电动力学题解

东北师范大学函授教育处

东北师范大学物理函授教材

电动力学题解

东北师范大学函授教育处

1982．10．长春

目　　录

第一章　电磁现象的普遍规律……（1）

复习思考题解……（1）

习题解……（12）

第二章　静电场和稳恒磁场……（46）

复习思考题解……（46）

习题解……（61）

第三章　电磁波的传播……（138）

复习思考题解……（138）

习题解……（148）

第四章　电磁波的辐射……（178）

复习思考题解……（178）

习题解……（187）

第五章　狭义相对论……（229）

复习思考题解……（229）

习题解……（246）

第六章　矢量分析……（295）

习题解……（295）

第一章 电磁现象的普遍规律

复习思考题解

1. 电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{J}$ 都是怎样定义的？它们之间有什么样关系？面电荷密度 σ 和面电流的线密度 α 又是怎样定义的？它们之间应该有什么样的关系？

如果仅知道一个电介质球内到处有有限的体电荷密度 $\rho(\mathbf{x})$，你能够说出球体表面的面电荷密度 σ 吗？

答：电荷分布的体密度 $\rho(\mathbf{x})$ 的定义是

$$\rho(\mathbf{x})=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V},$$

其意义为单位体积内的电量。

电流密度 $\mathbf{J}$ 的定义是

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})=\rho(\mathbf{x})\,\mathbf{v},$$

式中 $\rho(\mathbf{x})$ 是形成电流的带电粒子——载流子的平均体密度，$\mathbf{v}$ 是载流子的定向运动的平均速度。$\mathbf{J}$ 的大小就是单位时间通过垂直于载流子运动方向的单位面积的电量，$\mathbf{J}$ 的方向就是 $\mathbf{v}$ 的方向。

电流密度 $\mathbf{J}$ 的定义反映了 ρ 和 $\mathbf{J}$ 的相互关系。但 $\mathbf{J}$ 和 ρ 二者之间更重要的关系是由电荷守恒定律所反映的。在一

种介质内，有

$$\oint \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=-\frac{d}{dt}\int\rho dV.$$

在两种介质的界面上可以有面电荷分布，面电荷的密度定义为

$$\sigma(\mathbf{x})=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S},$$

其意义为曲面上单位面积的电量。

曲面上的电荷运动时形成面电流，其线密度定义为

$$\boldsymbol{\alpha}=\sigma\mathbf{v}.$$

其大小的意义是单位时间通过垂直于 $\mathbf{v}$ 方向的单位长度的电量。其方向为 $\mathbf{v}$ 的方向。

当任何一个闭曲面 S 包围的区域里含有面电流及面电荷的曲面 S' 时，电荷守恒定律表现为

$$\oint \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}+\oint_L \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{N}dl=-\frac{d}{dt}\left[\int\rho dV+\int_{S'}\sigma dS'\right],$$

式中闭合曲线积分的路径 L 是曲面 S' 同闭合曲面 S 的交线。

仅知道电介质球内的 ρ 并不能说出球体表面的面电荷密度，表面的面电荷密度 σ 必须另外给出才行。如果没有另外给出表面的 σ，而球内的 ρ 又处处有限，这样的体分布电荷其表面的面电密度就是零。

2. 真空中电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 是如何定义的？介质中的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 又是如何定义的？能不能也用试探电荷在介质中受力来定义介质中的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$？

答：真空中的电场强度 $\mathbf{E}$ 是用静止的试探电荷受到的

电力根据（1.2.1）式定义的：

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}_e}{q}.$$

而磁感应强度 **B** 则是用同一个试探电荷先后两次以互相垂直的速度通过磁场受到的磁力，根据（1.2.5）式

$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{F}_{m1}\times\mathbf{v}_1}{qv_1^2}-\frac{\mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{v}_2\times\mathbf{F}_{m2})}{qv_1^2v_2^2}\mathbf{v}_1,\ (\mathbf{v}_1\perp\mathbf{v}_2)$$

来定义的。如果试探电荷以 $\mathbf{v}_2$ 运动时不受力，$\mathbf{F}_{m2}=0$，则

$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{F}_{m1}\times\mathbf{v}_1}{qv_1^2}.\qquad(\mathbf{v}_1\perp\mathbf{v}_2)$$

实质上 **E** 和 **B** 都是根据带电粒子在电磁场中受到的洛仑兹力作用

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

的性质而定义的。

介质中的 **E** 和 **B** 都定义为微观场的空间平均值。这里的微观场包括了全部电荷、电流在真空中产生的 **E** 和 **B**. 这里所说的全部电荷、电流包括介质极化产生的束缚电荷、极化电流和磁化时产生的磁化电流在内。

把试探电荷直接放入介质由其受到的电磁力来定义 **E** 和 **B** 是不行的，带电体在介质内受到的力是个复杂的问题，除了电磁力之外，还存在着机械的张力（其本质也是电磁力），其受力不能简单地用洛仑兹力来表示，因而不能象真空时那样用试探电荷定义 **E** 和 **B**。

但是，可以在介质中挖适当形状的空腔，把试探电荷置

于腔内，根据其受力来定义介质中的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$。可参考习题 9。

3. 我们既然把高斯定理推广为普遍适用的规律，而高斯定理又是从库仑定律推导出来的，能不能说库仑定律也是普遍适用的？

答：不能。高斯定理是库仑定律的必要条件，高斯定理表达了库仑定律所表示的静电场的属于电场的普遍性质的一个方面，高斯定理表达的是电场的共性。习题 2 中指出，必须附加补充条件才能从高斯定理导出库仑定律。

4. 麦克斯韦方程组中

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0$$

和

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

是总结哪些实验定律得到的？

答：是总结稳恒电流磁场的规律毕奥——萨伐尔定律和磁荷不存在而得到的。

5. 麦克斯韦方程组中

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{s}$$

和

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

是总结什么实验规律得到的？对这两个公式的理解与原来的实验规律相比，有哪些推广和深化？

答：是总结法拉弟电磁感应定律得到的。详细讨论参看

教材§1.3。

6. 建立麦克斯韦方程组中

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}+\int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{s}$$

和

$$\nabla \times \mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

时，依靠哪些实验规律？引入位移电流的重要意义是什么？位移电流的本质是什么？

答：根据毕奥——萨伐尔定律和电荷守恒定律的要求，引入位移电流而总结出来的。详细讨论参看教材§1.4。

7. 极化强度 **P**、束缚电荷 ρ_p 和极化电流 $\mathbf{J}_p$ 都是怎样定义的？它们彼此之间有什么关系？

答：极化强度 **P** 是按（1.7.4）式定义的：

$$\mathbf{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V}.$$

束缚电荷是由于介质被极化之后，由于 **P** 的不均匀而造成的宏观电荷分布。由（1.7.7）式，

$$\rho_p=-\nabla\cdot\mathbf{P}.$$

全部的束缚电荷（包括介质界面上的面束缚电荷在内）的总量应当为零。

束缚电荷在其平衡位置附近的运动相应的电流就是极化电流。由（1.7.8）式

$$\mathbf{J}_p=\dot{\mathbf{P}}.$$

除了由（1.7.7）及（1.7.8）表示的 ρ_p，$\mathbf{J}_p$ 同 **P** 的关

系外，习题第10题还指出ρ_p和$\mathbf{J}_p$之间还满足

$$\nabla\cdot\mathbf{J}_p=-\frac{\partial\rho_p}{\partial t}.$$

8. 摩擦电介质使之带有电荷，这样的电荷算做自由电荷还是束缚电荷？

答：这样的电荷是自由电荷。束缚电荷必须是由（1.7.7）式所表示的，其总量为零。而摩擦使电介质带的净电荷总量不为零，不是由（1.7.7）表示的，由于极化不均匀造成的。虽然这样的电荷不能在电介质中自由移动，但它仍是自由电荷。不要把自由电荷等同导体中的自由电子。

9. 使绝缘导体感应带电，这样的电荷应算做自由电荷还是束缚电荷？

答：这样的电荷是自由电荷。它不是由极化不均匀造成的，虽然感应电荷的总量为零，也不是束缚电荷。

10. 磁化强度$\mathbf{M}$和磁化电流$\mathbf{J}_M$是怎样定义的？它们之间有什么关系？

答：磁化强度是按（1.7.9)式定义的

$$\mathbf{M}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum\mathbf{m}}{\Delta V}.$$

由于磁化不均匀，使得穿过磁介质中曲面S的分子电流总和不为零，这就是通过S面的磁化电流。由（1.7.10a）式

$$\mathbf{J}_M=\nabla\times\mathbf{M}.$$

11. 电位移矢量$\mathbf{D}$和磁场强度$\mathbf{H}$都是怎样定义的？为什么要引入这两个物理量？从原则上说不引入它们是否可以？

答：电位移矢量$\mathbf{D}$是按（1.7.11）式定义的：

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}.$$

它是一个辅助物理量，是两个不同性质的物理量 **E** 和**P**的组合，引入 **D**只是一个手段，可以把介质中的电场散度方程简化为只同自由电荷有关。

磁场强度**H**是按（1.7.14）式定义的：

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M}.$$

它也是一个由两个不同意义的物理量相加而成的辅助物理量。引入 **H** 可以把关于 **B** 的旋度的方程简化，使之只同自由电流有关。由于在实际问题中最容易控制的是自由电流，因而引入 **H** 是有实际用途的。

从原则上看，当然不引入 **D** 和 **H** 也可以描述介质中的电磁场。

12．积分形式的麦克斯韦方程组和微分形式的二者的适用范围是否相同？

答：积分形式和微分形式的麦克斯韦方程组都是普遍适用的电磁现象基本规律。但是从它们可以用于的空间区域看，二者是有不同的。微分形式的麦克斯韦方程组只能用于场连续分布的区域，这时对场量求空间导数才有意义。而积分形式的，则对任何空间区域都可以应用。一般地在两种介质界面处场量将不连续，必须用边值关系代替微分形式的公式，而积分形式的在含有界面的区域同样适用。

13．为什么要讨论边值关系？矢量物理量的边值关系我们讨论了哪两种类型？总结一下你所能写出的各种物理量的边值关系。

答：由于微分形式的方程中出现的物理量在两种介质界面处会发生突变，不再是坐标的连续函数，这类微分方程在

边界处失去意义，不再适用。边值关系就代替了这些微分方程，反映了在界面两侧有关的物理量之间的关系。边值关系就是相应的微分方程在边界处的体现。

我们讨论了矢量物理量在边界处的法向分量的边值关系和切向分量的边值关系。如果某一矢量 $\mathbf{A}$ 在某一区域内满足

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\rho, \tag{1}$$

式中 ρ 表示某一物理量的体密度，则对应这一方程，在两个区域界面处就有相应的 $\mathbf{A}$ 的法向边值关系

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)=\sigma, \tag{2}$$

式中 σ 是相应 ρ 这个物理量的面密度。

如果两个任意的矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{j}$ 在某一区域里满足

$$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{j}, \tag{3}$$

则在这些矢量发生突变的界面上一定有

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)=\mathbf{i}, \tag{4}$$

式中 $\mathbf{i}$ 是与 $\mathbf{j}$ 相应的物理量在界面上的线密度。

（2）、（4）两式可由（1）、（3）两式的积分形式仿照（1.8.4）及（1.8.20）的导出过程来证明。凡是形式如（1）、（3）的微分方程都有相应（2）、（4）形式的边值关系，读者可自行总结遇到的微分方程对应的边值关系。

14. 在$\mathbf{H}$的切向分量的边值关系

$$H_{2t}-H_{1t}=\alpha_N$$

中，切向方向的两个单位矢量 $\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{N}$ 是否可以任意选取？它们之间是否有一定的关系？

答：切向方向的单位矢量 $\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{N}$ 中只有一个可以任意

选取，选定一个之后，另一个则由（1.8.10）式

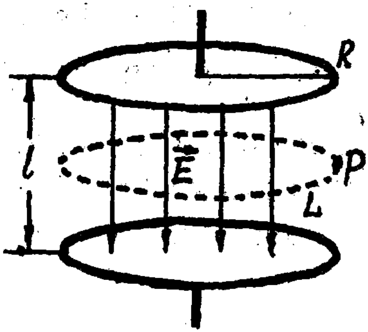
$$\mathbf{N}\times\mathbf{n}=\mathbf{t}$$

确定。这里的 $\mathbf{n}$ 是由介质Ⅰ指向介质Ⅱ的界面法向单位矢量。

15. 说明坡印亭定理各项的物理意义。

答：参看教材§1.9的讨论。

16. 试从坡印亭定理的观点来定性说明电容器的充放电过程。



题 16 图

答：为讨论简单，设电容器极板中间为真空。充电过程假定上极板带正电，某一时刻的电荷密度为 σ，则这时电容器内电场强度为

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0},\qquad(1)$$

方向向下（见图）。充电时 $\mathbf{E}$ 的大小是增加的，从而位移电流

$$j_d=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

的方向也是向下的。

忽略电容器边缘效应，认为其电场是均匀的，则位移电流也是均匀分布在两极板中间。过电容器边缘 P 点做一平行极板的圆形闭合回路，根据安培环路定理

$$\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int\mathbf{j}_d\cdot d\mathbf{s},$$

认为L上H的值都相同，则

$$2\pi RH=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\pi R^2,$$

$$\therefore H=\frac{R}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \qquad (2)$$

其方向，由于 $\mathbf{j}_d$ 方向向下，P点 $\mathbf{H}$ 方向是向前的。

过P点的坡印亭矢量 $\mathbf{S}$ 大小为

$$S=|\mathbf{E}\times\mathbf{H}|=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\frac{\partial\sigma}{\partial t},$$

其方向由 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的方向决定，正好是向左的，表示有能量从电容器四周流入电容器。

在充电过程中电容器内的电磁场能能量密度为

$$w=\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2+\mu_0 H^2),$$

充电结束时，$\partial\sigma/\partial t=0$，电容器内电场能量密度为

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0},$$

式中σ为充电结束后电容器极板上电荷密度。若两极板间距离为d，则总电场能为

$$W=wV=\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\pi R^2 d. \qquad (3)$$

在整个充电过程中，流入电容器的总电磁能量为

$$W=2\pi Rd\int S dt$$

$$=2\pi Rd\int\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\frac{\partial\sigma}{\partial t}dt$$

$$=\frac{\pi R^2 d}{\varepsilon_0}\int_0^{\sigma}\sigma d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\pi R^2 d,$$

将上式同（3）式相比，可见，电容器充电完了之后，其中电场能正是充电过程中从电容器四周以坡印亭矢量形式"流入"的总电磁能。

可以类似讨论放电过程。与上述讨论不同之处在于放电时电容器内电场 **E**的大小是减少的，因而位移电流 $\mathbf{j}_d$ 的方向是向上的，相应的P点的磁场 **H** 的方向是向里的，**S** 的方向则指向右边，电磁能量是从电容器向外"流出"的。很容易看出，放电过程流出的电磁总能量正好等于放电前电容器内电场的总能量。

17. 将一维波动方程的通解（1.6.9）式代入方程（1.6.8）式，验证解是正确的。

解：解（1.6.9）为

$$E_x(z)=f_1(z-ct)+f_2(z+ct),$$

我们来考虑第一项 $f_1(z-ct)$，注意到

$$\frac{\partial(z-ct)}{\partial z}=1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(z-ct)}{\partial t}=-c. \tag{2}$$

则

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial f_1}{\partial(z-ct)}\ \frac{\partial(z-ct)}{\partial z}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_1}{\partial(z-ct)}\right)=\frac{\partial^2 f_1}{\partial(z-ct)^2}\ \frac{\partial(z-ct)}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial^2 f_1}{\partial(z-ct)^2}. \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial f_1}{\partial(z-ct)}\ \frac{\partial(z-ct)}{\partial t}\right]$$

$$=(-c)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_1}{\partial(z-ct)}\right)=-c\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial(z-ct)^2}\ \frac{\partial(z-ct)}{\partial t}$$

$$=c^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial(z-ct)^2}. \tag{4}$$

将（3）、（4）代入（1.6.8）式中

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial(z-ct)^2}-$$

$$-\frac{1}{c^2}c^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial(z-ct)^2}=0.$$

对 $f_2(z+ct)$ 亦可得到同样的结果，于是（1.6.9）确实为（1.6.8）的解。

习 题 解

1. 若 **A**、**B** 是任意矢量场，证明

$$\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S})=\int_V[\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}]dV.$$

证：上式左端的 x 分量为

$$\oint A_x(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S})=\oint(A_x\mathbf{B})\cdot d\mathbf{S}.$$

对右端用高斯定理，由于 $A_x\mathbf{B}$ 为矢量，有

$$\oint (A_x\mathbf{B})\cdot d\mathbf{S}=\int \nabla\cdot(A_x\mathbf{B})dV$$

$$=\int[\mathbf{B}\cdot\nabla A_x+A_x\nabla\cdot\mathbf{B}]dV$$

$$=\int[(\mathbf{B}\cdot\nabla)A_x+A_x(\nabla\cdot\mathbf{B})]dV$$

$$=\int[(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})]_x dV.$$

类似地还可以写出 y、z 分量表示式，将它们分别乘以 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$，相加即得

$$\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S})=\int_V[\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}]dV.$$

2. 试从高斯定理导出静止点电荷间相互作用力的库仑定律。在导出过程中除了用高斯定理外，还需要补充哪些条件？

解：由于点电荷的对称性，假定点电荷的电场强度 $\mathbf{E}$ 的大小仅是 r 的函数，并假定 $\mathbf{E}$ 的方向是沿 $\mathbf{r}$ 方向的，则由高斯定理可以求出点电荷周围电场为

$$\mathbf{E}=\frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

于是，在 $\mathbf{r}$ 处的点电荷 q' 受到的电场力为

$$\mathbf{F}=q'\mathbf{E}=\frac{qq'\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

这就是库仑定律。可见，必须对点电荷的电场附加上 $|\mathbf{E}|$ 仅是 r 的函数，其方向沿 $\mathbf{r}$ 才能从高斯定理导出库仑定律。高斯定理并不是库仑定律的充分条件，一般地说，仅用高斯定理不能唯一确定电场。

3. 充有电荷的球形电容器由于电介质漏电而在介质内

产生径向漏电电流，证明漏电电流在介质内产生的磁感应强度**B**为零。

证：根据麦克斯韦方程组（V）式

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

在球形电容器情况，**E**是沿着**r**方向的，与θ和ϕ无关，用球坐标系旋度表达式立刻可以看到

$$\nabla\times\mathbf{E}=0,$$

因而**B**必定为常量。但是当电容器经过足够长时间放电完了之后，显然**B**应该等于零，因而在任何时刻**B**均应为零。

证法二：因为球形电容器是中心对称的，**B**必然只有B_r分量，B_θ、B_ϕ均应为零。在球形电容器介质中做电容的同心球面S，则

$$\oint_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\oint_S B_r dS=4\pi r^2 B_r,$$

根据麦克斯韦方程组（Ⅳ）式，

$$\oint_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0,$$

所以

$$B_r=0,$$

由于B_θ、B_ϕ均为零，最后得$\mathbf{B}=0$。

4. 在第二章中我们将定义电荷体系的电偶极矩为

$$\mathbf{p}=\int_V\rho(\mathbf{x}',t)\mathbf{x}'dV',$$

（1） 证明，若体系的总电量为零

$$\int\rho(\mathbf{x}',\ t)dV'=0,$$