新标准精编教辅丛书

红面书

数学

学习导引

高中一年级 第一学期

学习指导 系列

上海教育出版社

“精心策划，精心编制，精诚奉献”

21世纪素质教育的新概念教辅书

世纪集团

责任编辑 李俊明
封面设计 一步设计工作室

数学 学习导引

体现以学生发展为本，探究全新学习理念
学习导引助你打好知识基础

配套性　与试验教材同步、与课堂教学一致
创造性　基础与方法的全新组合，理解与创新的巧妙融合
时代性　适应上海二期课改的新精神
权威性　名师担纲、名师编写

新标准精编教辅丛书

学习指导系列

一课一练系列

能力提高系列

ISBN 978-7-5320-8916-1
易文网：www.ewen.cc
定　　价：12.50元

新标准精编教辅丛书

数学学习导引

（学习指导系列）

高中一年级第一学期

本书编写组

上海教育出版社

新标准精编教辅丛书
数学学习导引
（学习指导系列）
高中一年级第一学期
本书编写组
上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社 出版
易文网:www.ewen.cc
(上海永福路 123 号　　邮政编码: 200031)
上海新华书店发行　　上海中华印刷有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 10.75
2006 年 8 月第 2 版　　2010 年 7 月第 9 次印刷
ISBN 978-7-5320-8916-1/G·8853　定价:12.50 元

《新标准精编教辅丛书》的出版说明

为配合上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会的二期课改,帮助学生夯实学习的基础,提高学习能力与学习效率,加强创新精神和探索能力的培养,上海教育出版社组织了上海市一批优秀的特级教师和高级教师通过潜心策划、精心编撰,全力推出一套高质量的教辅丛书——《新标准精编教辅丛书》.

《新标准精编教辅丛书》的数学学科按以下三个教辅系列编写:

- 《数学学习导引(学习指导系列)》;
- 《数学精练与博览(一课一练系列)》;
- 《数学能力训练与提高(能力提高系列)》.

《新标准精编教辅丛书》的三个系列在知识层面、难易程度上是互补的,各有自己的功用.

《数学学习导引(学习指导系列)》包括学习目标、要点分析、回顾与提高、拓广与发展等栏目,内容针对广大中等水平的学生,重视知识间的相互联系,引导学生学习教材的相关知识,从而切实提高学生的分析问题与解决问题的能力.

《数学精练与博览(一课一练系列)》包括供学生学习各阶段的数学精练(每课精练、每周精练、单元精练、期中精练与期末精练,丰富多彩的博览材料(数学史话、学习小品、趣题巧解、解题技巧、名题欣赏等),力求使学生在做题的同时还能开阔视野、陶冶情操,从而全面提高学生的素质.

《数学能力训练与提高(能力提高系列)》包括范例与训练两部分,其中的例题难度为中上,通过一类例题的评注,用以指出例题本身的特点,并挖掘出其中的数学思想方法和解题规律,从而达到提高数学学习能力和创造能力的目的.训练部分的习题难易与例题相当,便于学生巩固和运用学到的数学方法.

前　言

为了帮助学生学好由上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会组织编写的高级中学课本(试用本)《数学》,我们感到有必要向大家提供一套比较合适的课外读物.为此,我们将新标准精编教辅丛书《数学学习导引(学习指导系列)》奉献给广大读者.

学习数学要紧扣教学的基本要求,反对盲目地提高教学的难度;要注重对教材中的重点、难点以及学生的常见错误的分析,引导学生更牢固掌握所学到的知识和技能.

学习数学要重视知识间的相互联系,反对用大量的习题将学生淹没在题海里;要引导学生关注知识产生的过程,切实提高学生分析问题和解决问题的能力,获得更多的学习经验;要启发学生不断总结数学方法,领悟数学思想.

学习数学还要适当扩大知识面,不断思索和研究一些新问题,反对教学围着考试转,考什么教什么;要培养学习兴趣,发展健康个性,引导学生努力提高自身素质.

基于上述想法,我们对本套书的内容作了精心设计.

为了便于读者阅读,本书的编排与教材相配套,每学期一册,某些章节还划分了一些新单元.本书的内容可分为三个层次.

第一层次紧扣教学的基本要求,按单元编写,并设有以下栏目:

"学习目标",根据《上海市中小学数学课程标准》(征求意见稿)中对高中数学部分的要求,将学习目标划分为知道(了解)、理解(懂得)、掌握(会、能)、运用四个等级,使读者明确本单元的教学要求.

"要点分析",对本单元知识的重点、难点以及学生易犯错误逐条作出分析,并用例题加以说明,使读者更好地掌握所学的知识.

第二层次与第三层次按章编写,并设有以下栏目:

"回顾与提高",回顾本章知识的框架、重点、难点以及在学习中应当注意的问题,注重与以前所学得的知识相综合,总结和归纳与本章有关的某些数学方法与数学思想,并精选了一部分例题.

"拓广与发展",着重阐述与本章教学内容相关的几个课外知识点,难度控制在大多数学生能够自学的水平上,目的是为了提高学生的学习兴趣,同时也是为了使

学生进一步理解本章的教学内容.所选的内容相互独立,也可供教师在选修课中选用.

在本书中,我们也为读者精选了数量和难度适当的习题,并设计了以下栏目,以便为读者提供实践的机会或提供自我评估的依据.

“基本练习”,题型多样,难度不高.

“综合练习”,题型多样,难度适中,有一部分与其他章节的知识相综合的习题,供学生单元复习时使用.

“问题与思考”,为巩固拓广与发展的内容而设计.读者可根据各自的情况选做.

“单元评估”、“期中评估”、“期末评估”,为读者提供学习效果的评估依据.单元评估为60分钟完卷,期中、期末评估为90分钟完卷.

书末附有答案或提示,便于读者自检.

本书由忻再义任主编,参加本册编写的有李大元(第1章)、阮瑾怡(第2章)、李关煜(第3章)、忻再义(第4章),由忻再义统稿.

尽管我们作出了努力,但由于水平有限,编写时间也比较紧迫,因此难免会有不足之处,恳请读者批评指正.

本书编写组

2006年6月

目　录

第 1 章　集合和命题

一　集　合

【学习目标】

1. 理解集合、空集的意义,会用“列举法”和“描述法”表示集合.

2. 理解子集、集合相等等概念,能判断两个简单集合之间的包含关系或相等关系.

3. 理解交集、并集等概念,掌握集合的交、并运算,知道有关的基本运算性质.

4. 理解全集的意义,能求出已知集合的补集.

5. 进一步认识集合符号的涵义.

【要点分析】

1. 集合

集合理论虽然创立仅一百多年,但已成为现代数学各个分支的基础.为了今后应用和继续学习的需要,作为一个高中学生,有必要学习集合理论的基本知识.

集合是一个不定义的原始概念.教材通过实例给出了集合的描述性说明:“把能够确切指定的对象看作一个整体,这个整体就叫做一个集合”.在这个说明中,要特别注意“确切的对象”与“整体”两层意思.

正是由于构成一个集合的对象是“确切的”,对任一个对象,我们能判定该对象是属于这个集合,还是不属于这个集合.例如,对像“年龄较大的人”被认为是不确切的.集合是一个整体,至于作为集合元素的对象的范围却十分广泛.另外,构成集合的对象是根据需要人为指定的.

“空集”是规定的一个特殊集合.空集不含任何元素,它的专用记号是$\varnothing$.

要应用集合概念就要研究集合的表达.教材主要介绍了两种常用的表示法:列举法和描述法.我们要根据集合的特点恰当使用这两种表示法.列举法通常适用于元素不太多的有限集,其他集合一般都采用描述法.

另外,几个特殊数集的专用字母,如 $\mathbf{N}$(自然数集)、$\mathbf{Z}$(整数集)、$\mathbf{N}^*$(不包括零的自然数集)、$\mathbf{Q}$(有理数集)、$\mathbf{R}$(实数集)等也要熟记.

例 1 用列举法表示集合$\{(x,y)\mid x+y=6, x\in \mathbf{N}、y\in \mathbf{N}\}$.

分析：首先，应看出给出集合的元素是直角坐标平面内的一些点. 其次，这些点的横坐标 x、纵坐标 y 都是自然数，且满足 $x+y=6$. 具体列举时，为避免遗漏，可让 x 从小取到大.

解 $\{(0,6),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(6,0)\}$.

例 2 a 为实数，且使集合 $M=\{x\mid ax^2+2x+a=0\}$成为单元素集，求满足上述条件的 a 所构成的集合.

分析：集合 M 即是方程 $ax^2+2x+a=0$ 的解的集合. 当 $a=0$ 时，已知方程为一元一次方程，有唯一解，符合条件；当 $a\neq 0$ 时，已知方程为一元二次方程，为使 a 符合条件，必须且只须该一元二次方程有重根.

解 当 $a=0$ 时，已知方程变成 $2x=0, x=0$. 此时 $M=\{0\}$是单元素集.

当 $a\neq 0$ 时，已知方程为一元二次方程，其判别式 $\Delta=4-4a^2$，当且仅当 $\Delta=0$，即 $a=\pm 1$ 时，已知方程有重根. 此时 $M=\left\{-\dfrac{1}{a}\right\}$为单元素集.

综上所述，满足条件的实数 a 所构成的集合为$\{0,1,-1\}$.

2. 区别"属于"记号与"包含"记号

两个集合之间有"包含"与"不包含"两类关系. 在"包含"关系中还包括集合"相等"这一种重要关系. 由这些关系导出了子集、真子集等概念.

表示两个集合之间关系的有"$\subseteq$"(包含于)、"$\supseteq$"(包含)、"$\subsetneqq$"(真包含于)、"$\supsetneqq$"(真包含)、"$=$"(等于)等记号.

表示元素与集合之间关系的是"$\in$"(属于)与"$\notin$"(不属于)两个记号，要注意区分上述两类记号.

例 3 选用适当的记号表示$\varnothing$与 0，0 与$\{0\}$，$\{0\}$与$\varnothing$之间的关系.

分析：$\varnothing$为空集，空集中不含有任何元素，因此 0 不是$\varnothing$中的元素，即$0\notin\varnothing$.

$\{0\}$为一个单元素集合，0 是它的元素，表示元素与集合的关系用"$\in$"，即$0\in\{0\}$.

$\{0\}$、$\varnothing$都是集合，表示集合与集合的关系可用"$\subsetneqq$"、"$\subseteq$"、"$\supsetneqq$"、"$\supseteq$"、"$=$"等记号. 因为空集是任何集合的子集，且是任何非空集合的真子集，所以有$\varnothing\subsetneqq\{0\}$或$\{0\}\supsetneqq\varnothing$.

解 $0\notin\varnothing$；$0\in\{0\}$；$\varnothing\subsetneqq\{0\}$或$\{0\}\supsetneqq\varnothing$.

例 4 如果集合 A、B、C、D、E 分别表示由所有的平行四边形、所有的正方形、所有的矩形、所有的菱形、所有的四边形组成的集合，写出上述集合之间的包含

关系.

分析：因为正方形一定是矩形，也一定是菱形，而矩形或菱形不一定是正方形，所以 B 中的元素一定是 C 和 D 中的元素，而 C 或 D 中的元素不一定是 B 中的元素. 因此有 $B\subsetneqq C, B\subsetneqq D$. 类似地可对其他集合作分析，确定其关系.

解 $B\subsetneqq C\subsetneqq A\subsetneqq E$；$B\subsetneqq D\subsetneqq A\subsetneqq E$.

例 5 空集$\varnothing$有多少个子集？有多少个真子集？由一个元素组成的集合$\{a\}$有多少个子集？有多少个真子集？由两个元素组成的集合$\{a,b\}$有多少个子集？有多少个真子集？由三个元素组成的集合$\{a,b,c\}$有多少个子集？有多少个真子集？观察以上结果，你能否猜测由 n 个元素组成的集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$有多少个子集？有多少个真子集？

分析：应当注意空集$\varnothing$以及集合 A 的本身都是集合 A 的子集，空集$\varnothing$是任何非空集合的真子集，但不是空集的真子集.

解 空集$\varnothing$有 1 个子集：$\varnothing$；没有真子集.

集合$\{a\}$有 2 个子集：$\varnothing,\{a\}$；有 1 个真子集：$\varnothing$.

集合$\{a,b\}$有 4 个子集：$\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}$；有 3 个真子集：$\varnothing,\{a\},\{b\}$.

集合$\{a,b,c\}$有 8 个子集：$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}$；有 7 个真子集：$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\}$.

由此可猜测由 n 个元素所组成的集合应有 2^n 个子集，2^n-1 个真子集.

在以后的学习中，将会证明这一猜测是正确的.

3. 集合的运算

关于集合的运算，现阶段只要求掌握“交”、“并”、“补”三种. 交集与并集的意义依次是

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\quad 且\quad x\in B\},$$
$$A\cup B=\{x\mid x\in A\quad 或\quad x\in B\}.$$

两个定义仅一字之差，结果却完全不同. 这说明在数学学习中，叙述的用词与解题前的审题是十分重要的. 值得注意的是，“且”有时可省略，但“或”不能省略.

补集的概念是相对全集而言的. 它的意义是

$$\complement_U A=\{x\mid x\in U, x\notin A\},$$

这里 U 表示全集.

集合的运算在今后的学习中经常要用到，因此必须熟练掌握.

例 6 设集合 $A=\{a\mid 二次方程\ x^2-2x+a=0\ 有实根, a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{a\mid 二次方程\ ax^2-x+1=0\ 无实根, a\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$.

分析：为了求出 $A\cap B$ 和 $A\cup B$，应先把给出的集合 A、B 都写成 a 的取值范围.

解
$$A=\{a\,|\,4-4a\geqslant 0\}=\{a\,|\,a\leqslant 1\},$$
$$B=\{a\,|\,a\neq 0,1-4a<0\}=\left\{a\,\middle|\,a>\frac{1}{4}\right\},$$
$$\therefore\quad A\cap B=\left\{a\,\middle|\,\frac{1}{4}<a\leqslant 1\right\}.$$
$$A\cup B=\left\{a\,\middle|\,a\leqslant 1\quad\text{或}\quad a>\frac{1}{4}\right\}=\mathbf{R}.$$

例 7 已知集合 $A=\{y\,|\,y-m\leqslant 0\}$，$B=\{y\,|\,y=(x-1)^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

分析：集合 A 显然是 $\{y\,|\,y\leqslant m\}$，集合 B 是二次函数 $y=(x-1)^2-1$ 的值域. $y=(x-1)^2-1$ 的图像是顶点为 $(1,-1)$，张口向上的抛物线，故 $B=\{y\,|\,y\geqslant -1\}$. 由此便易得 m 的取值范围.

解 $A=\{y\,|\,y\leqslant m\}$，$B=\{y\,|\,y\geqslant -1\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，则 m 的取值范围为
$$\{m\,|\,m<-1\}.$$

例 8 设集合 $A=\{y\,|\,y=x^2-4x+3,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y\,|\,y=-x^2-2x,x\in\mathbf{Z}\}$，求 $A\cap B$.

分析：按描述法的意义，集合 A 表示当 x 取遍一切整数时，$y=x^2-4x+3$ 的值的全体. 为了便于解题，借助配方法将 A 用列举法表示出来. 同理，B 也可用列举法表示出来. 于是 $A\cap B$ 即可求得.

解
$$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1.$$

若令 $t=|x-2|$，则由 $x\in\mathbf{Z}$，知 t 为非负整数，且 $y=t^2-1$.
$$\begin{aligned}\therefore\quad A&=\{y\,|\,y=t^2-1,\ t\in\mathbf{N}\}\\&=\{-1,0,3,8,\cdots,t^2-1,\cdots\}.\end{aligned}$$

同理，
$$\begin{aligned}B&=\{y\,|\,y=-(x+1)^2+1,\ x\in\mathbf{Z}\}\\&=\{y\,|\,y=-s^2+1,\ s\in\mathbf{N}\}\\&=\{1,0,-3,-8,\cdots,-s^2+1,\cdots\}.\end{aligned}$$
$$\therefore\quad A\cap B=\{0\}.$$

例 9 已知 $A=\{x\,|\,x+1\geqslant 0\}$，$B=\{x\,|\,x^2-2>0\}$，全集 $U=\mathbf{R}$，求 $A\cap \complement_U B$.

分析：因为中学数学没有全面研究集合运算的性质，所以遇到两个或两个以上集合的运算时，可按题目中指定的运算顺序逐步运算.

在求 $\complement_U B$ 时，可不必先解不等式 $x^2-2>0$，而直接将 $\complement_U B$ 写成 $\{x \mid x^2-2\leqslant 0\}$，这样可简化解题过程.

解 $A=\{x \mid x\geqslant -1\}$， $B=\{x \mid x^2-2>0\}$，$U=\mathbf{R}$，

$$\complement_U B=\{x \mid x^2-2\leqslant 0\}=\{x \mid x^2\leqslant 2\}=\{x \mid -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant \sqrt{2}\}.$$

$$\therefore\quad A\cap \complement_U B=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}\}.$$

例 10 设全集 $U=\{(x,y) \mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，集合

$$A=\left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{y-3}{x-2}=1\right\},\ B=\{(x,y) \mid y\neq x+1\},$$

求 $\complement_U(A\cup B)$.

分析：本例中，全集 U 是直角坐标平面内所有点构成的集合，集合 B 是直角坐标平面内不在直线 $y=x+1$ 上的点构成的集合，为了说明集合 A 的几何意义，可先简化方程 $\frac{y-3}{x-2}=1$. 这样本例就不难得解.

解 $\because\quad A=\{(x,y) \mid x\neq 2,\ y-3=x-2\}$

$$=\{(x,y) \mid x\neq 2, y=x+1\},$$

$$\therefore\quad A\cup B=\{(x,y) \mid x、y\in\mathbf{R}, (x,y)\neq(2,3)\},$$

$$\complement_U(A\cup B)=\{(2,3)\}.$$

例 11 若集合 $A=\{x \mid x>2\}$，当全集 U 分别取下列集合时，写出 $\complement_U A$：

(1) $U=\{x \mid x\in\mathbf{R}\}$；　(2) $U=\{x \mid x\geqslant 0\}$；　(3) $U=\{x \mid x\geqslant 2\}$.

分析：由于所取的全集不同，同一个集合的补集就会不同，因此在求一个集合的补集时，一定要搞清全集 U 是怎样的集合.

解 (1) $\complement_U A=\{x \mid x\leqslant 2\}$.　(2) $\complement_U A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$.

(3) $\complement_U A=\{x \mid x=2\}$.

4. 集合的图示法

利用图示法可以帮助我们直观地理解集合与集合的交集、并集以及一个集合关于全集的补集等概念. 为此，读者应当能够画出集合的交、并、补的基本图示，并能将这些基本图示作一些简单的综合.

例 12 在图 1-1 中，用阴影表示 $\complement_U A\cap B$.

分析：$\complement_U A\cap B$ 是集合 $\complement_U A$ 与集合 B 的交集. 为了画出 $\complement_U A\cap B$ 的图示，可以先将图形分解，即先分别画出集合 $\complement_U A$（图 1-2(1)），集合 B（图1-2(2)），然后画出它们的交集（图 1-2(3)）.

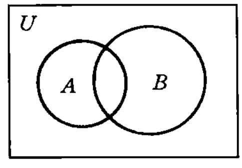
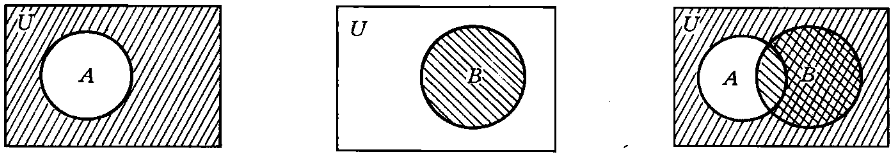


图 1-1

解　图 1－2(3)中两种不同阴影的重叠部分即为 $\complement_U A \cap B$.



$\complement_U A$　　　　B　　　　$\complement_U A \cap B$

(1)　　　　(2)　　　　(3)

图　1－2

【基本练习】

练　习　一

一、选择题*：

1. 下列各组中,P 与 Q 表示同一个集合的是　(　　)

(A) $P=\{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$,$Q=\{n,n-1,n-2,\cdots,2,1\}$;

(B) $P=\{(1,2)\}$,$Q=\{(2,1)\}$;

(C) $P=\{\pi\}$,$Q=\{3.1416\}$;

(D) $P=\varnothing$,$Q=\{0\}$.

2. 设 A 为集合,有下列三种表示式:

① $\varnothing \subseteq A$;　　② $\varnothing \subsetneqq \{0\}$;　　③ $\varnothing \in \{0\}$.

其中错误的表示式的个数是　(　　)

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 3.

3. 若 P 表示无理数集,则 $\mathbf{Q} \cap P$ 等于　(　　)

(A) 0;　(B) $\{0\}$;　(C) $\mathbf{R}$;　(D) $\varnothing$.

4. 如果集合 $A=\{x \mid x \in \mathbf{Z}, x \geqslant 0\}$,$B=\{y \mid y=x^2, x \in \mathbf{Z}\}$,那么集合 A 与 B 的关系是　(　　)

(A) $A \supsetneqq B$;　(B) $A \subsetneqq B$;　(C) $A=B$;　(D) A、B 互不包含.

5. 如果集合 $A=\{x \mid x \in \mathbf{Z}, x>0\}$,$B=\{x \mid -2<x<4, x \in \mathbf{Z}\}$,那么集合 $A \cap B$ 的子集个数是　(　　)

(A) 7;　(B) 8;　(C) 15;　(D) 16.

6. 若 A、B 为任意两个集合,U 为全集,且 $\complement_U A \supsetneqq \complement_U B$,则集合 A、B 的包含关

---

* 本书中的选择题,均有四个选择支,其中有且只有一个是正确的.

系为 ( )

(A) $B \supseteq A$; (B) $B \supsetneqq A$; (C) $A \supseteq B$; (D) $A \supsetneqq B$.

7. 设 $U=\mathbf{R}, M=\{x \mid x \leqslant 1+\sqrt{2}, x \in \mathbf{R}\}, S=\{1,2,3,4\}$,则 $\complement_U M \cap S$ 等于 ( )

(A) $\{4\}$; (B) $\{2,3,4\}$; (C) $\{3,4\}$; (D) $\{1,2,3,4\}$.

8. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,集合 $A=\{1,3,5,7\}, B=\{3,5\}$,则 ( )

(A) $U=A \cup B$; (B) $U=\complement_U A \cup B$;

(C) $U=A \cup \complement_U B$; (D) $U=\complement_U A \cup \complement_U B$.

二、填空题:

9. 设 $A=\{x \mid x=2^n, n \in \mathbf{N}^*\}, B=\{x \mid x=2n, n \in \mathbf{N}^*\}$,则 $A \cap B=$________; $A \cup B=$________.

10. 设全集 $U=\{a,b,c,d,e\}, A=\{a,c,d\}, B=\{b,d,e\}$,则 $\complement_U A \cap \complement_U B=$________.

11. 设全集 $U=\mathbf{R}, A=\{x \mid x \geqslant 1\}, B=\{x \mid -1 \leqslant x<2\}$,则 $\complement_U(A \cap B)=$________.

12. 已知集合 $A=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}, B=\{x \mid x \leqslant a\}$,若 $A \cap B \neq \varnothing$,则实数 a 的取值范围为____________.

13. 设 $A=\{x \mid x=2k+1, k \in \mathbf{Z}\}, B=\{x \mid x=3k, k \in \mathbf{Z}\}, P=\{x \mid -12 \leqslant x \leqslant 8\}$,则 $A \cap(B \cap P)=$________.

14. 设 $A=\{(x, y) \mid y=10x+7, x \in \mathbf{R}\}, B=\{(x, y) \mid y=3x^2+15, x \in \mathbf{R}\}$,则 $A \cap B=$____________.

三、解答题:

15. 已知全集 $U=\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbf{N}\}, A=\{x \mid 0<x \leqslant 10, x$ 为偶数$\}, B=\{x \mid 0<x \leqslant 10, x$ 为素数$\}$,求 $\complement_U(A \cup B)$ 的所有元素的积及 $\complement_U(A \cap B)$ 的所有元素的和.

16. 设 $A=\{x \mid x^2+px+q=0\}, B=\{x \mid x^2-px-2q=0\}$,且 $A \cap B=\{-1\}$,求 p、q 的值,并求 $A \cup B$.

二 四种命题的形式

【学习目标】

1. 理解推出关系及命题证明的意义.

2. 理解四种命题的形式及其相互关系.

3. 能写出一个简单命题的逆命题、否命题与逆否命题.

4. 进一步领会分类、判断、推理的思想方法.

【要点分析】

1. 命题的真或假都要证明

证明一个命题正确,可以从已知条件出发,依据所学过的公理、公式、定理逐步推理,得出结论.也就是说,要证明命题"若 α,则 β"正确,先设法找出一连串适当的,并且已知是正确的命题 $\alpha \Rightarrow \alpha_1, \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2, \cdots, \alpha_n \Rightarrow \beta$,由推出关系的传递性就可断言 $\alpha \Rightarrow \beta$.这种证明一般叫做直接证明.此外,还有间接证明,如反证法、同一法等.

要确定一个命题是假命题,只要举出一个满足命题条件,而不满足命题结论的例子就可以了.这在数学中称为举反例.美国数学家 B. R. 盖尔鲍姆、J. M. H. 奥姆斯特德在他们的名著《分析中的反例》中写道:"冒着过于简单化的风险,我们可以说(撇开定义、陈述以及艰苦的工作不谈)数学由两大类——证明和反例组成,而数学发现也是朝着两个主要目标——提出证明和构造反例".他们还说,"一个数学问题用一个反例予以解决,给人的刺激犹如一出好的戏剧.为数学作出的许多最优雅的艺术性很强的贡献属于这个流派".由此可见,举反例不但是一种重要的数学思想,也是命题证明(证明一个命题是假命题).举反例过去已不注意地用到,现在正式提出,值得我们重视.

推出关系是数学证明中很重要的,也是很基础的逻辑关系,希望在学习中多应用,以求达到熟练应用、正确应用的程度.

例 1 用举反例证明下列命题为假命题:

设 a、b、c 都是正整数,如果 ab 是 c 的倍数,那么 a、b 中至少有一个是 c 的倍数.

分析:只要取可分解为两个均大于 1 的正整数 k、l 积的数 c,并取 $a=k$、$b=l$ 即得所需要的反例.

解 若取 $c=15, a=3, b=5$,则 ab 是 c 的倍数,但 a、b 都不是 c 的倍数,因此已知命题是假命题.

例 2 设 $a^2+b^2+c^2=1$,且 $abc \neq 0$,则下列不等式中成立的是 ( )

(A) $(a+b+c)^2 \geqslant 1$;　　(B) $ab+bc+ca \geqslant \frac{1}{2}$;

(C) $|abc| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}$;　　(D) $a^3+b^3+c^3 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

分析：虽然 $a^2+b^2+c^2=1$，但 a、b、c 可以异号，因而(A)、(B)、(D)可能都是错的.如果能用举反例的方法证实前述的猜测，即可用淘汰某些选择支而达到解决本例的目的.

取 $a=b=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$c=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，则 $a^2+b^2+c^2=1$.但

$$(a+b+c)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3},\quad ab+bc+ca=a(b+c)+bc=-\frac{1}{3},$$

$$a^3+b^3+c^3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

由此可见，(A)、(B)、(D)都是错误的.

解 选(C).

说明 运用第二章将要学习的基本不等式，可以证明(C)正确.

构造反例不很容易，甚至有些反例的构造非常困难.有的反例非常精巧，令人拍案叫绝.构造反例要充分注意命题的条件和结论，还要注意极端情况，或运用类比手段.这些都希望读者在学习中留意和体会.

2. 四种命题的形式

由命题的条件、结论的改变，构成四种命题形式：原命题，逆命题，否命题，逆否命题.四种命题形式的构成虽然不难理解，但给出一种命题形式，要正确写出它的另外三种命题形式却不容易.解决这个难点的关键是分清命题的条件与结论.必要时可先将命题改写成“如果……，那么……”的形式.

另外，在写一个已知命题的否命题或逆否命题时，要把一个断语 α 正确地更变成它的否定断语 $\bar{\alpha}$，初学者在这些地方时常出错.一般地，“是”的否定断语为“不是”；“$>$”的否定断语为“$\leqslant$”；“$\geqslant$”的否定断语为“$<$”；“都是”的否定断语为“不都是”或“至少有一个不是”；等等.具体解题时，不要生搬硬套，要仔细思考，以保正确.

例 3 设 α 表示“对于数集 M 中一切 x，有 $x^2>0$”这件事，则 $\bar{\alpha}$ 表示 ( )

(A) 对一切 $x\in M$，有 $x^2<0$； (B) 对一切 $x\in M$，有 $x^2\leqslant 0$；

(C) 对 M 中某一个 x，有 $x^2\leqslant 0$； (D) 在 M 中不存在 x，使 $x^2>0$.

分析：为了说明问题，我们把 α 表示成“对于数集 M 中的一切 x，都有 $x^2>0$”，那么 $\bar{\alpha}$ 即是“数集 M 中至少有一个 x，使 $x^2\leqslant 0$”，它的等价说法是(C).

解 选(C).

例 4 (1) 写出命题“如果两个实数的和是有理数，那么这两个数都是有理