

并联机器人

——建模、控制优化与应用

丛爽 尚伟伟 著

Parallel Robots—Modeling, Control Optimization and Applications



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

并联机器人

——建模、控制优化与应用

Parallel Robots

—Modeling, Control Optimization and Applications

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书以一个平面二自由度并联机器人为研究对象,系统地介绍了并联机器人的运动学标定、性能分析、动力学建模及控制策略设计等问题。基于运动学方程,从优化的角度对并联机器人运动学的部分参数和全部参数进行了自标定;利用线性矩阵不等式(LMI)方法,对并联机器人的运动学性能指标进行了分析和优化;在建立理论动力学模型的基础上,设计出动力学参数的实验辨识方法。从系统控制的角度出发,结合并联机器人的动力学特性,设计了包括增广非线性PD、计算力矩非线性PD,以及非线性自适应控制在内的多种非线性动力学控制策略,实现了并联机器人的高精度轨迹跟踪控制。采用同步运动控制理论,分别在关节空间和工作空间设计同步控制策略,进一步减小轨迹跟踪时的轮廓误差,从而实现了并联机器人的高速高精度运动控制。本书在阐述基本理论和所提方法的同时,基于实际并联机器人平台设计了大量的实验对理论和方法进行验证,并对实验步骤和实验结果进行了详细的分析。因此,本书既适用于并联机器人的理论研究,又适合指导并联机器人的工程应用。

本书既可作为机械工程、自动控制、计算机、信息科学、电子学等专业的研究生教材,也可作为从事并联机器人研究与应用的科研人员和工程技术人员的参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

并联机器人:建模、控制优化与应用/丛爽,尚伟伟著. —北京:电子工业出版社,2010.7
ISBN 978-7-121-11020-7

I. ①并… II. ①丛…②尚… III. ①机械控制 IV. ①TP24

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第105053号

策划编辑:董亚峰

责任编辑:侯丽平

印刷:北京市天竺颖华印刷厂

装订:三河市鑫金马印装有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开本:720×1000 1/16 印张:13.25 字数:260千字

印次:2010年7月第1次印刷

定 价:38.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

并联机器人，又称并联机构，由于其基座与末端执行器之间具有环状的闭链约束，使其具有运动惯量低、负载能力强、刚度大等优点，从而使得并联机器人逐渐成为机器人领域里的一个研究热点。几十年来，人们的主要精力大都放在并联机器人的机构学设计和运动学分析上。随着对并联机器人的控制性能要求的不断提高，仅通过机构学设计和运动学分析所得到的系统性能不再能够满足要求，这导致并联机器人动力学控制研究的需求。与机构学和运动学研究不同，动力学控制是在机构学设计和运动学分析完成之后，基于已经形成的系统动力学模型，从系统控制的角度，根据某种控制理论，通过外加控制信号，对系统的被控变量进行自动控制，来实现所期望的系统性能。系统动力学控制的最大优势在于：不需要增加或改变任何系统结构及硬件，仅在原系统已有的结构和硬件基础上，通过系统控制理论来设计出一套有效的控制策略，用软件即可实现提高原系统性能的目标。所以在对系统性能要求越来越高的今天，有关并联机器人控制的研究也具有更加重要的理论与实际应用的价值。

本书就是一本专门针对进一步提高并联机器人控制性能，从系统控制的角度来进行研究的专著。从机构学分析和运动学标定开始入手，标定出实际系统的运动学参数，以便建立准确的系统模型。在建立系统模型的过程中，不仅考虑运动学参数，还着重考虑影响系统动力学特性的动力学参数，甚至是非线性变化的参数，并通过合理的分析与设计，加上全局优化算法的运用，提出一套可以将系统的全部参数同时辨识出的方法。在控制策略方面，本书针对并联机器人自身所具有的特点，在人们常用的比例-微分（PD）控制器的基础上，设计出非线性 PD 控制器，解决了模型中非线性特性对系统性能的影响，尤其在消除非线性摩擦力对系统性能影响方面，专门对不同情况下的摩擦力参数进行辨识，并通过直接对其进行补偿与消除来达到进一步提高被控并联机器人的控制性能的目的。本书还对并联机器人进行了非线性自适应控制、主动关节的同步控制，以及基于轮廓误差的同步控制，分别从不同的角度，采用不同的方法来寻求不断提高系统性能的控制策略。本书中所提出的所有控制策略均给出了详细的分析与设计过程，以及相关的理论证明，并在实际系统上进行了实验，且对实验结果进行了对比分析。有效地解决了并联机器人中由机构本身参数的

不确定性、系统非线性及轨迹扰动等因素引起的对系统性能的影响，极大地提高了并联机器人的控制性能。

本书是经过多年对并联机器人的研究成果而集成的，其研究得到了国家自然科学基金（50375148，50905172），安徽省自然科学基金（090412040）的资助。实验研究中所用到的平面二自由度并联机器人是固高（深圳）科技有限公司生产的，所有实验也是在该公司里完成的，在此表示感谢。还要感谢的是参与本书中内容研究的张耀欣博士、冯春时博士和本科毕业生马翔。

由于作者水平有限，本书不妥与不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

丛爽，尚伟伟
2009年12月
于中国科学技术大学

目 录

第 1 章 概述	1
1.1 并联机器人的基本概念与发展历程	1
1.2 并联机器人的研究现状	6
1.2.1 机构设计理论	6
1.2.2 运动学求解与分析	7
1.2.3 运动学标定	12
1.2.4 动力学建模	13
1.2.5 控制器设计	15
1.2.6 摩擦力补偿	18
1.3 平面二自由度并联机器人	20
1.4 本书的主要内容	22
第 2 章 并联机器人运动学标定	25
2.1 平面二自由度并联机器人的标定问题	25
2.2 基于优化问题求解的平面二自由度并联机器人运动学标定	28
2.2.1 基于闭链约束方程的目标函数	28
2.2.2 标定步骤	31
2.2.3 仿真实验结果	32
2.3 基于两步迭代法的平面二自由度并联机器人运动学标定	39
2.3.1 误差模型分析	39
2.3.2 两步迭代标定法	42
2.3.3 仿真实验结果	44
2.4 基于跟踪误差投影的平面二自由度 并联机器人零点位置的标定	46
2.4.1 零点位置的标定问题	47



2.4.2	基于跟踪误差投影的目标函数	47
2.4.3	目标函数鲁棒性证明	51
2.4.4	实际实验标定结果	53
2.5	基于粒子群算法的平面二自由度并联机器人运动学自标定	55
2.5.1	基于粒子群算法的标定	55
2.5.2	标定实验及其结果分析	57
2.6	本章小结	59
第3章	并联机器人运动学性能分析	61
3.1	线性矩阵不等式 LMI 简介	61
3.1.1	LMI 的标准形式	61
3.1.2	三类 LMI 的基本问题	63
3.1.3	Schur 补定理	63
3.2	LMI 在并联机器人常见运动学性能指标设计中的应用	64
3.2.1	奇异性指标的 LMI 表达	64
3.2.2	工作空间性能指标的 LMI 表达	66
3.2.3	灵巧度性能指标的 LMI 表达	67
3.2.4	刚度性能指标的 LMI 表达	67
3.3	基于 LMI 的平面二自由度并联机器人参数优化设计	68
3.3.1	平面二自由度并联机器人	69
3.3.2	平面二自由度并联机器人奇异性指标的 LMI 表达	70
3.3.3	平面二自由度并联机器人灵巧度性能指标的 LMI 表达	73
3.3.4	平面二自由度并联机器人刚度性能指标的 LMI 表达	74
3.3.5	线性最优目标函数	75
3.3.6	参数优化设计结果	76
3.4	平面二自由度并联机器人的力矩传递性能分析	76
3.4.1	运动学位形	77
3.4.2	力矩传递性能图谱	80
3.5	本章小结	83
第4章	并联机器人动力学建模及性能分析	85
4.1	并联机器人的动力学建模	85
4.1.1	Lagrange 函数	86



4.1.2 Euler-Lagrange 方程	86
4.1.3 闭链约束方程	88
4.1.4 独立坐标选取	89
4.1.5 约束力消除	91
4.2 平面二自由度并联机器人的动力学建模	93
4.3 平面二自由度并联机器人的动力学性能分析	99
4.3.1 速度限制	99
4.3.2 加速度限制	100
4.3.3 并联机器人的 S 型速度规划	101
4.4 本章小结	105
第 5 章 并联机器人的典型控制策略	106
5.1 并联机器人的典型控制策略	106
5.1.1 PD 控制器	107
5.1.2 增广 PD 控制器	107
5.1.3 计算力矩控制器	108
5.2 并联机器人的最优控制器设计	109
5.3 平面二自由度并联机器人典型控制策略的仿真实验	111
5.4 本章小结	117
第 6 章 并联机器人的非线性 PD 控制及摩擦力补偿	118
6.1 非线性 PD 控制	118
6.1.1 非线性 PD 控制器的定义	119
6.1.2 非线性 PD 控制器的性能分析	120
6.2 平面二自由度并联机器人的增广 NPD 控制	122
6.2.1 增广 NPD 控制器设计	123
6.2.2 增广 NPD 控制的实际实验	126
6.3 平面二自由度并联机器人的计算力矩 NPD 控制	128
6.3.1 计算力矩 NPD 控制器设计	128
6.3.2 计算力矩 NPD 控制的实际实验	130
6.4 平面二自由度并联机器人的非线性摩擦力补偿	132
6.4.1 非线性摩擦力模型及其参数辨识	133
6.4.2 库仑+粘滞摩擦力模型及其参数辨识	136



6.4.3	摩擦力补偿的实际实验及其结果分析	137
6.5	本章小结	139
第7章	并联机器人的非线性自适应控制	141
7.1	平面二自由度并联机器人动力学模型的参数化形式	141
7.2	平面二自由度并联机器人的非线性自适应控制器设计	143
7.2.1	控制律设计	144
7.2.2	参数自适应律设计	145
7.2.3	系统稳定性分析	146
7.2.4	系统控制方案图	147
7.3	平面二自由度并联机器人的非线性自适应控制实验及结果分析	148
7.4	本章小结	152
第8章	并联机器人的同步控制	153
8.1	平面二自由度并联机器人的主动关节同步控制	154
8.1.1	基于主动关节的动力学模型形式	154
8.1.2	主动关节同步控制器设计	158
8.1.3	主动关节同步控制的轨迹跟踪实验	162
8.2	平面二自由度并联机器人的工作空间同步控制	168
8.2.1	同步误差的定义	169
8.2.2	工作空间的同步控制器设计	170
8.2.3	主动关节同步控制与工作空间同步控制的对比实验	173
8.3	本章小结	176
	参考文献	178

第1章 概 述

机器人技术的发展与应用极大地改变了人类的生产和生活方式。利用机器人不仅能够迅速而准确地完成枯燥的重复性工作，而且能够在危险、恶劣环境下安全可靠地完成许多复杂操作，可以大大减轻人们的劳动强度，提高劳动生产率，改善产品质量。作为一种具有闭链结构的先进机器人，并联机器人在机构学上具有运动惯量低、负载能力强、刚度大等优点，这恰恰弥补了传统工业机器人在这些方面的不足，使得并联机器人成为一个潜在的高速度、高精度运动平台。近 30 年来，研究人员在并联机器人的机构设计、运动学求解与分析、运动学标定、动力学与控制等方面做了大量的研究工作，并联机器人也逐渐成为机器人领域的研究与应用热点。

1.1 并联机器人的基本概念与发展历程

传统机器人一般采用开链式结构，其基座和末端执行器之间只有一条运动链连接，对于具有这样结构的机器人，也称其为串联机器人。为了实现末端执行器在工作空间中多个自由度的灵巧操作，串联机器人的运动链往往具有多个关节，通过控制各个关节的运动，可以实现末端执行器对工作空间中任意连续轨迹的跟踪运动。一般而言，串联机器人具有结构简单、工作空间大、操作灵活、正向运动学求解简便等优点，因此在工业生产中得到了广泛的应用。但是由于所有关节都集中在一条运动链上，串联机器人存在关节误差累积效应，末端执行器所能达到的位置精度往往有限，而较低的末端执行器刚度和负载驱动能力进一步限制了串联机器人在实际应用中的性能。当在实际应用中需要机器人有高的承载能力、良好的动力学性能及高精度等要求时，人们迫切需要有另外一种机械结构形式的机器人可供选择。在日常生活



中,当人们需要移动一个很重的箱子时,习惯用两个手臂或由多个人用多条手臂同时推动箱子,这种多个手臂并行工作的概念应用到机器人的机械结构上就产生了并联机器人。与只有一条运动链的串联机器人不同,并联机器人的基座和末端执行器之间具有两条或两条以上的运动链,图 1.1 所示为并联机器人的典型结构图。通常也将这种具有多运动链结构机械装置的并联机器人称为并联机构,本书中将不特别区分并联机器人和并联机构这两个名词。

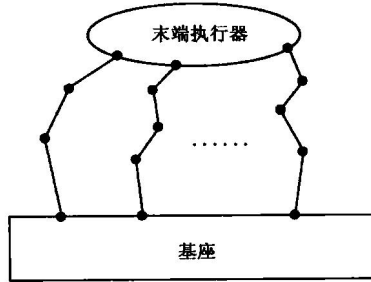


图 1.1 并联机器人的典型结构图

由于具有多条运动链,并联机器人的基座和末端执行器之间具有环状的闭链约束。与串联机器人相比,具有闭链约束是并联机器人在结构方面最大的特点。从机构学上看,多条运动链同时操作末端执行器,不仅抵消了关节误差累积效应,而且使得并联机器人具有运动惯量低、负载能力强、刚度大等优点,这恰恰弥补了串联机器人在这些方面的不足,使得并联机器人成为一个潜在的高速度、高精度运动平台。

并联机器人机构的出现始于 20 世纪 30 年代。Gwinnett 在其专利中提出了一种基于并联机构的娱乐装置,如图 1.2 所示,这个运动平台实际上是一个球形并联机构。1940 年, Pollard 在其专利中提出了一种用于汽车喷漆的装置,如图 1.3 所示。这套装置采用了一个包括三条运动链的并联机构来控制油漆喷头的位置和姿态。1962 年, Gough 发明了一种基于并联机构的六自由度轮胎检测装置,如图 1.4 所示。Gough 所设计的并联机构拥有上下两个平台,其中下面的平台是固定的,称为静平台,上面的平台是可以运动的,称为动平台。上下平台之间通过六条运动链相连接,在这六条运动链的协调操作下,动平台在工作空间内具有六个运动自由度。Stewart 首次对 Gough 发明的这种机构进行了机构学意义上的研究,并将其应用于飞行模拟器,如图 1.5 所示。由于 Stewart 在 1965 年发表的学术论文,学术界开始注意到并联机构所具备的潜在优势和广泛的应用前景,因此越来越多的研究人员开始从事并联机构方面的研



究工作，使并联机构从此成为学术界关注的一个热点。为了纪念 Gough 和 Stewart 的贡献，人们通常称六自由度并联机构为“Gough 平台”或“Stewart 平台”。

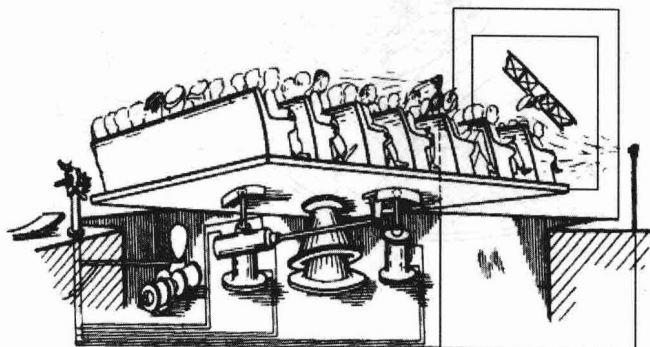


图 1.2 Gwinnett 的娱乐并联机构

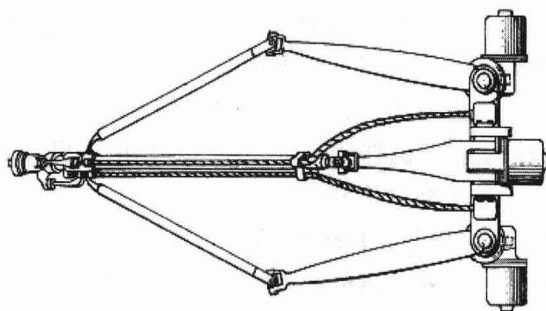


图 1.3 Pollard 的汽车喷漆并联机构

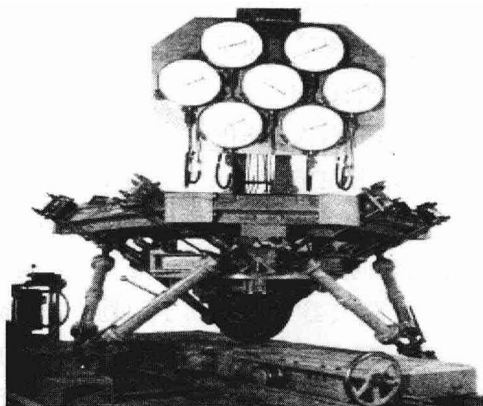


图 1.4 Gough 的轮胎检测装置

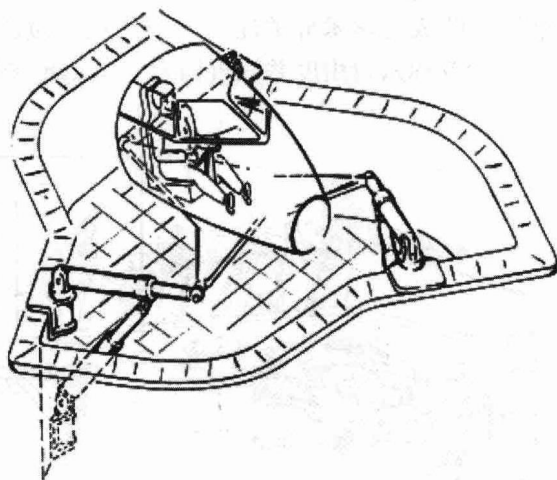


图 1.5 Stewart 的六自由度飞行模拟器

从 20 世纪 60 年代到 70 年代初期,人们主要将并联机构应用于飞行模拟器和运动模拟装置的设计与建造中,并取得了一系列的研究成果。70 年代后期,人们开始将并联机构应用到机器人的设计中。1978 年,澳大利亚的 Hunt 首次提出把并联机构用于机器人,从而开创了并联机器人的研究工作。1979 年,McCallion 等人将并联机构用于装配机器人的设计,制造了第一台真正的并联机器人。1980 年,Fichter 和 McDowell 设计了一种基于 Stewart 平台的并联机器人,并研究了该机器人的反向运动学问题。1981 年,法国人 Lande 和 David 取得了一项关于并联机械手的发明专利。从 20 世纪 80 年代开始,随着各种不同结构并联机器人的诞生及并联机器人应用范围的不断扩大,并联机器人的相关研究获得了长足的发展。Orin 等人使用线性规划的方法研究了并联机器人负载平衡优化的问题。Earl 等人提出了一个“并联度”指标,并研究了多种不同并联机器人结构的“并联度”。Hunt 研究了并联机器人自由度的计算方法,并指出在某些特殊位形下,并联机器人将会获得额外的自由度,并导致奇异性现象的发生。Rooney 等人利用数值方法求解了一个平面并联机器人正向运动学问题,并详细列举了所有可能的构型。Yang 等人研究了六自由度 Stewart 并联机器人的运动学问题。Mohamed 等人研究了并联机器人末端执行器运动速度和输入关节运动速度之间的关系,并且指出这两者之间速度关系的表达式可以用于研究并联机器人的奇异性。Ting 等人对五连杆机构的可动性进行了分类研究。Fichter 研究了一种较为特殊的 Stewart



平台的运动学问题,以及末端执行器和输入关节之间的力传递关系。Sugimoto 使用旋量代数对并联机器人动力学建模问题进行了研究。Behi 研究了一个新型的 3-PRPS 并联机器人,并给出了其反向运动学问题的解析解和正向运动学问题的数值解。Do 和 Yang 使用 Newton-Euler 方法,对并联机器人的动力学建模问题进行了研究。Lee 和 Shah 研究了一个三自由度并联机器人的运动学关系和动力学特性。Merlet 对力反馈方法在并联机器人中的应用进行了研究,并且采用力反馈方法来提高并联机器人在装配过程中的性能。1991 年,燕山大学的黄真教授研制出了我国第一台六自由度并联机器人。从 20 世纪 90 年代初开始,并联机器人引起了科研人员的广泛注意并迅速成为国际研究的热点。1997 年,黄真等人出版了我国第一部关于并联机器人理论与技术的专著。2000 年,法国的 Merlet 完成了第一本有关并联机器人的英文著作,2006 年,又对该书进行了修订再版。

目前,并联机器人已经被广泛应用于生产装配、物料搬运、精密测量、精密定位、力传感器、医疗器械、运动模拟等多个领域。针对各种不同的应用,许多家公司推出了自己的并联机器人产品,例如,FANUC 公司生产的可用于生产装配的 F200i 并联机器人,ABB 公司生产的可用于物料搬运的 IRB340 机器人,Adept 公司生产的可用于物料搬运的 Adept Quattro 并联机器人,Decoration Technology 公司生产的可用于机械加工的 COPRA 并联机器人,Physik Instrumente 公司生产的可用于精密测量的 F206 并联机器人和可用于医疗器械的 M850 并联机器人,ALIO 公司生产的可用于精密定位操作的 AI—HEX 系列及 AI—TRI—HEX 系列并联机器人,Moog FCS 公司生产的可用于运动模拟平台的 E—Cue 系列并联机器人,固高(深圳)科技有限公司生产的可用于物料搬运和教学设备的 GM 系列并联机器人。随着科学技术的进步,并联机器人的应用范围还在不断扩大,其对人类工业生产和日常生活的影响也将越来越深刻。

由于拥有多条运动链,并联机器人的结构要比传统的串联机器人更为复杂,这使得并联机器人的设计非常困难,而多条运动链对末端执行器位姿的协调操作,更是给并联机器人的运动控制提出了挑战。近 30 年来,研究人员在并联机器人的设计、标定、运动学、动力学及控制等方面做了大量的研究工作,而并联机器人也逐渐成为机器人领域的一个研究热点。



1.2 并联机器人的研究现状

由于在机械机构上存在多条运动链，并联机器人的性能分析与运动控制和传统的串联机器人有着本质的区别。一方面，由于采用多个运动链，并联机器人的运动学求解非常复杂，要在工作空间中进行奇异性、力矩传递性等性能分析就更加困难。另一方面，多条运动链产生的闭链约束使得并联机器人动力学的非线性程度加大，从而使得并联机器人的动力学控制和摩擦力补偿问题更加复杂。本节将从机构设计理论、运动学求解、奇异性分析、运动学性能分析、标定方法、动力学建模、控制器设计、摩擦力补偿等方面分别来介绍并联机器人的研究现状。

1.2.1 机构设计理论

并联机器人的机构设计从根本上决定了并联机器人的性能。在并联机器人发展的过程中，有许多具有优异性能的并联机器人被设计出来。1988年，Clavel发明了DELTA机器人，其末端执行器加速度能够达到 500m/s^2 ，可以用于物料的快速搬运。Gosselin等人设计的Agile Eye并联机器人可用于摄像机方向定位，其末端执行器最高转动角速度可达到 $1000(^{\circ})/\text{s}$ ，最高角加速度可达到 $20\,000(^{\circ})/\text{s}^2$ ，而且其所具备的高刚度特性，保证了末端执行器可以实现高精度的轨迹跟踪控制。天津大学的黄田教授等人设计了一种平面DELTA并联机器人，并于2006年获得了美国专利授权，该并联机器人末端执行器的最高运动速度达 4.5m/s ，每分钟可完成120次抓取动作，可用于完成流水线上的快速分拣任务。

在实际应用中，有很多任务需要四自由度和五自由度的并联机器人来完成，而早期所设计的并联机器人大部分都是三自由度或六自由度，不能够很好地满足实际需要。近年来，国内外学者在对三自由度和六自由度并联机器人的设计方法进行研究的同时，对四自由度和五自由度并联机器人的设计方法进行了深入研究，不仅提出了多种四自由度和五自由度并联机器人，而且给出了多种系统设计方法，这给并联机器人机构设计理论的进一步研究打下了坚实基础。此外，利用新型的柔索驱动方式，一系列新型的柔索驱动并联



机器人也被设计出来。由于柔索驱动方式只能提供一个方向上的拉力而不能提供另一方向的作用力，因此如何设计柔索驱动并联机器人成为并联机器人机构设计领域中一个新的研究发展方向。

由多条运动链构成的机械结构使得并联机器人具有先天的高刚度性能优势，但是由此引入的闭链约束同时也限制了并联机器人工作空间的大小，因此在设计时需要综合考虑并联机器人的各项性能指标以获得满意的结果。目前在并联机器人设计过程中常选用的性能指标包括刚度指标、灵巧度指标、工作空间范围、末端执行器误差等。此外，通过在设计过程中考虑并联机器人的运动学特性和动力学特性，一些具有特殊性质的并联机器人也被设计出来，例如，末端执行器各向运动解耦的并联机器人，末端执行器可变形的并联机器人，无反作用的并联机器人。

在并联机器人的几何参数设计过程中，因为并联机器人的实际性能对于各个部件几何参数十分敏感，而并联机器人的结构往往非常复杂，设计过程中所涉及的参数很多，因此并联机器人几何参数的优化设计往往比较困难。为了解决并联机器人参数优化的问题，各种参数优化方法也被应用到并联机器人的设计中来，以获得理想的参数设计结果。

1.2.2 运动学求解与分析

1. 运动学求解

并联机器人的运动学关系是指并联机器人关节坐标和末端执行器坐标之间的函数对应关系，而所谓并联机器人运动学问题的求解，就是求解并联机器人关节坐标和末端执行器坐标之间的函数对应关系。根据求解方向的不同，并联机器人运动学问题可以分为两个子问题：正向运动学问题和反向运动学问题。正向运动学问题是指在并联机器人关节坐标已知的情况下求解所对应的末端执行器坐标，即并联机器人末端执行器在工作空间中的位置和姿态；反向运动学问题是指在并联机器人末端执行器坐标已知的情况下求解所对应的关节坐标。

对于并联机器人来说，由于闭链约束的存在，其反向运动学问题的求解较为容易，往往可以得到一个解析表达式来统一描述反向运动学关系，而正向运动学问题的求解较为困难，在给定一组关节坐标后，往往有多组可能的末端执行器坐标与之对应，并且难以得到解析解。并联机器人运动学问题求



解的这一特点，和传统的串联机器人恰好相反，这种运动学问题求解上的差异通常被称为并联机器人和串联机器人的运动学“对偶关系”。

在并联机器人的运动学求解研究领域中，人们更多的是研究正向运动学问题的求解，其中最典型的的就是 Stewart 平台的正向运动学问题求解。20 世纪 90 年代开始，机构学领域的研究人员从数值求解和解析求解两个方向对并联机器人的正向运动学问题的求解展开了大量研究，并取得了一系列进展。

数值求解方法的数学模型简单，可以用于任意并联机器人的正向运动学求解，但是不能求得所有的解。Innocenti 等人将正向运动学问题简化为三个方程组的求解，通过三维搜索得到了全部的实数解。为了简化搜索过程，Innocenti 等人也提出了找到所有实数解的一维搜索算法。Dasgupta 等人提出了预测校正算法，这一方法使用三维搜索法从纯几何角度求解实数解。上述求解并联机器人正向运动学问题的数值方法仅能够寻找实数解，不能用于预测所有解的个数，为了获得所有的解，必须在复数域内确定方程的解。Raghavan 提出了实现这一目标最成功的数值解法，他以多边形系统形式给出了表达式，在复数域内找到了 40 个解，他得出了“通用型 Stewart 平台正向运动学解个数的上限是 40”这一结论。Merlet 对数值算法求解正向运动学时的计算效率进行了研究。随后，Husty、Wampler、Didrit 等学者提出了多种方法来求解 Stewart 平台的正向运动学问题。考虑到传统数值方法计算效率低的问题，一些人工智能的方法也被用于正向运动学问题的求解，与传统的数值方法相比，智能方法能够大大减少迭代次数，缩短求解时间。Gao 等人则对更广泛意义上的 Stewart 平台进行了分类研究，证明一共有 3850 种不同结构的 Stewart 平台，并且给出了各种 Stewart 平台正向运动学解个数的上限。

解析法能够求得全部的解，输入/输出的误差效应可以定量地表示出来，并且可以避免奇异问题，在理论和应用上都有重要的意义。对于一些结构简单或构型特殊的并联机器人，比较容易得到其正向运动学问题的解析解。对于结构较为复杂的并联机器人，正向运动学问题的解析求解通常采用从特殊构型到一般构型的思路进行，Dasgupta 等人总结了三种具体的求解方法。第一种方法是基于球面四自由度并联机器人输入/输出方程进行求解的，这种方法最初用来求解三自由度并联机器人的正向运动学，后来又拓展到更高自由度的并联机器人。第二种方法是先去掉 Stewart 平台的上平台，然后确定连杆与上平台相交点的轨迹，最后使用上平台的轮廓作为约束条件，推导出正