● 国家出版基金资助项目

中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

华罗庚文集

代数卷 I

华罗庚 万哲先 / 著

万哲先 / 审校

科学出版社

www.sciencep.com

国家出版基金资助项目

中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

华罗庚文集

代数卷 I

华罗庚　万哲先　著

万哲先　审校

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本卷是典型群方面作者历年来工作的系统总结性论著，也包含了作者在体论和矩阵几何方面的工作. 书中不仅列举了作者在这一领域中所获得的丰富而完整的结果，也充分体现了作者所创用的方法和技巧的特点.

全卷共分十二章，前六章由第一作者执笔，初稿完成于 1951 年，后六章由第二作者根据他所体会的前六章的精神和方法续写. 书末附有一些注释.

本卷适合数学及相关专业大学生、研究生、教授及科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

华罗庚文集：代数卷 I/华罗庚，万哲先著；万哲先审校. —北京：科学出版社，2010

(中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书)

ISBN 978-7-03-027126-6

I. 典… II. ①华…②万… III. ①数学-文集…②代数-文集 IV. 01-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 056713 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 5 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2010 年 5 月第二次印刷 印张：32

印数：1—3 000 字数：628 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《华罗庚文集》序言

2010 年是著名数学家华罗庚先生诞辰 100 周年. 值此机会, 我们编辑出版《华罗庚文集》, 作为对他的美好纪念.

华罗庚先生是他那个时代的国际领袖数学家之一, 也是中国现代数学的主要奠基人和领导者. 无论是在和平建设时期, 还是在政治动荡甚至是战争年代, 他都抱定了为国家和人民服务的宗旨, 为中国数学的发展倾注了毕生精力, 受到了中国人民的广泛尊敬.

华罗庚先生最初研究数论, 后将研究兴趣拓展至代数和多复变等多个领域, 取得了一系列国际一流的成果, 引领了这些领域的学术发展, 产生了广泛持久的影响. 他从一名自学青年成长为著名数学家, 其传奇经历激励了几代中国数学家投身于数学事业.

华罗庚先生为我们留下了丰富的精神遗产, 包括大量的学术著作和研究论文. 我们认为, 认真研读这些著作和论文, 是深刻把握华罗庚学术思想精髓的最佳途径. 无论对于数学工作者还是青年学生, 其中许多内容都是很有启发和裨益的.

华罗庚先生担任中国科学院数学研究所所长 30 余年, 他言传身教, 培养和影响了一批国际水平的数学家, 他的学术思想和治学精神已经成为数学所文化的核心. 自 2008 年起以中科院数学所为基础成立的中国科学院华罗庚数学重点实验室, 旨在继承和弘扬华罗庚先生的学术思想和治学精神, 积极推动中国数学的发展. 为此, 我们选择华罗庚先生的著作和论文作为实验室的首批出版物, 今后还将陆续推出更多优秀的数学出版物.

在出版《华罗庚文集》的过程中, 我们得到了各方面的关心和支持, 包括国家出版基金的资助, 在此我们表示深深的感谢. 同时, 对于有关人员在策划、翻译和审校等方面付出的辛勤劳动, 对于科学出版社所作的大量工作, 我们表示诚挚的谢意.

中国科学院华罗庚数学重点实验室

《华罗庚文集》编委会

2010 年 3 月

序[1]

早在 1949 年, 本书作者之一就有了写这样一本书的轮廓, 希望根据这个轮廓组织一个讨论班, 和一批大学四年级及刚毕业的同学在一起, 使他们边学习边搞研究, 集体地较整套地来进行这一领域的研究工作, 一来可以使他们在工作过程中逐步地扩充自己的知识领域, 另一方面可以让他们习作一些研究, 预计在计划完成之后, 可以给典型群论, 射影几何学, 矩阵论及群表示论等数学分支以一个不同的面貌. 1950 年初, 当他在北京清华大学执教时, 组织了这样一个讨论班. 讨论班进行到 1951 年暑假, 在讨论班里他完成了本书前六章的初稿. 接着, 在 1951 年下半年和 1957 年上半年, 他又在中国科学院数学研究所代数讨论班里两度报告了本书前六章的大部分章节, 并进行了一些修改. 随后, 从 1959 年下半年起, 本书后一作者又在数学研究所代数讨论班里报告了前六章的部分章节, 并根据他所体会的前六章的精神与方法续写了本书的后六章. 这就是本书简单的写作经过.

简要地可以这样说, 体上的矩阵是一个值得注意的对象, 因为它是一个不太失去普遍性的抽象事物, 但同时又和成果丰富的具体的域上的矩阵论距离不远. 当然, 结合环, 李环和柔丹环中有趣的部分又都有矩阵形式, 而线性群, 正交群, 辛群, 洛伦兹群也都是矩阵群; 几何学中线几何, 圆几何, 格拉斯曼几何都有矩阵的表示法. 更如多复变函数论的典型域也离不开矩阵的表达形式. 这些形成了我们的工作背景.

仅仅找到一个值得研究的对象, 而没有处理的方法那也还是空话. 本书中提供了一些方法, 这些方法是初步的, 有待改进, 补充和发展, 只有在发展过程中才能把方法搞得更完备.

1950 年本书作者之一选择这个主题的原因之一是为了易于训练干部. 预备知识需要得少, 可以从简单处着手, 从具体处着手; 发展前途不太小, 通过这一系列的研究也可以熟悉代数学, 几何学中不少分支, 可以从宽广处着眼, 从抽象处着眼. 换言之, 开始时不受基础的限制, 终了时不致局促于太仄狭的领域之中.

匆匆已经十年, 这计划还只能说在第一阶段中完成了第一部分而已. 更重要的工作还有待于今后的努力. 这决不是一个完整的东西, 而仅仅是一个开始. 这是一个阶梯中的一级, 读者必须想想前面几级 —— 实数域, 复数域, 有限域及四元数体上的情况, 读者更必须看看后面几级 —— 体上矩阵的环和群的构造, 不用连续性

① 本卷内容曾作为著作出版, 见《典型群》, 北京科学出版社, 1963.

的群表示论等等, 这样才不致于为本书引入歧途. 长期局限于本书范围内的工作将不是作者的本意, 但我们认为搞清这些对象和方法对学好典型群论, 射影几何学等都能有所帮助.

我们感谢王仰贤, 应玫茜, 徐诚浩等同志, 在本书付印之前, 他们分头阅读了本书手稿的各部分, 进行了核算, 并提出了一系列宝贵的修改意见.

华罗庚　万哲先

1962 年 8 月于北京

目　录

序
第一章　体论 …… 1
§1　环与体 …… 1
§2　特征数及素域, 由环建体 …… 4
§3　多项式环 …… 7
§4　同态 …… 9
§5　素域与实数域的自同构 …… 12
§6　线性相关与有限域 …… 14
§7　代数相关与复数域的自同构 …… 19
§8　超越扩张的自同构 …… 22
§9　四元数体 …… 23
§10　广义四元数体 …… 26
§11　体的性质 …… 31
第二章　一维射影几何及二级线性群 …… 37
§1　射影空间及群 …… 37
§2　调和点列和一维射影几何的基本定理 …… 41
§3　射影对合 …… 44
§4　体上的二级线性群 …… 51
§5　$PSL_2(K)$ 的单性 …… 58
§6　$SL_2(K)$ 的自同构 …… 63
§7　$GL_2(K)$ 的自同构 …… 71
§8　$SL_2^{\pm}(K)$ 的自同构 …… 74
§9　$PSL_2(K), PGL_2(K)$ 及 $PSL_2^{\pm}(K)$ 的自同构 …… 75
第三章　向量空间, 矩阵和行列式 …… 81
§1　矩阵的代数 …… 81
§2　向量空间 …… 84
§3　子空间的交和联 …… 89
§4　子空间的矩阵表示, 矩阵的行秩 …… 91

§5 基变换, 线性映射, 矩阵的等价 ······ 93
§6 列空间及矩阵的秩 ······ 97
§7 齐次线性方程组 ······ 100
§8 $GL_n(K)$ 的换位子群 ······ 101
§9 行列式 ······ 103
第四章　射影几何与仿射几何 ······ 111
§1 几何结构 ······ 111
§2 射影空间 ······ 113
§3 $P_n^l(K)$ 中点的线性相关性 ······ 115
§4 线性子空间 ······ 118
§5 关于射影几何的公理化处理 ······ 122
§6 线性子空间的方程及对偶原理 ······ 123
§7 标准单纯形 ······ 127
§8 仿射空间 ······ 128
§9 仿射几何的基本定理 ······ 130
§10 射影几何的基本定理 ······ 135
§11 有限几何 ······ 136
第五章　长方阵几何学 ······ 139
§1 长方阵几何学 ······ 139
§2 方阵几何学 ······ 142
§3 算术距离 ······ 145
§4 长方阵仿射空间中秩为 1 的极大集 ······ 147
§5 两个秩为 1 的极大集的交集 ······ 151
§6 长方阵仿射空间中秩为 2 的极大集 ······ 153
§7 长方阵仿射几何的基本定理 ······ 160
§8 长方阵射影几何的基本定理 ······ 168
第六章　线性群的构造及自同构 ······ 169
§1 复习 ······ 169
§2 在 $SL_n(K)$ 之下矩阵的相似 ······ 169
§3 $PSL_n(K)$ 的单性 ······ 174
§4 对合 ······ 178
§5 $SL_n(K), SL_n^{\pm}(K)$ 和 $GL_n(K)$ 的自同构 (特征数 $\neq 2$) ······ 181
§6 射影对合 (特征数 $\neq 2$) ······ 195

§7　$PGL_n(K), PSL_n^{\pm}(K)$ 和 $PSL_n(K)$ 的自同构 (特征数 $\neq 2$) …… 203
§8　对合 (特征数 $= 2$) …… 207
§9　$SL_n(K), GL_n(K), PSL_n(K)$ 和 $PGL_n(K)$ 的自同构 (特征数 $= 2$) …… 215
第七章　H- 矩阵及酉群 …… 226
§1　自反矩阵及 H- 矩阵 …… 226
§2　H- 矩阵在合同下的化简 …… 231
§3　H- 矩阵在合同下的化简 (续) …… 238
§4　H- 矩阵在合同下的化简 (续)——Witt 定理 …… 244
§5　迷向子空间 …… 249
§6　酉群 …… 257
§7　当 $\nu = \frac{n}{2}$ 时酉矩阵的形式 …… 261
§8　当 $0 < \nu < \frac{n}{2}$ 时酉矩阵的形式 …… 265
§9　酉平延及拟对称 …… 268
§10　酉群的中心及射影酉群 …… 272
§11　有限域上的酉群 …… 275
第八章　酉群的构造 ($\nu \geqslant 1$ 而正交群除外) …… 280
§1　引言 …… 280
§2　$TU_n(K,H)$ 的中心 …… 282
§3　$PTU_2(K,H)$ 的单性 ($\nu = 1$) …… 289
§4　$PTU_n(K,H)$ 的单性 ($\nu \geqslant 1$) …… 295
§5　群 $U_n'(K,H)$ $(n = 2\nu)$ …… 307
§6　$U_n(K,H)$ 的换位子群 $(n = 2\nu)$ …… 320
第九章　特征数 $\neq 2$ 的域上的正交群的构造 ($\nu \geqslant 1$) …… 329
§1　复习 …… 329
§2　由 2 平延所演成的群 …… 334
§3　由双曲旋转的平方所演成的群 …… 341
§4　$O_n^+(F,S)/\Omega_n(F,S)$ 的构造 $(n = 2\nu)$ …… 343
§5　$O_n^+(F,S)/\Omega_n(F,S)$ 的构造 $(n > 2\nu)$ …… 349
§6　$P\Omega_n(F,S)$ 是单群的证明 …… 350
§7　$P\Omega_n(F,S)$ 是单群的证明 (续) …… 358
第十章　特征数为 2 的域上的二次型和无亏数的正交群 …… 370
§1　二次型的合同及 Witt 定理的推广 …… 370

§2 奇异子空间 正则二次型的指数 ······ 378
§3 正交群 ······ 381
§4 $O_n(F,G)$ 中元素的形式 ······ 383
§5 正交平延 ······ 385
§6 由 2 平延所演成的群 (与第九章 §2 相比较) ······ 394
§7 由双曲旋转的平方所演成的群 (与第九章 §3 相比较) ······ 397
§8 $O_n(F,G)$ 的构造 ($\nu \geqslant 1$) ······ 398
第十一章 特征数为 2 的域上有亏数的正交群 ······ 399
§1 群 $O_n(F,G)$ 的一些初步性质 ······ 399
§2 半奇异向量 ······ 400
§3 $O_n(F,G)$ 中元素的形式 ······ 404
§4 正交平延 ······ 406
§5 由半奇异平延所演成的群 ······ 411
§6 $O_n(F,G)$ 的单性 ······ 417
第十二章 辛群的自同构 ······ 422
§1 以往结果提要 ······ 422
§2 辛对合 (K 的特征数 $\neq 2$) ······ 423
§3 $Sp_{2\nu}(K)$ 的自同构 (K 的特征数 $\neq 2$) ······ 428
§4 射影辛对合 (K 的特征数 $\neq 2$) ······ 436
§5 射影辛对合的中心化子和 $PSp_{2\nu}(K)$ 的自同构 (K 的特征数 $\neq 2$) ······ 441
§6 辛对合 (K 的特征数 $= 2$) ······ 443
§7 由一对称矩阵所定义的群 (K 的特征数 $= 2$) ······ 450
§8 辛对合的中心化子 (K 的特征数 $= 2$) ······ 457
§9 1 对合的刻画 (K 的特征数 $= 2$) ······ 462
§10 $Sp_{2m}(K)$ 的自同构 (K 的特征数 $= 2$) ······ 468
附记 ······ 486
索引 ······ 491

第一章　体　　论

§1　环　与　体

为了使本书尽可能地自给自足, 我们先叙述一下环和体的基本性质, 并且提供若干例子, 通过这些例子来说明某些概念的具体涵义.

定义 1　环 R 乃具有两种运算"+"及"×"的集合, 即若 a,b 在 R 中, 则 $a+b$ 及 $a\times b$ 也是 R 中唯一定义的元素; 这两个运算有以下性质:

I. 对加运算"+", R 成一交换群 (或称为 Abel 群), 即对 R 中的任意三元素 a,b,c 有次之关系: (i) $a+b=b+a$; (ii) $(a+b)+c=a+(b+c)$; (iii) R 有一元素 0, 称为零元素, 使对所有的 a, 常有 $0+a=a$, 及 (iv) 对 R 中任意元素 a, R 中一定有一个元素 b, 使得 $a+b=0$;

II. 对乘运算"×", 适合结合律, 即对 R 中的任意三元素 a,b,c, 常有

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c);$$

III. 加乘之间适合分配律, 即对 R 中的任意三元素 a,b,c, 常有

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c,$$
$$(b+c)\times a=b\times a+c\times a.$$

以后为方便计, 将"×"号略去, 通常习见的名词"和", "差", "积"等名词, 其义自明, 不再定义.

〔**例 1**〕　所有的整数成一环; 所有的偶数也成一环.

〔**例 2**〕　命 m 表一正整数, 以 m 为模所得的同余类成一环. 且看一个具体情形. 命 $m=6$, 任一整数可以唯一地归入下面六类之一:

$$\{0+6k\},\quad \{1+6k\},\quad \{2+6k\},\quad \{3+6k\},\quad \{4+6k\},\quad \{5+6k\}.$$

分别以 $\varGamma_0,\cdots,\varGamma_5$ 表示上述的类. 两类的加法定义为

$$\varGamma_i+\varGamma_j=\varGamma_k, 若 i+j\equiv k \pmod 6,$$

而 $\varGamma_0$ 为加法群中的零元素; 乘法定义为

$$\varGamma_i\varGamma_j=\varGamma_k, 若 ij\equiv k \pmod 6.$$

显然, 这样定义出一个环.

〔例 3〕 所有带有理系数的单变数多项式成一环.

〔例 4〕 以一多项式为模, 分上例中所述的多项式为同余类, 这些类也成为一环.

〔例 5〕 形如 $a+bi$ $(i=\sqrt{-1})$ 的数, 其中 a,b 为整数, 也成一环.

〔例 6〕 所有在区间 (a,b) 内的连续函数成一环.

〔例 7〕 复变数函数论中所讨论的全体整函数也成一环.

环 R 中的零元素 0 还有次之性质: 由

$$0a=(0+0)a=0a+0a$$

可知

$$0a=0.$$

同样, 可知 $a0=0$. 即 0 左乘或右乘任一元素恒为 0. 但从 $ab=0$ 并不能断定 a,b 中至少有一为 0; 例如, 在例 2 中, $\Gamma_2\Gamma_3=\Gamma_0$, 但是 $\Gamma_2\neq\Gamma_0,\Gamma_3\neq\Gamma_0$. 因而我们定义: 环中如有二元素 $a\neq 0, b\neq 0$ 而 $ab=0$, 则称 a 为左零因子, b 为右零因子.

显然, 如果环中无左零因子, 当然也无右零因子. 这样的环谓之无零因子的环.

如果环 R 的一个子集合 S 对 R 的两个运算也成一环, 那么, S 称为环 R 的子环. 例 1 即说明子环是存在的.

定义 2 环 R 若再满足下面的条件则称为体:

II′. R 中除 0 外, 其他的元素对乘法成一群, 即有一元素 1, 称为么元素, 使 $1\cdot a=a$, 而且对 R 中任意元素 $a\neq 0$, 有一元素 b 存在, 使 $b\cdot a=1$.

若体中乘法满足交换律, 即 $ab=ba$, 则体称为域.

〔例 1〕 命 p 为一素数, 以 p 为模所得的同余类成一域.

〔例 2〕 所有的有理数成一域.

〔例 3〕 所有的形如 $a+bi$ 的数也成一域, 此处 a,b 过所有的实数.

〔例 4〕 所有的有理函数成一域.

〔例 5〕 所有的半纯函数也成一域.

以上列举的全是域的例子. 现在问: 是否有非域之体?

〔例 6〕 命 F 表一实域, 就是具有下述性质的域: 如果若干个元素的平方的和等于 0, 则这些元素全是 0. 命 i,j,k 为三元素, 与 F 中的元素皆可交换, 且具有以下诸性质:

$$ij=-ji=k,\quad jk=-kj=i,\quad ki=-ik=j,$$

(1)

$$i^2=j^2=k^2=-1.$$

我们考虑全体形如

$$a_0+a_1i+a_2j+a_3k \quad (a_0,a_1,a_2,a_3\in F)$$

的元素. 这种元素称为四元数, 以 Q 表所有的四元数所成的集合, 其中的加法定义为

$$\begin{aligned}&(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)+(b_0+b_1i+b_2j+b_3k)\\ &=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)i+(a_2+b_2)j+(a_3+b_3)k,\end{aligned}$$

其乘法由 (1) 式及分配律予以确定. 读者试自验证, Q 是一体, 称为四元数体.

易见, 在 Q 中与任一元素皆可交换的元素所成的集合, 就是 F. 这一性质引出以下概念:

一体 R 中的元素 a, 若对所有的 $x\in R$ 常满足

$$ax=xa,$$

则 a 称为 R 的中心元素. 全体中心元素所成的集合, 称为 R 的中心. 显然中心成一域.

一体的子集, 如果对体的原有的两种运算仍成一体, 这子集称为原体的子体, 而称原体为子体的扩体. 例 6 中的 F 是 Q 的子体.

〔例 7〕 命 F 为一域, 系数在 F 中所有的 x 的多项式成一环, 以 $F[x]$ 记之. 设 $f(x)$ 为系数在 F 中的不可分解的多项式. 以 $f(x)$ 为模, 分多项式为若干类, 如此诸类成一域, 证明如下:

对任一 $g(x)$, 如非 $f(x)$ 的倍数, 由辗转相除法可得二多项式 $a(x)$ 与 $b(x)$, 使

$$a(x)g(x)+b(x)f(x)=1,$$

此处 $a(x)$, $b(x)$ 的系数也在 F 中. 由此立得

$$a(x)g(x)\equiv 1 \pmod{f(x)}.$$

即 $g(x)$ 所代表的同余类以 $a(x)$ 所代表的同余类为其逆. 显然可见, 此域以 F 为其子域.

假定 α 是方程式 $f(x)=0$ 的根, 且 α 与 F 中的元素都可交换, 则形如

$$a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1} \quad (a_0,\cdots,a_{n-1}\in F)$$

之元素成一域, 此处 n 为多项式 $f(x)$ 的次数. 只须重复上面的讨论就可以证明这一性质. 如此所得的域称为 F 的单代数扩域, 且以符号 $F(\alpha)$ 记之.

§2　特征数及素域, 由环建体

设 R 为一无零因子的环. 对 R 中某一元素 $a\neq 0$, 若有最小正整数 p 存在, 使 $pa=0$, 即

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{p\text{ 个}}=0,$$

则 p 称为此环的特征数. 若不存在这样的 p, 则称此环为特征数为零的环, 或记之以 $p=0$. 特征数 p 有下述的性质:

I. p 与 a 的选择无关;

II. p 为素数.

事实上, 设 $a\neq 0$, $b\neq 0$ $(a,b\in R)$, 则由

$$(pa)b=a(pb)$$

可知由 $pa=0$ 推出 $pb=0$. 反之, 由 $pb=0$ 推得 $pa=0$, 故得 I.

又若 p 不是素数而 $p=p_1p_2$ $(p_1>1,p_2>1)$, 则 $pa=p_1(p_2a)=0$, 若 $p_2a=0$, 此与 p 的假设不合; 若 $p_2a\neq 0$, 此与 I 相矛盾, 故得 II.

命 R 为有么元素的环, Σ 为 R 中包含么元素的最小子环. 若 R 为无零因子环而且 R 之特征数是 p, 则 Σ 就是: $0,1,\cdots,p-1$ 所构成的集合. 若 R 之特征数为 0, 则 Σ 就是所有的整数.

命 F 为一体, 若 F 的特征数是 p, 则 F 的最小子体就是由 $0,1,\cdots,p-1$ 这些元素所构成的域. 若特征数是 0, 则 F 的最小子体就是由全体有理数所组成的域. 这最小子体称为体 F 的素域.

定义 1　在一环中, 如 $a=bc$, 则 b 称为 a 的左因子, c 称为 a 的右因子; a 称为 b 的右倍数, c 的左倍数. 若有一元 m 具有性质

$$m=aa_1=bb_1,$$

则 m 称为 a 及 b 的右公倍数. 显然可以类似地定义任意多个元素的右公倍数.

本节之目的在于: 从无零因子而任二元素有右公倍数的环出发, 仿照由整数建立有理数的方法, 来建立体.

为了这个目的, 我们将下面的集合分类:

$$\{(a,b);a,b\in R,b\neq 0\}.$$

设有 $(a,b),(c,d)$. 若对于 d,b 的某一右公倍数 $m=bb_1=dd_1, ab_1=cd_1$ 成立, 则称 (a,b) 与 (c,d) 属于同类, 以 $(a,b)\sim(c,d)$ 表之.

首先证明, 此定义与 m 的选择无关. 即若 m' 为另一右公倍数, $m' = bb_1' = dd_1'$, 则我们仍有 $ab_1' = cd_1'$. 事实上, 由假定, m 与 m' 有一右公倍数 $M = mx = m'y$, 则有 $b_1x = b_1'y$ 及 $d_1x = d_1'y$. 再由 $ab_1 = cd_1$ 立得 $ab_1'y = ab_1x = cd_1x = cd_1'y$, 即 $ab_1' = cd_1'$.

其次证明: 关系"$\sim$"是一等价关系, 即有以下的三种性质:

1. 反身性　$(a, b) \sim (a, b)$;
2. 对称性　若$(a, b) \sim (c, d)$, 则 $(c, d) \sim (a, b)$;
3. 传递性　若$(a, b) \sim (c, d), (c, d) \sim (e, f)$, 则 $(a, b) \sim (e, f)$.

1 及 2 是显然的事实. 现在我们去证明传递性. 易见任何三元素 b, d, f, 必有一右公倍数 m 使

$$m = bb_1 = dd_1 = ff_1,$$

由假定 $ab_1 = cd_1, cd_1 = ef_1$, 故得 $ab_1 = ef_1$, 即 $(a, b) \sim (e, f)$.

所有的类成一集合, 以 K 表之. 今以 $\dfrac{a}{b}$ 表示 (a, b) 所属之类, (a, b) 称为此类的代表. 今在 K 中定义加法和乘法.

对于加法, 我们作如下的定义:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ab_1 + cd_1}{m},$$

此处 m 是 b 及 d 的一个右公倍数, 且 $m = bb_1 = dd_1$.

首先指出这定义与 m 的选择无关. 盖设 $m' = bb_1' = dd_1'$ 及 $M = mx = m'y$, 则 $b_1x = b_1'y, d_1x = d_1'y$, 故得

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ab_1 + cd_1}{m} = \frac{ab_1x + cd_1x}{mx} \\ &= \frac{ab_1'y + cd_1'y}{m'y} = \frac{ab_1' + cd_1'}{m'}.\end{aligned}$$

其次指出, 此定义与 $\dfrac{a}{b}$ 及 $\dfrac{c}{d}$ 的代表选择无关.

设 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}, \dfrac{c}{d} = \dfrac{c'}{d'}$, 则 $m = bb_1 = b'b_1' = dd_1 = d'd_1'$, 由假定知 $ab_1 = a'b_1', cd_1 = c'd_1'$, 故得

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ab_1 + cd_1}{m} = \frac{a'b_1' + c'd_1'}{m} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}.$$

对于乘法定义如下:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ab_1}{dc_1},$$

此处 $m = bb_1 = cc_1$, 而 $b \neq 0, c \neq 0$.

同样可证, 此定义与 m 的选择无关. 设 $m' = bb_1' = cc_1', mx = m'y$, 则 $b_1x = b_1'y, c_1x = c_1'y$, 故得

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ab_1}{dc_1} = \frac{ab_1x}{dc_1x} = \frac{ab_1'y}{dc_1'y} = \frac{ab_1'}{dc_1'}.$$

再证明此定义与 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 的代表选择无关. 若 $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, 由此可设

$$bb_1 = b'b_1', \quad ab_1 = a'b_1'; \quad dd_1 = d'd_1', \quad cd_1 = c'd_1'.$$

取 $m = bb_1\alpha = b'b_1'\alpha = cd_1\beta = c'd_1'\beta$, 故

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ab_1\alpha}{dd_1\beta}, \quad \left(\frac{a'}{b'}\right)\left(\frac{c'}{d'}\right) = \frac{a'b_1'\alpha}{d'd_1'\beta}$$

当 $c = 0$ 时, 我们定义

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{0}{d}\right) = \left(\frac{0}{d}\right).$$

集合 K 经过这样定义加法和乘法之后成为一体, 称为 R 的商体. 今往证明其适合体之诸条件:

I. 对加法运算成一 Abel 群. 易见 $\frac{0}{d}$ 相当于 0 元素, 而 $-\frac{a}{b}$ 相当于 $\frac{a}{b}$ 的逆元素. 证明甚易, 读者自证之.

II. 非零元素对乘法成一群. 这一证明也略去. 其中 $\frac{d}{d}$ 相当于么元素, 而 $\frac{b}{a}$ 相当于 $\frac{a}{b}$ 的逆元素.

III. 分配律成立. 首先我们来证明左分配律:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right).$$

设 $bb_1 = cc_1, dc_1d_1 = fc_1f_1 = m$, 即

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) &= \left(\frac{ab_1d_1}{bb_1d_1}\right)\left(\frac{cc_1d_1 + ec_1f_1}{m}\right)\\ &= \left(\frac{ab_1d_1}{bb_1d_1}\right)\left(\frac{bb_1d_1}{m} + \frac{ec_1f_1}{m}\right),\end{aligned}$$

故在证明中不妨假定 $d = f, c = b$, 即只需证明

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b+e}{d}\right) = \frac{a}{d} + \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{d}\right)$$

即足.

设 $n = bb_1 = ee_1$, 此式的右边等于

$$\frac{a}{d} + \frac{ab_1}{de_1} = \frac{ae_1 + ab_1}{de_1},$$

而左边等于

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{(b+e)e_1}{de_1}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b(e_1+b_1)}{de_1}\right),$$

于是左右两边完全符合.

右分配律的证明比较容易. 由于在证明

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}\right)$$

时, 不妨假定 $b=d=e$.

如果写 $\frac{ac}{c}=a, \frac{c}{bc}=b^{-1}$, 则 $\frac{a}{b}=ab^{-1}$. 如欲 $(ab^{-1})(cd^{-1})=ef^{-1}$, 一个自然条件是存在两元素 b_1, c_1, 使 $b^{-1}c=b_1c_1^{-1}$, 即 $bb_1=cc_1$, 也即 b, c 有右公倍数. 由此可见, 从环建体, 有右公倍数这一条件是自然的.

在 $\frac{ac}{c}=a$ 的了解下, 体 K 包有 R 作为其自己的子环, 而在 $\frac{c}{bc}=b^{-1}$ 的了解下, 体 K 是包有 R 的最小体.

在交换环中, 任二元素显然有公倍数, 故在无零因子的情况下, 就可以利用上述的理论, 从环来建体. 最具体的例子是: 从整数环到有理数域, 从多项式环到有理函数域, 从整函数环到半纯函数域等等. 但是除了交换环是有右公倍数的环以外, 是否还存在着有右公倍数的非交换环, 下一节我们将回答这个问题.

§3 多项式环

命 K 为一体. 形如

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i \quad (a_0, a_1, \cdots, a_n\in K)$$

的式子称为不定子 x 的多项式. 若 $a_n\neq 0$, 则 n 称为这多项式的次数, 记作 $\partial^0 f$.

设

$$g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i.$$

我们可以定义两多项式的加和乘:

$$f(x)+g(x)=\sum_i(a_i+b_i)x^i,$$

$$f(x)g(x)=\sum_{i,j}a_ib_jx^{i+j}.$$

由定义立刻看出