面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

微积分

第三版 下册

同济大学数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

微积分

Weijifen

第三版 下册

同济大学数学系 编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书参照新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合当前的教学实际，在原书第二版的基础上修订而成。在保持同济编教材优秀传统的同时，努力贯彻教学改革的精神，加强对微积分的基本概念、理论、方法和应用实例的介绍，突出微积分的应用。本书结构严谨，逻辑清晰，文字表述详尽通畅，平易近人，易教易学，改编后的内容编排也更利于教学的组织和安排。所选用的习题突出数学基本能力的训练而不过分追求技巧，既有传统的优秀题目，又从国外教材中吸取或改编了一些有较高训练效能的新颖习题。通过数学实验将微积分与数学软件的应用有机结合起来是本书的一个特色，经过改编，数学实验与教学内容的结合更加紧密，有利于培养学生的数学建模能力。书中有些内容用楷书排印或加了“*”号，教师可灵活掌握。本书可作为工科和其他非数学类专业的高等数学(微积分)教材或参考书。

全书分上、下两册出版。上册的内容为函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学和微分方程，四个与一元函数微积分相关的数学实验，附录中有数学软件 Mathematica 的简介。下册内容为向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，三个与多元微积分和级数有关的数学实验，附录中有矩阵与行列式简介。书末附有习题答案与提示。

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下册/同济大学数学系编. —3 版. —北京：高等教育出版社，2010.1

ISBN 978-7-04-028618-2

Ⅰ. 微… Ⅱ. 同… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 224353 号

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120

经　　销 蓝色畅想图书发行有限公司
印　　刷 北京中科印刷有限公司

开　　本 787×960 1/16
印　　张 21.75
字　　数 410 000

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育 http://www.widedu.com

版　　次 2001 年 1 月第 1 版
2010 年 1 月第 3 版
印　　次 2010 年 7 月第 2 次印刷
定　　价 26.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 28618-00

目　　录

第五章
向量代数与空间解析几何

VECTORS AND ANALYTIC GEOMETRY IN SPACE

自然界中的很多量既有大小又有方向，数学中的向量就是对这一类量的概括与抽象．向量在工程技术中有着广泛的应用，是一种重要的数学工具．向量可以用有向线段来表示（称为向量的几何表示）；在建立了空间直角坐标系后，又可用 3 个实数组成的有序数组表示（称为向量的坐标表示）．向量的坐标表示为我们把向量概念推广到更高维的空间开拓了道路．本章先讨论向量的这两种表示形式，接着通过几何形式定义向量的基本运算，并导出这些运算的坐标表示．有关向量的每一个结论，都有等价的几何表示形式和坐标表示形式，学习时要注意对比，切实掌握，并善于根据不同的问题采用最为方便的表示形式．本章第一部分向量代数所讨论的就是向量概念、向量之间的各种运算及其应用．

本章第二部分的内容是空间解析几何的基础知识．正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必不可少的．这部分内容包括空间的平面和直线方程，平面与直线的关系以及空间曲面、曲线的方程．在曲面方程中，我们着重讨论了柱面、旋转曲面及二次曲面的方程．在讨论平面和直线方程时，向量扮演了重要角色，抓住了平面的法向量和直线的方向向量，就抓住了这部分内容的纲．这是在学习时要充分注意的．

第一节 向量及其线性运算

一、向量概念

客观世界中有很多量，比如物体的体积，质量，两点间的距离，某一过程所需的时间等等，这种量只有大小、多少之分，因此只需用数字就可加以刻画，并且处理这些量的规则也与实数的运算规则相当，这些量被称为纯量(scalar). 然而，客观世界还存在这样一类量，例如位移、速度、加速度、力、力矩等等，这类量不仅有大小之分，还有方向之异，单纯用一个数字不足以描述它们. 处理这类量的规则也不再符合实数的运算规则，而遵循另外一些共同的规律. 人们把这类既有大小、又有方向的量称为向量(vector).

向量通常用黑体字母或上方加箭头的字母来记，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{v}$、$\vec{s}$、$\vec{F}$ 等等. 由于向量的两个要素是大小和方向，而具有这两个要素的最简单的几何图形是有向线段，故在数学中常用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量也记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$(图 5－1). 在以后的讨论中，我们对向量和表示它的有向线段不加区分，例如把有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 说成向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，或把向量 $\boldsymbol{a}$ 看成有向线段.

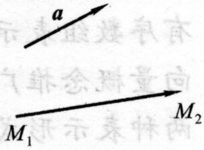


图 5－1

需要指出，数学上讨论的向量仅有大小和方向这两方面的属性，并不涉及向量的起点，因此如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的大小相同，方向一致，就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，并记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说，如果两个有向线段的大小和方向是相同的，则不论它们的起点是否相同，我们就认为它们表示同一个向量. 这样理解的向量叫做自由向量.

向量的大小叫做向量的模(norm). 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 模等于零的向量叫做零向量，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的方向可以看做是任意的.

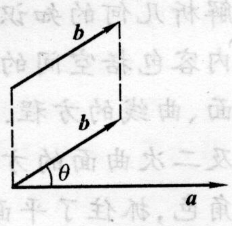


图 5－2

由于自由向量可在空间自由平移，因此可如下规定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角：将 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合后，它们所在的射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 5－2)，并记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.

两个非零向量如果它们的方向相同或者相反,就称这两个向量平行.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.由于零向量的方向可以看做是任意的,因此可以认为零向量与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共起点应在一条直线上,因此,两向量平行,又称两向量共线.

类似还有向量共面的概念.设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果 k 个终点和公共起点在一个平面上,就称这 k 个向量共面.

二、向量的加法与数乘运算

在实际问题中,向量与向量之间常发生一定的联系,并产生出另一个向量,把这种联系抽象成数学形式,就是向量的运算.本节先定义向量的加法运算以及向量与数的乘法运算,这两种运算统称为向量的线性运算.

1. 向量的加法

从物理与力学中我们知道,两个力、两个速度均能合成,得到合力与合速度,并且合力与合速度都符合平行四边形法则.由此实际背景出发,我们定义向量的加法如下:

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$.$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB、AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线是 AC,则向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 5-3).

以上规则叫做向量相加的平行四边形法则,但此法则对两个平行向量的加法没有做说明,而以下的法则不仅蕴含了平行四边形法则,还适用于平行向量的相加:

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,联结 AC,则向量 $\overrightarrow{AC}$ 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 5-4).

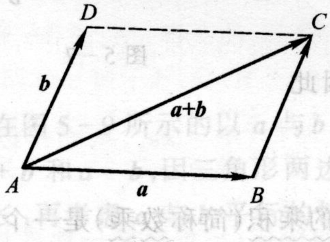


图 5-3

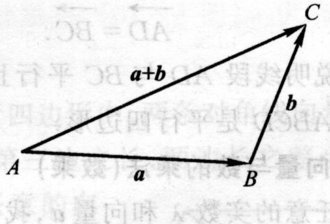


图 5-4

这一规则叫做向量相加的三角形法则.

向量的加法符合下列运算律:

(1) 交换律　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律　　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由向量加法的定义知，交换律是显然成立的．下面验证结合律．如图 5－5 所示，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再加上 $\boldsymbol{c}$，即得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，如以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得同样结果，所以结合律成立．

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、…、$\boldsymbol{a}_n$ $(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为后一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、…、$\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和．如图 5－6，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

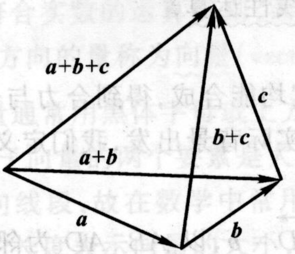


图 5－5

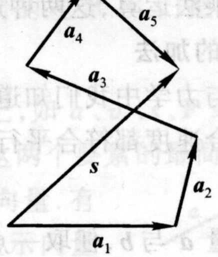


图 5－6

例 1 证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形．

证 设四边形 $ABCD$ 的对角线相交于 E，如图 5－7 所示，由于

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{ED},$$

故

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC},$$

即

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.$$

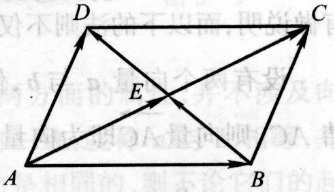


图 5－7

这说明线段 AD 与 BC 平行且长度相同，因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

2．向量与数的乘法（数乘）

对任意的实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$，我们定义 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积（简称数乘）是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$．

向量与数的乘积符合下列运算律：

(1) 结合律　$\lambda(\mu \boldsymbol{a})=\mu(\lambda \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

因为由向量与数的乘积的规定可知,向量 $\lambda(\mu \boldsymbol{a})$、$\mu(\lambda \boldsymbol{a})$、$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是互相平行的,它们的指向也是相同的,而且

$$|\lambda(\mu \boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda \boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|,$$

所以

$$\lambda(\mu \boldsymbol{a})=\mu(\lambda \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda \boldsymbol{a}+\mu \boldsymbol{a}$;

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda \boldsymbol{a}+\lambda \boldsymbol{b}.$$

分配律同样可按向量与数的乘积的规定来证明,这里从略.

对于向量 $\boldsymbol{a}$,称向量 $(-1)\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$,即

$$-\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a},$$

显然,$-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同,而方向相反.进而可规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差是向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $(-\boldsymbol{a})$ 的和(图 5－8(a)).

特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

显然,在图 5－8(a)中将向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(向右)平移,则 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 是由 $\boldsymbol{a}$ 的终点向 $\boldsymbol{b}$ 的终点所引的向量(图 5－8(b)).

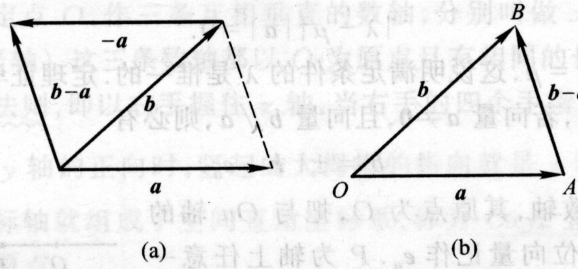


图 5－8

在图 5－9 所示的以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形中,两条对角线向量分别表示 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,因三角形两边长之和大于第三边之长,两边长之差小于第三边之长,再考虑 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的情况,于是对任意的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有不等式

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm \boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$,取 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$,则向量 $\lambda \boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同,且它的模

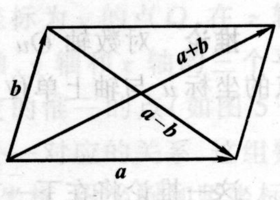


图 5－9

$$\left|\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1,$$

故$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记作 $\boldsymbol{e}_a$，即有 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 于是

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

这说明**任何非零向量可以表示为它的模与同向单位向量的数乘**.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此常用向量与数的乘积来判定两个向量的平行关系，即有如下的

定理 1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充要条件是存在惟一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 条件的充分性由数乘的定义即得. 下面证必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则取 $\lambda=0$ 即有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则由 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 知 $\boldsymbol{e}_b/\!/\boldsymbol{e}_a$，故 $\boldsymbol{e}_b=\pm\boldsymbol{e}_a$（$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时取正号，反向时取负号）. 于是

$$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_b=|\boldsymbol{b}|(\pm\boldsymbol{e}_a)=|\boldsymbol{b}|\left(\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right)=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}, \tag{1}$$

取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$（当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时），或 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$（当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时），就有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

如果另有实数 μ 满足 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，则两式相减得

$$\boldsymbol{0}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a},$$

从而

$$|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

由于 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，故 $\lambda=\mu$. 这说明满足条件的 λ 是惟一的. 定理证毕.

从(1)式可知，若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，则必有

$$\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_a. \tag{2}$$

现设 Ou 为数轴，其原点为 O，把与 Ou 轴的正向同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{e}_u$. P 为轴上任意一点，其坐标为 u（图 5－10）. 根据轴上一点的坐标的定义，$u=\pm|\overrightarrow{OP}|$（当 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{e}_u$ 同向时取正，反向时取负）. 现将(2)式中的 $\boldsymbol{b}$ 换成 $\overrightarrow{OP}$，$\boldsymbol{e}_a$ 换成 $\boldsymbol{e}_u$，即得 $\overrightarrow{OP}=u\boldsymbol{e}_u$，从而得以下推论：

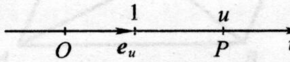


图 5－10

推论 对数轴 Ou 上的任意一点 P，轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 都可惟一地表示为 P 点的坐标 u 与轴上单位向量 $\boldsymbol{e}_u$ 的乘积

$$\overrightarrow{OP}=u\boldsymbol{e}_u.$$

这一推论将在下一节用来建立向量的坐标表达式.

习题 5－1

1. 设 A、B、C 为三角形的三个顶点，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

2. 已给正六边形 $ABCDEF$（字母顺序按逆时针向），记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}$ 和 $\overrightarrow{CB}$.

3. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 来表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

4. 用向量法证明：三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边长度的一半.

5. 设 C 为线段 AB 上一点且 $|CB|=2|AC|$，O 为 AB 外一点，记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 来表示 $\boldsymbol{c}$.

第二节　点的坐标与向量的坐标

一、空间直角坐标系

为了沟通空间的点与数、图形与方程的联系，我们先引进空间直角坐标系.

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，分别叫做 x 轴（横轴），y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴）. 这三条数轴都以 O 为原点且有相同的长度单位，它们的正方向符合右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时，竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向（图 5－11）. 这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 直角坐标系，点 O 称为该坐标系的原点.

设 M 是空间的一点，过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴并交 x 轴、y 轴和 z 轴于 P、Q、R 三点. 点 P、Q、R 分别称为点 M 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影点. 设这三个投影点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x、y 和 z，于是空间一点 M 惟一地确定了一个有序数组 x、y、z. 反过来，对给定的有序数组 x、y、z，可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，过点 P、Q、R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x、y、z 确定的惟一的点（如图 5－12）. 这样，空间的点与有序数组 x、y、z 之间就建立了一一对应的关系. 这组数 x、y、z 称为点 M 的坐标，依次称 x、y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，并可把点 M 记为 $M(x,y,z)$.

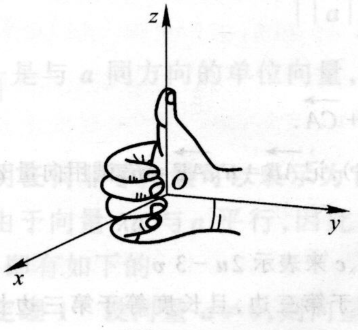


图 5-11

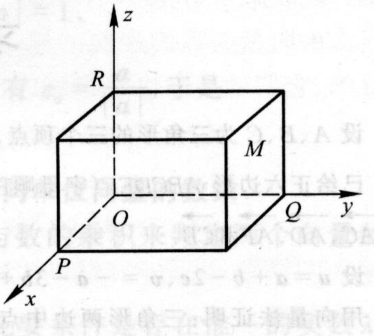


图 5-12

三条坐标轴中每两条可以确定一个平面，称为坐标面，由 x 轴和 y 轴确定的坐标面简称为 xOy 面，类似地还有 yOz 面与 zOx 面. 这三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个卦限. 如图 5-13 所示，八个卦限分别用罗马字Ⅰ、Ⅱ、…、Ⅷ表示，第一、二、三、四卦限均在 xOy 面的上方，按逆时针方向排定，其中在 xOy 面上方并在 yOz 面前方、zOx 面右方的是第一卦限；第五、六、七、八卦限均在 xOy 面的下方，也按逆时针方向排定，它们依次分别在第一至四卦限的下方.

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$、$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两点，为了表达 P_1 与 P_2 之间的距离，我们过 P_1 和 P_2 各作三个分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面. 这六个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体(图 5-14). 从图中易见该长方体各棱的长度分别是

$$|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|.$$

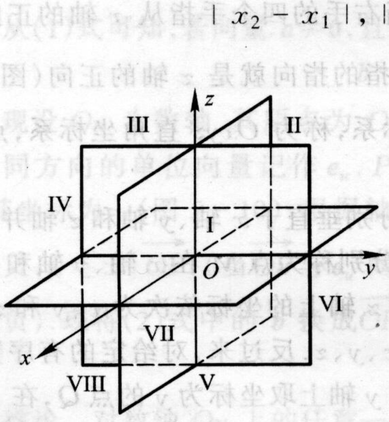


图 5-13

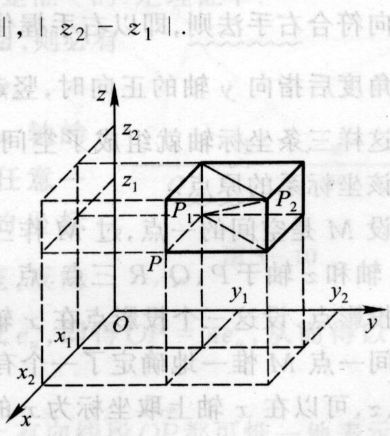


图 5-14

于是得对角线 P_1P_2 的长度，亦即空间两点 P_1、P_2 的距离公式为

$$\boxed{|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.} \tag{1}$$

例 1　证明：以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证　因为
$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6,$$
有 $|M_1M_3|=|M_2M_3|$. 故 $\triangle M_1M_2M_3$ 是等腰三角形.

例 2　所有与原点的距离为常数 r 的点的坐标 x、y、z 应满足什么方程？把这些点的集合表示出来.

解　设 $M(x,y,z)$ 是满足题设条件的任一点，原点是 $O(0,0,0)$，按题设，$|OM|=r$，即有
$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r,$$
或
$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$
这就是所求的方程.

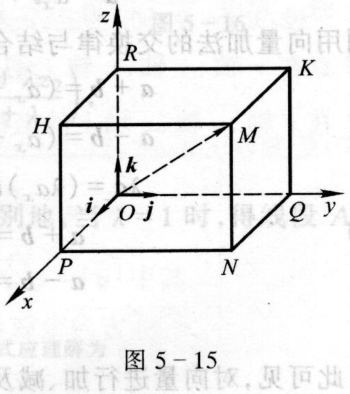
记所有与原点距离为 r 的点组成集合 B，则
$$B=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=r^2\},$$
它是中心在原点，半径为 r 的球面.

二、向量的坐标及向量线性运算的坐标表示

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，分别以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 记 x 轴、y 轴、z 轴上与该轴正向同方向的单位向量（称为 $Oxyz$ 坐标系下的标准单位向量）. 任给向量 $\boldsymbol{a}$，总可通过平移使其起点位于原点 O，从而有对应点 M，满足 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$. 以 OM 为对角线作长方体 $RHMK-OPNQ$（图 5－15），则 M 点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影点为 P、Q 和 R，有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

设 P、Q、R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 a_x、a_y、a_z（即点 M 的坐标为 (a_x,a_y,a_z)），则由上节定理 1 的推论知，



$$\overrightarrow{OP}=a_x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OQ}=a_y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OR}=a_z\boldsymbol{k}.$$

图 5－15

因此
$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}. \qquad (2)$$

(2)式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的标准分解式，(2)式的右端称为向量 $\boldsymbol{a}$ 关于标准单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的线性组合，$a_x\boldsymbol{i}$、$a_y\boldsymbol{j}$、$a_z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴方向的分向量（component）.

显然，给定向量 $\boldsymbol{a}$，就确定了点 M 及$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$三个分向量，进而确定了有序数组 a_x、a_y、a_z；反之，给定了有序数组 a_x、a_y、a_z，则由(2)式也就确定了向量 $\boldsymbol{a}$. 于是向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组a_x、a_y、a_z 之间有一一对应的关系：

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \longleftrightarrow a_x, a_y, a_z,$$

据此我们把有序数组 a_x、a_y、a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$（在坐标系 $Oxyz$ 中）的坐标（也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的分量），记作

$$\boxed{\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z).} \tag{3}$$

(3) 式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式(coordinates).

空间任何一点 $P(x,y,z)$，都对应一个向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$，称为 P 点（关于原点）的向径. 由向量坐标的定义知 $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$，即一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号(x,y,z)既表示点 P，又表示$\overrightarrow{OP}$，要注意从上下文中加以区别.

由于向量与其坐标是一一对应的，因此**两个向量相等的充分必要条件是其坐标对应相等**.

如果给定了向量的坐标表达式，则可方便地进行向量的加法、减法以及向量与数的乘法.

设

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

即

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量加法的交换律与结合律，以及向量与数乘法的结合律与分配律，有

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k}\ (\lambda \text{ 为实数}),$$

即

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

由此可见，对向量进行加、减及与数相乘，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了.

定理 1 指出，当向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，坐标表示式为

$$(b_x, b_y, b_z) = \lambda(a_x, a_y, a_z),$$

这也就相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例：