳函數表等等，都是用列表法來表達函數的方法。

列表法的優越性不僅在於（使計算容易）便利，而且在於（用經驗方法），它可以把某個不易求得或沒有必要求得的解析表達式（公式）的函數關係表現出來。例如，我們在各種試驗工作中，總是把各次試驗的數據列成一表，從表上就可以明顯地看出：自變量與函數之值之間的對應關係。

例如：我們可以把歷年我國鋼的產量的發展情形列表如下（單位：噸）

1907年	1933年	1936年	1943年
8,500	25,000	400,000	900,000
1949年	1952年	1957年	
158,000	1,350,000	4,120,000	

從這個表裡，可以明顯地看出我國鋼的產量的發展情況（其中 1936 年與 1943 年的產量中的絕大部分，是在當時日本帝國主義侵佔下的東北生產的）。自 1949 年中華人民共和國成立以後，全國鋼的產量，就以飛躍的速度發展着。

不難看出，列表法實際上是表示兩個集合的元素之間的對應關係。至於其中函數的解析表達式，不但沒有必要而且也不容易求得。

3°. 圖 示 法

圖示法亦稱**幾何表示法**，也是科學上常用的方法之一，它是用幾何圖象來表達函數關係的。例如，我們可以把含有一個變量的函數，歸結為縱座標和橫座標之點之間的對應關係，從而得出表示函數關係的圖象。關於圖示法的基本原則，讀者已在解析幾何裡學過。現在只作一些簡單的補充和說明。

所謂已知函數 $y=f(x)$ 的圖象，就是座標 x 與 y 滿足關係式：$y=f(x)$ 之點的軌跡。自變量 x 的值和對應的函數 $y=f(x)$ 的值，構成一個**數對** (x, y)，並使這個數對和座標平面上座標為 (x, y) 的點相對應。所得點的全體，稱為表示已知函數 $f(x)$ 的**圖象**，等式 $y=f(x)$ 為它的**方程式**。當函數 $f(x)$ 不太複雜時，其圖象一般是平面上的一條比較簡單的曲線；反之，如果一個曲線，與垂直於橫軸的任何

線只相交於一點，則此曲線就幾何地表示出某一函數。因爲，對於 x 的每一個値，可以在橫軸上取橫座標爲 x 的 Q 點，並過 Q 點作垂直於橫軸的直線與曲線相交於 P 點，用 y 表示 PQ 的長，就有 y 的一個確定的値與之對應。根據函數的定義，可知 y 是 x 的函數。也就是說，每一條具有這種性質的曲線， 其縱座標總是橫座 標的函數。 由此可見，函數是可以由其圖象所確定的。

這種確定函數的方法，稱爲**圖示法或幾何表示法**。

圖示法不但在函數研究上提供了一個非常有用的工具，而且使曲線概念和函數概念有了密切的聯系。由函數的表示法可以產生了曲線——函數的圖象；由曲線的表示也產生了函數。

下列的圖 1.1—1.5，是分別表示 §1.3—1° 的例題 1 — 5 各個函數的圖象。

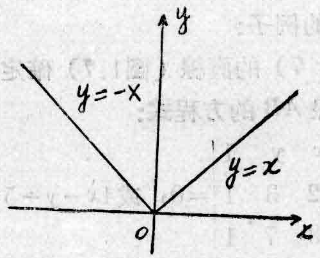

圖 1.1

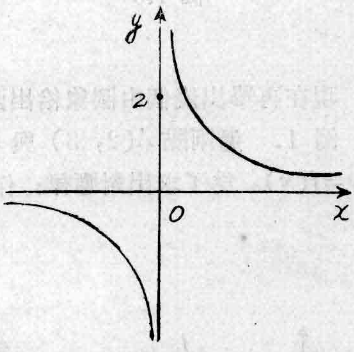

圖 1.2

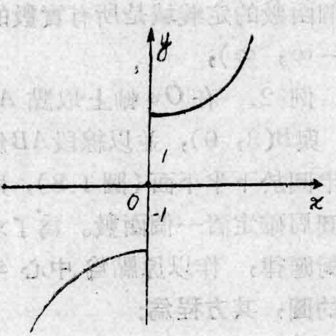

圖 1.3

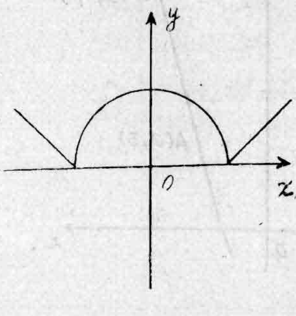

圖 1.4