科学版

研究生教学丛书

# 应用常微分方程

葛渭高 田 玉 廉海荣 著

科学出版社
www.sciencep.com

科学版研究生教学丛书

# 应用常微分方程

葛渭高　田　玉　廉海荣　著

科学出版社

北　京

## 内 容 简 介

与偏重理论体系完整、推理严谨的理科教材不同，本书侧重从应用的需要出发介绍常微分方程的理论和方法. 力求概念准确清晰，理论有据，方法实用，并将这些方法和数值计算、微分方程建模结合起来.

本书突出了非线性常微分方程与线性微分方程，隐式微分方程与显式微分方程的差异，介绍了分支、混沌等非线性问题中的特有现象，有助于理解非线性问题的复杂性. 在线性微分系统的求解中，吸收作者的科研成果，用微分算子法作为求解的普遍方法，用算子多项式分解及算子矩阵的伴随阵，将微分算子法用于变系数高阶线性方程和常系数线性微分系统的通解计算. 书中有大量计算示例和模型构建实例. 可以对方法的掌握起到导引作用.

本书可供需要学习常微分方程理论的工科高年级学生和研究生作为教材或阅读之用. 也可供教师、科研人员及理科学生参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

应用常微分方程/葛渭高，田玉，廉海荣著. —北京：科学出版社，2010
(科学版研究生教学丛书)
ISBN 978-7-03-027506-6
Ⅰ. 应… Ⅱ. ①葛… ②田… ③廉… Ⅲ. 常微分方程-研究生-教材
Ⅳ. O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 083408 号

责任编辑：王丽平 房 阳 / 责任校对：鲁 素
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 6 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2010 年 6 月第一次印刷 印张：20 1/2
印数：1—3 000 字数：403 000

**定价：59.00 元**
(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

常微分方程是理科学生，尤其是数学类专业学生的一门必修课程. 同时，由于常微分方程与实际问题联系密切，随着科学技术的发展，多数工科学生也需要掌握常微分方程的基本理论和方法，以便从理论上提升实验或经验成果.

迄今为止，国内外为理科学生编写的教材为数众多，但适合工科学生的教材寥寥无几. 这两类教材包含相同的核心内容，即常微分方程的基本理论和方法，但前者侧重于理论的缜密、完整和深入；后者更关注理论与实际的结合，偏重于方法的运用.

鉴于此，本书是一本为工科高年级学生和研究生学习常微分方程而撰写的教材，以理论有据、方法通用、联系实际为目标. 因此，书中对常微分方程的基本定理给出了数学的论证，而对这些原理的更深层次的数学基础引而不证；对方程求解除了传统的初等积分方法外，还介绍了数值解的方法和数学软件的使用；结合实际问题讨论了建立常微分方程模型的原则. 考虑到多数工科学生初学时对纯数学推导会不很适应，建议对第 1 章中的基本定理以理解定理的条件和结论为主，在学过本书后再回到 1.3 节体会证明的方法和要点.

全书分 5 章. 第 1 章讲授常微分方程的概念和基本定理. 第 2 章在介绍微分算子相关运算的基础上，讨论线性微分方程和线性微分系统通解的构成，讲解用算子法解齐次和非齐次系统的方法. 第 3 章讲授非线性微分方程和系统，除一阶方程的求解外，重点讨论因非线性而产生的解的非唯一性、分支和混沌现象. 第 4 章讲授微分方程数值解. 第 5 章讲解建立常微分方程数学模型的原则和过程. 数学软件的应用分散在第 2~5 章，结合各类求解方法的讲授而作简要介绍.

书末的附录给出了常系数高阶齐次线性微分系统基本解组中线性无关解的个数，讨论了非齐次系统的可解性和初值问题的提法. 其中线性无关解个数的论证，实际给出了寻求基本解组的途径.

本书的出版得到了北京理工大学研究生院的资助，谨致谢意.

书中疏漏不当之处，敬请专家、读者指正.

作　者

2010 年 1 月于北京

# 目　录

# 第 1 章　基本概念、预备知识及基本定理

## 1.1　基 本 概 念

### 1.1.1　常微分方程

常微分方程及常微分系统 (即常微分方程组) 是本课程研究的主要对象.

**定义 1.1**　设未知变量 $x$ 是自变量 $t$ 的一元函数, 将自变量 $t$, 未知变量 $x$ 及 $x$ 的直至 $n$ 阶的导数 $x^{(n)}$ 联系起来的等式

$$F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0,\qquad n\geqslant 1 \tag{1.1}$$

称为一个**常微分方程**, 其中 $x$ 关于 $t$ 的最高求导阶次 $n$ 称为常微分方程的阶. 当 $n$ 确定时, (1.1) 称为一个**$n$ 阶常微分方程**.

例如,

$$x'=ax, \tag{1.2}$$

$$x'=a(t)x+b, \tag{1.3}$$

$$x'=ax-bx^2,\quad b\neq 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{x}{t}=\frac{2x'}{1-(x')^2}, \tag{1.5}$$

$$x''+ax'+bx=0, \tag{1.6}$$

$$t^2x''+tx'+(t^2-a^2)x=0, \tag{1.7}$$

$$(EJ(t)x'')''=q(t), \tag{1.8}$$

各等式中都含有一元未知函数 $x=x(t)$ 的导数, 因此每个等式都是一个常微分方程, 其中方程 (1.2)~(1.5) 是一阶常微分方程, (1.6), (1.7) 是二阶常微分方程, 而 (1.8) 则是一个 4 阶常微分方程.

对于一般形式的常微分方程 (1.1), 当未知函数的最高求导阶次从等式中解出后, 得到形式为

$$x^{(n)}=f(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)}) \tag{1.9}$$

的方程, 称为**$n$ 阶显式常微分方程**, 简称显式方程. 依据这一概念, 方程 (1.2)~(1.4) 都是一阶显式常微分方程, 方程 (1.5)~(1.8) 则都不是显式常微分方程, 称为**隐式常微分方程**, 简称隐式方程.

显然, 很多情况下隐式方程可以通过解出 $x^{(n)}$ 而成为显式方程. 例如,

$$(x')^2 + 2x' - x = 0$$

是一个隐式方程, 但它可以解出 $x'$, 得到两个显式方程:

$$x' = -1 + \sqrt{1+x}, \quad x \geqslant -1,$$

$$x' = -1 - \sqrt{1+x}, \quad x \geqslant -1,$$

在这种情况下, 对方程作显式和隐式的区分, 只是一种形式上的分类. 但是应该注意, 1.3 节所给的常微分方程基本定理都是针对显式常微分方程给出的, 因而读者需掌握这种形式上的分类.

**定义 1.2**　设未知变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 都是自变量 $t$ 的一元函数, 联系自变量 $t$, 变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 及其最高为 $n$ 阶的各阶导数的 $m$ 个等式

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, \cdots, x_m, x_1', \cdots, x_m', \cdots, x_1^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)}) = 0, \\ \cdots\cdots \\ F_m(t, x_1, \cdots, x_m, x_1', \cdots, x_m', \cdots, x_1^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)}) = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

称为 $m$ 个未知变量的**$n$ 阶常微分方程组**或**常微分方程系统**, 简称**$n$ 阶常微分系统**.

需要注意, 在常微分系统 (1.10) 中, 并非每个等式中的每个未知函数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 都必须出现最高为 $n$ 阶的导数, 而是只要至少有一个等式中出现某个未知函数的 $n$ 阶导数, 就可以说是 $n$ 阶常微分系统. 例如,

$$\begin{cases} x_1'' = -a_1 x_1 + a_2(x_2 - x_1), \\ x_2'' = -b_1(x_2 - x_1) + b_2(x_3 - x_2), \\ x_3'' = -c_1(x_3 - x_2) - c_2 x_3 \end{cases} \tag{1.11}$$

和

$$\begin{cases} x_1' - x_2 = 0, \\ -x_1 + x_3' = 0, \\ x_1 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = u(t) \end{cases} \tag{1.12}$$

分别为二阶和一阶常微分系统. 由于系统 (1.12) 中第 3 和第 4 个方程中不含任一未知函数的导数, 也称为**广义系统**, 在控制理论中会出现这样的问题.

对于一个具体的常微分方程, 除了按照显式、隐式加以区分或根据阶次进行分类外, 还可以按照方程是否为线性而区分为**线性常微分方程**和**非线性常微分方程**.

**定义 1.3** 在 $n$ 阶微分方程 (1.1) 中, 如果 $F$ 是未知变量 $x$ 及其各阶导数 $x', x'', \cdots, x^{(n)}$ 的线性函数, 即

$$F = a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x - f(t),$$

则方程 (1.10) 成为

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t), \tag{1.13}$$

称为**$n$ 阶线性常微分方程**, 其中 $a_0(t) \neq 0$, 通常设 $a_0(t) \equiv 1$, 并将方程记为

$$x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)x^{(n-i)} = f(t). \tag{1.14}$$

当 $F$ 不能表示为 (1.13) 的形式时, 就是一个**$n$ 阶非线性常微分方程**.

需要注意, 线性是针对未知变量 $x$ 及其各阶导数作出判定的, 并不要求它们的系数函数 $a_i(t)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 是线性函数, 因此

方程 (1.2) 和 (1.3) 是两个一阶线性方程;

方程 (1.4) 和 (1.5) 是两个一阶非线性方程;

方程 (1.6) 和 (1.7) 是两个二阶线性方程;

当 $J(t)$ 二次可导时方程 (1.8) 可以写成

$$EJ(t)x^{(4)} + 2EJ'(t)x^{(3)} + EJ''(t)x'' = q(t). \tag{1.15}$$

可知它是一个 4 阶线性常微分方程. 对常微分方程作线性和非线性的区分, 不仅因为非线性方程的求解远比线性方程困难, 而且由于非线性问题的解的性态往往显示更大程度的复杂性.

在一个常微分方程中, 我们通常用 $t$ 表示自变量, 用 $x$ 表示未知函数; 在一个常微分系统中, 自变量仍用 $t$ 表示, $m$ 个未知变量分别用 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 表示. 这仅仅是一个习惯, 完全可以采用其他变量符号. 例如, 常微分方程中用 $x$ 表示自变量, 用 $y$ 表示未知函数十分常见. 在两个未知函数的常微分系统中, 未知变量也常用 $y, z$ 或 $u, v$ 表示.

### 1.1.2 常微分方程的来源

常微分方程的类型多种多样, 绝大部分来源于实际问题或根据实际问题建立方程后在数学上所作的推广. 只有很少一部分是为阐明结果而刻意构造的人为例子.

现在讨论几个实际问题.

**问题 1.1** 20 世纪初英国物理学家 Rutherford 发现放射性元素的原子是不稳定的, 在每一段时间内总有一定比例的原子自然衰变而形成新元素的原子.

记 $t$ 时刻放射性物质的原子数为 $x(t)$, 据观测, 单位时间内衰变原子的个数 $\Delta x$ 与当时放射性原子数 $x(t)$ 之比为常数 $a$. 考虑到放射过程中 $\Delta x<0$, 因此 $a$ 为负实数. 这时有方程

$$\frac{\Delta x}{x}=a\Delta t,$$

即

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=ax,\quad a<0.$$

令 $\Delta t\to 0$, 就得到方程 (1.2),

$$x'=ax,$$

其中常数 $a<0$.

对碳的放射性同位素 $^{14}\mathrm{C}$, 衰减常数

$$a=-0.0001216,$$

其中 $t$ 以年为单位. 测定古生物遗存中 $^{14}\mathrm{C}$ 的残留含量及放射后生成物 $^{12}\mathrm{C}$ 的含量, 就可以确定该种生物的生存年代.

**问题 1.2** 世界上生物种类多种多样, 对特定生物种群的数量进行预测, 是制定对该生物实施保护还是控制的依据. 设 $t$ 时刻某种群的数量为 $x(t)$, 单位时间内种群数量的增加量 $\Delta x$ 与当时数量的比值为 $a-bx(t)$, 其中 $a,b>0$ 为常数. 这样的假设考虑了一定地域内食物资源的制约, 当种群数量较小时 $\left(x(t)<\dfrac{a}{b}\right)$, 增加量 $\Delta x$ 是正的; 当种群数量很大时 $\left(x(t)>\dfrac{a}{b}\right)$, $\Delta x$ 是负的, 即出现负增长. 由此得到方程

$$\frac{\Delta x}{x(t)}=(a-bx(t))\Delta t,$$

即

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=ax-bx^2,$$

令 $\Delta t\to 0$, 得出方程 (1.4),

$$x'=ax-bx^2,$$

这是由荷兰生物学家 Verhulst 首先提出的. 根据实测数据确定 $a,b$ 的值, 通过解方程就可预测种群数量变化情况. 这里给出的方程也可以用来预测世界上某一地区的人口变化. 当 $a,b>0$ 时, 方程 (1.4) 称为**Logistic 方程**.

**问题 1.3** 设有一个轴对称的反射镜, 它使点光源 $O$ 发出的光线由镜面反射后成为平行光束. 又设 $O$ 位于坐标原点, 反射后的平行光束与 $x$ 轴的正向平行且

为同方向 (图 1.1), 记镜面轮廓曲线的表示式为 $y = y(x)$, 下面来建立 $y(x)$ 所应满足的微分方程.

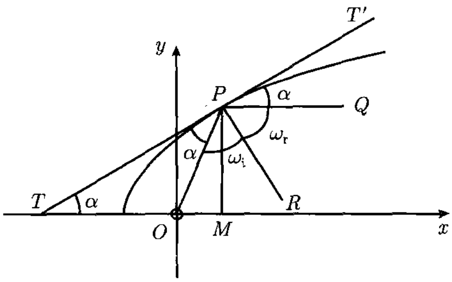


图 1.1 轴对称反射镜

设曲线 $y = y(x)$ 已在图 1.1 上给出. 在曲线上取一点 $P(x, y)$, 由点 $P$ 作曲线的切线 $TT'$, 其中 $T$ 点是切线和 $x$ 轴的交点. 连接 $O$ 点和 $P$ 点, 则光线 $OP$ 经镜面反射后沿着和 $Ox$ 平行的方向 $PQ$ 前进, 记 $\omega_{\rm i}$ 和 $\omega_{\rm r}$ 分别为入射角和反射角, $\omega_{\rm i} = \omega_{\rm r}$, 则可令

$$\alpha = \angle PTO = \angle T'PQ.$$

由 $P$ 作切线 $TT'$ 的垂线 $PR$, 可知

$$\angle OPR = \angle RPQ = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

且

$$\angle OPT = \frac{\pi}{2} - \angle OPR = \alpha.$$

由此得 $TO = OP$. 由 $P$ 点作 $y$ 轴的平行线交 $x$ 轴于 $M$ 点, 则 $\angle POM = 2\alpha$. 于是

$$\tan 2\alpha = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x}.$$

由 $y' = \tan\alpha$, 得方程

$$\frac{y}{x} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2y'}{1 - (y')^2},$$

即

$$\frac{2y'}{1 - (y')^2} = \frac{y}{x}.$$

如果将自变量换为 $t$, 未知函数换为 $x$, 上述方程就是方程 (1.5).

**问题 1.4** 设有一个由物体、弹簧和阻尼件组成的质量–弹簧–阻尼系统, 见图 1.2. 记物体质量为 $m$, 弹簧的弹性系数为 $k$, 阻尼件的阻尼常数为 $C$, 当物体偏离

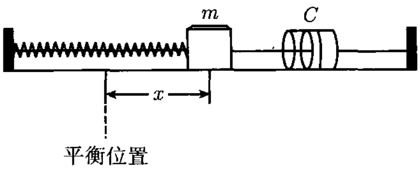


图 1.2　质量-弹簧-阻尼系统

平衡位置 $x$ 个单位 (规定物体右移使弹簧处于拉伸状态时, $x > 0$; 物体所在位置使弹簧压缩时, $x < 0$) 且随同物体一起运动的阻尼件速度为

$$v = x'$$

时, 物体受到弹簧力 $F_{\mathrm{S}}$ 和阻尼力 $F_{\mathrm{R}}$. 由

$$F_{\mathrm{S}} = -kx, \quad F_{\mathrm{R}} = -Cx' \tag{1.16}$$

及 Newton 运动定律

$$F = F_{\mathrm{S}} + F_{\mathrm{R}} = mx''$$

得

$$mx'' + Cx' + kx = 0,$$

即

$$x'' + \frac{C}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0. \tag{1.17}$$

记 $a = \dfrac{C}{m}, b = \dfrac{k}{m}$, 就得到方程 (1.6). 式 (1.16) 中关于 $F_{\mathrm{S}}, F_{\mathrm{R}}$ 的表示式, 右方取"$-$"号, 这是因为这些力的方向分别和位移 $x$ 及速度 $x'$ 的方向相反.

由实际问题建立常微分方程的例子不胜枚举. 以上 4 个问题, 既可用于说明常微分方程来源于实际, 也可以说明常微分方程是解决实际问题的一个有用工具.

### 1.1.3　常微分方程的解

建立常微分方程以后, 面临的任务是设法求出未知函数的数学表达式, 使它在自变量 $t$ 的规定取值区间上满足方程, 也就是求出方程的解. 寻找常微分方程的解, 是数学层面上的工作, 也是本书的中心内容. 对常微分方程 (1.1), 给出下列定义.

**定义 1.4**　设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个连通区域, $F:\ \Omega \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ 是一个实数区间. 如果 $t \in J$ 时, 有 $\varphi \in C^n(J, \mathbb{R})$ 使

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t)) \in \Omega$$

且满足

$$F(t,\varphi(t),\varphi'(t),\cdots,\varphi^{(n)}(t))=0,$$

则说 $x=\varphi(t)$ 是方程 (1.1) 在**区间 $J$ 上的一个解**, 其中 $\varphi\in C^n(J,\mathbb{R})$ 表示 $\varphi$ 在 $J$ 上有直到 $n$ 阶连续导数.

对于微分系统 (1.10), 也有相应的定义.

**定义 1.5** 设 $G$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m(n+1)}$ 中的一个连通区域, $F=(F_1,F_2,\cdots,F_m):G\to\mathbb{R}^m$, $J\subset\mathbb{R}$ 是一个实数区间. 如果函数向量 $\phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m)\in C^n(J,\mathbb{R}^m)$, 对 $\forall t\in J$, 有 $\big(t,\phi(t),\cdots,\phi^{(n)}(t)\big)\in G$, 且满足

$$\begin{cases} F_1\big(t,\phi(t),\phi'(t),\cdots,\phi^{(n)}(t)\big)=0,\\ \cdots\cdots\\ F_m\big(t,\phi(t),\phi'(t),\cdots,\phi^{(n)}(t)\big)=0,\end{cases}$$

则说 $x=\phi(t)$ 是常微分系统 (1.10) 在**区间 $J$ 上的解**, 其中 $\phi\in C^n(J,\mathbb{R}^m)$ 表示 $\phi$ 的每个分量都有直到 $n$ 阶连续导数.

当 $\phi(t)$ 是常微分系统 (1.10) 在区间 $J$ 上的解时, 集合

$$\{(t,\phi(t)):\ t\in J\}$$

成为 $\mathbb{R}^{m+1}$ 空间中的一条曲线, 称为常微分系统 (1.10) 的一条**解曲线**. 在 $F_1,F_2,\cdots,F_m$ 中不显含 $t$ 时, 常将解曲线投影到**相空间**$\mathbb{R}^m$ 中:

$$(t,\phi(t))\mapsto\phi(t),\quad t\in J,$$

得到 $\mathbb{R}^m$ 中的曲线 $\{\phi(t):\ t\in J\}$, 称为常微分系统 (1.10) 的一条**相轨线**, 简称**轨线**. 轨线上以 $t$ 增大的方向为正向, 用箭头"→"标示.

可以验证, $(x,y)=(\cos t,\sin t)$ 和 $(x,y)=(0,0)$ 都是常微分系统

$$\begin{cases} x'=-y,\\ y'=x\end{cases}\tag{1.18}$$

在 $J=\mathbb{R}$ 上的解, 由它们确定的解曲线分别为

$$r_1=\{(t,\cos t,\sin t):\ t\in\mathbb{R}\},\quad r_2=\{(t,0,0):\ t\in\mathbb{R}\}.$$

$r_1$ 是三维空间 $Oxyt$ 上的一条螺线, $r_2$ 则是位于 $t$ 轴上的一条直线, 如图 1.3 所示. 由于系统 (1.18) 不显含自变量 $t$ (这样的系统称为**自治微分系统**), 可将解曲线 $r_1$、$r_2$ 投影到相平面 $Oxy$(即二维相空间 $\mathbb{R}^2$) 中, 得到相应的轨线

$$\Gamma_1=\{(\cos t,\sin t):\ t\in\mathbb{R}^2\},\quad \Gamma_2=\{(0,0):\ t\in\mathbb{R}^2\}.$$

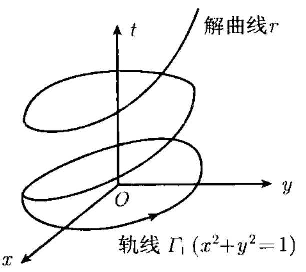


图 1.3　解曲线和轨线

$\Gamma_1$ 在相平面中成为一个单位圆周 $x^2+y^2=1$, $\Gamma_2$ 是相平面上的原点 $O$ : $(x,y)=(0,0)$. $\Gamma_1$ 的正向为逆时针转向, $\Gamma_2$ 因为退化为一点, 正向不确定 (这时要确定正向已无意义).

定义 1.4 和定义 1.5 中的 $\Omega$ 和 $G$ 分别称为方程 (1.1) 和 (1.10) 的**定义域**.

我们注意到在定义 1.4 和定义 1.5 中, 我们都要求解 $\varphi(t)$ 或 $\phi(t)$ 是区间 $J$ 上的给定函数或函数向量, 这样的解称为**显式解**. 除显式解外, 还可以定义隐式解.

**定义 1.6**　设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n+1}$ 中的连通域, 方程 (1.1) 中的 $F$ 定义在 $\Omega$ 上, $J\subset\mathbb{R}$ 是一个实数区间. 又设有函数 $u(t,x)$ 定义在 $J\times\mathbb{R}$ 上, 且由等式

$$u(t,x)=0$$

定义的隐函数 $x=x(t)$, 可确定直至 $n$ 阶的导数

$$x^{(k)}(t)=\phi_k(t,x(t)),\quad k=1,2,\cdots,n.$$

对 $t\in J$, 如果 $\big(t,x(t),\phi_1(t,x(t)),\cdots,\phi_n(t,x(t))\big)\in\Omega$, 且满足

$$F(t,x(t),\phi_1(t,x),\cdots,\phi_n(t,x))=0,$$

则 $u(t,x)$ 为方程 (1.1) 在 $J$ 上的一个**隐式解**.

无论显式解还是隐式解, 都是给定方程的解.

**例 1.1**　方程

$$xx'+t=0. \tag{1.19}$$

考虑 $u(t,x)=t^2+x^2-1$, 若令 $u(t,x)=0$, 则由隐函数求导法得

$$x'=-\frac{t}{x},\quad x\neq 0.$$

将上式代入 (1.19) 得

$$xx'+t=x\cdot\left(-\frac{t}{x}\right)+t=0,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

因此当 $x\neq 0$ 时, $x^2+t^2=1$ 是方程 (1.19) 的隐式解.

当事前没有给定 $F$ 的定义域时, 通常取 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n+1}$ 中使 $F$ 有意义的点的集合作为它的定义域, 即

$$\Omega=\{(t;x_0,x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n+1}:\ F(t,x_0,x_1,\cdots,x_n)\text{有意义}\}.$$

例如, 方程 (1.19) 中, 定义域 $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

同样当函数向量 $(F_1, F_2, \cdots, F_m)$ 的定义域未曾预先限定时, 其定义域也取为

$$G = \{(t; x^{\langle 0\rangle}, x^{\langle 1\rangle}, \cdots, x^{\langle n\rangle}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m(n+1)}:\ (F_1, \cdots, F_m)\text{有意义}\},$$

其中 $x^{\langle i\rangle} = (x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{mi})$, $i = 0, 1, \cdots, n$, 为 $m$ 维数组.

另外需要注意, 在求解方程的过程中常会对方程乘上或除以一个函数, 这时会改变函数的定义域. 以方程 (1.1) 为例, 如果两边乘上 $Q(t, x, x', \cdots, x^{(n)})$ 得方程 $\hat{F}(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0$, 其中 $\hat{F}(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) := Q(t, x, x', \cdots, x^{(n)})F(t, x, x', \cdots, x^{(n)})$, 则当 $Q$ 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$ 有定义且无零点时, 可保证 $F$ 和 $\hat{F}$ 有相同的定义域; 当 $Q$ 只在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$ 的部分区域上有定义时, 有可能使方程的定义域减小; 反之当 $Q$ 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$ 上有零点时, 方程的定义域有可能扩大. 不论哪一种情况, 最终给出的解, 当 $t \in J$ 时都需要位于原方程的定义域中.

**例 1.2** 对一阶方程

$$t^{\frac{1}{3}} x' = \frac{2}{3}, \tag{1.20}$$

两边乘 $t^{-\frac{1}{3}}$, 得

$$x' = \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}}, \tag{1.21}$$

对 $t$ 积分可得一个解

$$x(t) = t^{\frac{2}{3}}. \tag{1.22}$$

作为方程 (1.21) 的解, 应限制 $t \neq 0$, 因此这个解要分成两段:

$$x(t) = t^{\frac{2}{3}}, \quad t > 0 \text{ 和 } x(t) = t^{\frac{2}{3}}, \quad t < 0.$$

但 $t^{\frac{2}{3}}$ 作为原方程 (1.20) 的解, (1.20) 的定义域允许 $t = 0$, 且 $(t^{\frac{2}{3}})' = \dfrac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}}$. 导数在 $t = 0$ 时虽然无意义, 但将 $x' = \dfrac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}}$ 代入 (1.20), 得

$$\lim_{t \to 0} t^{\frac{1}{3}} (t^{\frac{2}{3}})' = \lim_{t \to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

这时可以认为 (1.22) 所给函数是方程 (1.20) 在整个实数域 $\mathbb{R}$ 上的解.

由本例可体会到方程定义域的改变对解的适用区间是有影响的.

除此之外需要强调的是: 任一解的存在域必须是一个区间, 如果解的同一表达式在多个不相连的区间上满足解的定义, 则在不同区间上它们应视为不同的解.

**例 1.3** 对二阶线性常微分方程

$$t^2 x'' + 2tx' - 2x = 0 \tag{1.23}$$

记 $F(t,x_0,x_1,x_2)=t^2x_2+2tx_1-2x_0$, 则 $F$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ 上都有定义, 可以验证 $x=t^{-2}$, 当 $t\neq 0$ 时满足方程 (1.23), 因此

$$x=\frac{1}{t^2},\quad t>0 \quad 和 \quad x=\frac{1}{t^2},\quad t<0 \tag{1.24}$$

是方程 (1.23) 的两个解.

比较例 1.2 和例 1.3, 显然就定义域而言, 方程 (1.20) 和方程 (1.23) 都允许 $t=0$, 但方程 (1.20) 的解 $x=t^{\frac{2}{3}}$ 在 $t=0$ 处有确定的值 $x=0$, 而方程 (1.23) 的解在 $t=0$ 处无意义, 故 $x=t^{\frac{2}{3}}$ 可以是方程 (1.20) 在整个实数域 $\mathbb{R}$ 上的解, 而 $x=\frac{1}{t^2}$ 必须将实数域区分为 $t>0$ 和 $t<0$ 两部分, 得出 (1.24) 所示的两个解.

### 1.1.4　常微分方程的求解途径及任意常数的出现与确定

求解常微分方程的基本途径是根据微分方程阶次的不同进行逐次积分. 设有最简单的两个常微分方程,

$$x'=f(t), \tag{1.25}$$

$$x''=f(t), \tag{1.26}$$

其中 $f(t)=\cos t$. 在方程 (1.25) 两边积分得

$$x(t)=\int f(t)\mathrm{d}t=\int\cos t\mathrm{d}t=\sin t+C, \tag{1.27}$$

得到一族解 $\{\sin t+C\}$, 其中 $C$ 是任意常数. 如果取定 $C$ 的值, 如 $C=0$, 则 $\sin t$ 是方程 (1.25) 的一个解.

由方程 (1.26), 先求 $x''(t)$ 的原函数

$$x'(t)=\int f(t)\mathrm{d}t=\sin t+C_1.$$

再求 $x'(t)$ 的原函数, 得

$$x(t)=\int\left(\int f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t=\int(\sin t+C_1)\mathrm{d}t=-\cos t+C_1t+C_2. \tag{1.28}$$

一般来说, 一个 $n$ 阶常微分方程需积分 $n$ 次才能求出未知变量 $x(t)$ 的表达式, 每次积分会出现一个任意常数, 则 $n$ 阶微分方程的解中可以出现 $C_1$, $C_2,\cdots,C_n$ 等 $n$ 个任意常数.

在微积分教材中 $f(t)$ 的不定积分 $\int f(t)\mathrm{d}t$ 表示一族原函数, 仅当给出原函数族中一个确定的原函数, 如方程 (1.27) 中的 $\sin t$ 后, 才需要加上一个任意常数 $C$. 但在常微分方程求解中规定: $\int f(t)\mathrm{d}t$ 只表示 $f(t)$ 的一个原函数, 整个原函数族用