新世纪高职高专系列规划教材

高等数学

主编　童加斌　钟鹤鸣

GAODENGSHUXUE

东南大学出版社

新世纪高职高专系列规划教材

高等数学

主　编　童加斌　钟鹤鸣
副主编　刘建明　刘先树　王　玲
编　委　艾文法　韩红曼　刘园园

东南大学出版社
·南　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/童加斌,钟鹤鸣主编.—南京:东南大学出版社,2010.9

新世纪高职高专系列规划教材

ISBN 978-7-5641-2391-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①童… ②钟… Ⅲ.①高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第166198号

高等数学

出版发行 东南大学出版社
出 版 人 江 汉
社　　址 南京市四牌楼2号
邮　　编 210096

经　　销 全国各地新华书店
印　　刷 南京京新印刷厂
开　　本 700 mm×1000 mm　1/16
印　　张 19
字　　数 372千字
版　　次 2010年9月第1版
印　　次 2010年9月第1次印刷
印　　数 1—2500
书　　号 ISBN 978-7-5641-2391-8
定　　价 38.00元

前 言

“高等数学”作为高职高专理工科类以及经济管理类各专业必修的基础理论课，教学现状已面临重重困难，其主要原因表现在学生整体数学素质较差，学习积极性不高，教学时数少而内容多，教材体系不完善，教学针对性不强等，从而使教学效果不尽如人意，学生不想学而导致教师不愿教。同时，数学教学因没有很好地满足专业课的需要而使专业课教师教学困难，意见纷纷。面对诸多问题和困难，如何去化解，这是我们每一位从事高职数学教学工作者急需解决的课题。随州职业技术学院数学教研室从 2006 年开始，针对上述诸多问题，在教学过程中实施创新教学改革，取得了丰硕成果。在原版《高等数学》(21 世纪高职高专公共基础课规划教材〈2006〉)的基础上，结合近几年的课堂实际教学情况，重新进行了编写，本教材更加贴近当前高职高专学生实际，充分吸收了当前我国现有的高职高专数学教材的长处，具有极强的针对性和实用性等典型的地方高职院校特色。

本教材的编写全部由从事数学教学工作多年、经验丰富的来自高职高专院校第一线的教授、副教授承担。本教材遵循了数学的基本规律和高职高专“必需、够用”的原则，简略了不必要的理论推导，有些重要定理的证明仅供教学者参考，重点放在实际应用、习题训练方面，在叙述中力求简明易懂，深

入浅出，配有相应的例题和习题以及参考答案。

本教材由随州职业技术学院钟鹤鸣副教授策划、组稿，并承担第1章第1～6节和附录的编写；王玲副教授编写第1章第7～11节；刘先树副教授编写第2章；刘建明副教授编写第3章；艾文法副教授编写第4章；刘园园讲师编写第5章；韩红曼讲师编写第6章。最后由童加斌教授主审并定稿。

本教材在编写过程中得到了随州职业技术学院的领导和相关教师的大力支持，尤其是公共基础课部的李中明副教授在编写过程中给予了全方位的支持。在此一并表示感谢！

由于编者水平有限，差错在所难免，真诚欢迎各位读者批评指正。

编　者

2010年5月

目　录

1　一元函数的微分

1.1　函数的极限

微积分是数学中的重要分支，是高等数学的核心. 而函数和极限又分别是微积分的研究对象和工具. 本章将重点介绍一元函数的微分学，在加深理解函数有关知识的基础上，给出一种研究函数的新方法——极限.

1.1.1　函数的有关概念

1）函数的定义

定义 1.1　设 x,y 是两个变量，x 的变化范围是实数集 D. 如果对于任何的 $x\in D$，按照一定的法则都有一个确定的实数 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$.

其中 D 称为函数的定义域，x 为自变量，y 为因变量，对于一个确定的 $x_0\in D$，与之对应的 $y_0=f(x_0)$ 称为函数 y 在点 x_0 处的函数值，全体函数值的集合称为函数的值域，记为 $f(D)$，即 $f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

关于定义域，如果所讨论的函数来自某个实际问题，那么其定义域应符合实际意义. 例如，在自由落体运动中的下落的距离函数 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域是 $[0,\ T]$. 其中 T 是物体落地的时刻. 如果抛开实际背景，仅把 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 看成一个二次函数，则它的定义域便是 $(-\infty,+\infty)$.

一般地，若不考虑实际背景，一个初等函数 $y=f(x)$ 的定义域是指使得该函数表达式有意义的自变量取值的全体. 在求初等函数的定义域时首先需要掌握基本初等函数的定义域和值域.

例 1　求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解　这是两个函数之和的定义域，先分别求出每个函数的定义域，然后求其公共部分即可.

$\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域必须满足 $x^2-x-6\geqslant 0$，即

$$(x-3)(x+2)\geqslant 0,$$

解得 $$x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant -2.$$

而 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域是 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，即

$$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7,$$

解得 $$-3\leqslant x\leqslant 4.$$

于是原函数的定义域是 $[-3,-2]\cup[3,4]$.

2) 区间与邻域

在高等数学中，除了经常会用到常用的数集 **R**、**Q**、**Z**、**N** 外，还会用到一些特殊的数集，例如由 0,1,2,3 构成的数集，可记为

$$A=\{0,1,2,3\}.$$

这种数集的表示法称为"列举法"，也可用所谓的"属性法"表示：

$$A=\{n\mid n\text{ 是小于 4 的非负整数}\}$$

用"属性法"来表示数集的好处是它可以方便地表示数轴上的"一段"连续的点. 例如由数轴上介于 1 与 3 之间的实数构成的数集可方便地表示为

$$B=\{x\mid 1<x<3\}.$$

像这样由数轴上的"一段"连续的点构成的数集我们称之为区间，记为 $(1,3)$. 常用的区间定义见表 1.1，表中的 a,b 是确定的实数，分别称为区间的左端点和右端点. 有限区间之间的距离 $b-a$ 称为区间的长度. $+\infty$，$-\infty$ 分别读"正无穷大"与"负无穷大"，它们不表示任何数，仅仅是记号. 有时将 $+\infty$ 与 $-\infty$ 统一地记为 ∞.

表 1.1

名　称	记　号	定　义
闭区间	$[a, b]$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
开区间	(a, b)	$\{x\mid a<x<b\}$
左开右闭区间	$(a, b]$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
右开左闭区间	$[a, b)$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
无穷区间	$(a,+\infty)$	$\{x\mid a<x<+\infty\}$
	$[a,+\infty)$	$\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$
	$(-\infty, b)$	$\{x\mid -\infty<x<b\}$
	$(-\infty, b]$	$\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$
	$(-\infty,+\infty)$	$\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$

人们通常用不等式、区间或集合形式来表示定义域. 其中有一种特殊的区间

$(a-\delta,\ a+\delta)$，以后会常遇到. 这一区间我们称为点 a 的邻域. 记为 $U(a,\delta)$（见图 1.1a).

即

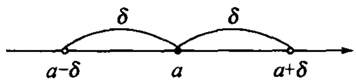
$$U(a,\delta)=(a-\delta,\ a+\delta).$$

其中，点 a 称为邻域的中心，δ(大于 0 的较小常数)为邻域的半径. 所以，点 a 的 δ 邻域表示的是 a 的邻近的点，也就是满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的所有 x 的值.

$$\{x \| x-a|<\delta\},$$

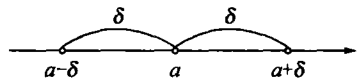
因为 $|x-a|<\delta$ 相当于 $a-\delta<x<a+\delta$，所以

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}.$$



(a)

图 1.1(a)



(b)

图 1.1(b)

如果仅仅研究变量在某一点邻近的变化情况，就需要用到邻域，有时需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$（见图 1.1(b)），即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

这里，$0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

例 2　把 -2的 0.5 邻域 $U(-2,\ 0.5)$表示成区间.

解　由于邻域的中点 $a=-2$，半径 $\delta=0.5$.

所以邻域 $U(-2,\ 0.5)$的区间表示为：$(-2-0.5,\ -2+0.5)=(-2.5,\ -1.5)$.

3) 基本初等函数

常数函数 $y=c$(c 为常数)；

幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为常数)；

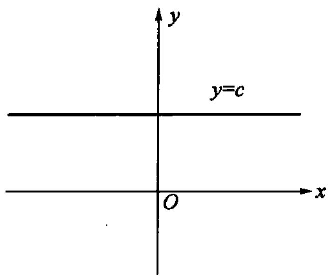
指数函数 $y=a^{x}$($a>0, a\neq 1, a$ 为常数)；

对数函数 $y=\log_a^x$($a>0, a\neq 1, a$ 为常数)；

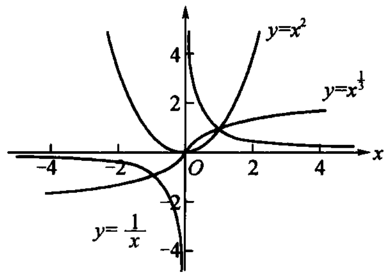
三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

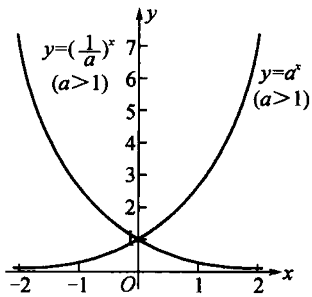
这六种函数统称为基本初等函数. 这些函数的性质及图形如图 1.2 所示，今后会经常用到.


y
y=c
O
x

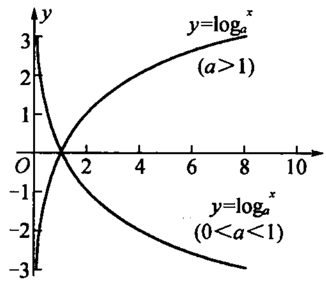
(a)


y=x^2
y=x^{1/3}
y=1/x
4
2
-4
-2
O
2
4
-2
-4
x

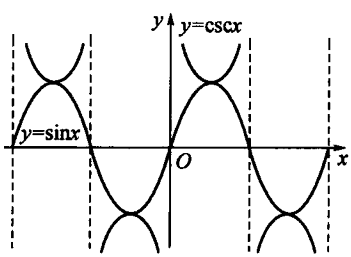
(b)


y
y=(1/a)^x
(a>1)
y=a^x
(a>1)
7
6
5
4
3
2
1
-2
-1
O
1
2
x

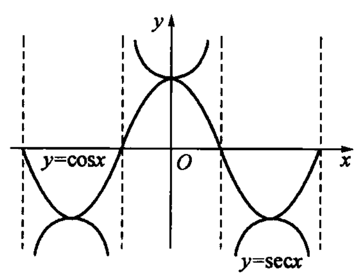
(c)


y
y=log_a x
(a>1)
y=log_a x
(0<a<1)
3
2
1
O
2
4
6
8
10
-1
-2
-3

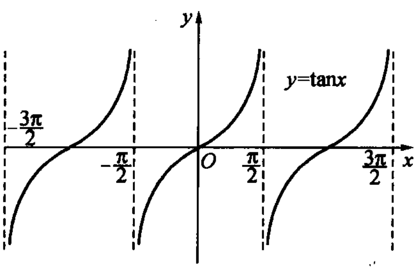
(d)


y
y=cscx
y=sinx
O
x

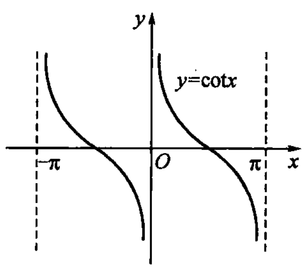
(e)


y
y=cosx
O
x
y=secx

(f)


y
y=tanx
-3π/2
-π/2
O
π/2
3π/2
x

(g)


y
y=cotx
-π
O
π
x

(h)

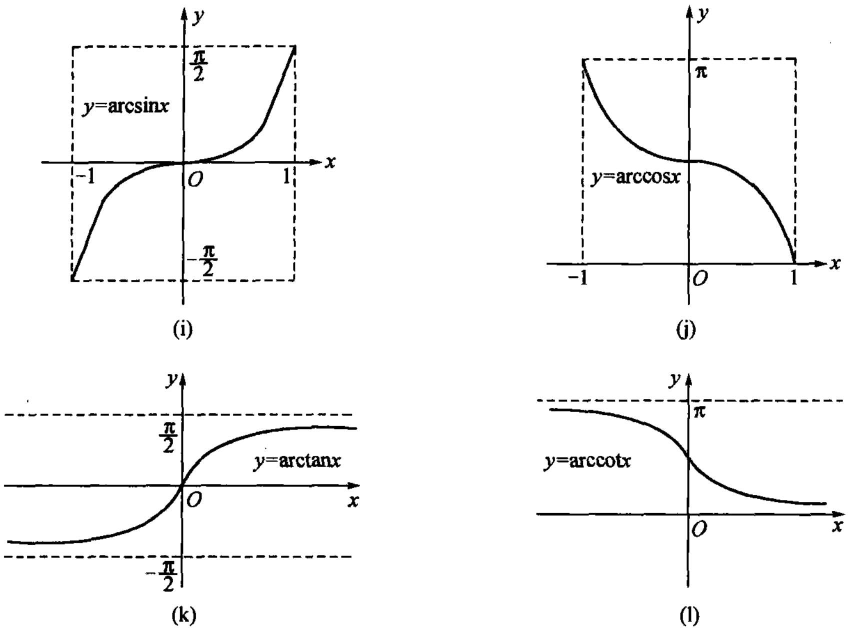


图 1.2

要善于从每个图中观察出基本初等函数的定义域、值域，以及函数的基本特性.

4）复合函数

实际问题中变量之间的函数关系往往是复杂的，自变量与因变量之间不一定存在直接的依赖关系，因而常常借助于中间变量来建立所需要的函数关系.

例如，设有一质量为 m 的物体，以初速度 v_0 竖直上抛，则经过时间 t 之后的速度为 $v=v_0-gt$（忽略空气的阻力），其中 g 为重力加速度，求物体的动能 E 与时间 t 之间的函数关系，动能 $E=\frac{1}{2}mv^2$. 因 E 为速度 v 的函数，而速度 v 又是 t 的函数，故 $E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2\left(0\leqslant t\leqslant\frac{v_0}{g}\right)$.

于是动能 E 通过速度 v 而成为时间 t 的函数. 我们称函数 $E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$ 是由 $E=\frac{1}{2}mv^2$，$v=v_0-gt$ 复合而成的复合函数.

定义 1.2　若函数 $y=f(u)$，定义域为 U_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 U_2，其中 $U_2\subseteq U_1$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记为

$$y=f(\varphi(x)),$$

其中变量 u 称为中间变量.

例 3　把下列函数复合成一个函数,并求这个复合函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{u}, u=x^2+1$;　　(2) $y=\ln u, u=x-1$.

解　(1) 由 $y=\sqrt{u}, u=x^2+1$ 复合而成的函数是 $y=\sqrt{x^2+1}$,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 由 $y=\ln u, u=x-1$ 复合而成的函数是 $y=\ln(x-1)$,其定义域为 $(1,+\infty)$.

在上面例子中,均符合 $U_2\subseteq U_1$. 又例如,函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$,因为 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $U_1=[-1,1]$,函数 $u=x^2+2$ 的值域为 $U_2=[2,+\infty)$,因此集合 U_2 不是 U_1 的子集,即函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个函数.

此外,三个及三个以上的函数也可构成复合函数. 例如,由 $y=u^2, u=\sin v, v=e^w, w=2x^2-1$ 可以构成复合函数 $y=\sin^2 e^{2x^2-1}$.

有了复合函数的概念,可以将一个较复杂的函数看成由几个简单的函数复合而成,这样更便于对函数进行研究.

例 4　指出下各复合函数的复合过程:

(1) $y=(3x+5)^{10}$;　　(2) $y=\sin\sqrt{x}$;　　(3) $y=e^{2x-1}$;

(4) $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$;　　(5) $y=\ln^2(x^2-1)$.

解　(1) $y=(3x+5)^{10}$是由 $y=u^{10}$和 $u=3x+5$ 复合而成的;

(2) $y=\sin\sqrt{x}$是由 $y=\sin u$ 和 $u=\sqrt{x}$复合而成的;

(3) $y=e^{2x-1}$是由 $y=e^u$ 和 $u=2x-1$ 复合而成的;

(4) $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$是由 $y=\sqrt{u}$、$u=\cot v$ 和 $v=\frac{x}{2}$复合而成的;

(5) $y=\ln^2(x^2-1)$ 是由 $y=u^2$、$u=\ln v$ 和 $v=x^2-1$ 复合而成的.

1.1.2　函数的极限

1) 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

我们来看函数 $f(x)=1+\frac{1}{x}$,当 x 无限增大时,函数的变化趋势.

任取一组自变量 x 无限增大的数值,其对应的函数值列表如下: