高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

Spark® 星火

同济大学 彭 辉 主编

高等数学辅导及习题精解

（下册 同济·第六版）

张天德 主审

联系考研，渗透精讲历年考研真题

- 典型例题 深入讲解思路方法技巧
- 习题答案 权威提供详尽准确解析
- 同步自测 梯度测试提升应试能力

全新修订

第3版

新 华 出 版 社

高等数学辅导及习题精解

（下册 同济·第六版）

主 编 彭 辉
副主编 吕洪波 王锁成
主 审 张天德

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导及习题精解 / 彭辉主编 .
北京 ：新华出版社，2005.8(2010.2 重印)
ISBN 978-7-5011-7166-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 彭… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 082481 号

高等数学辅导及习题精解

责任编辑：白　玉　刘广军
装帧设计：星火视觉设计中心
出版发行：新华出版社
地　　址：北京石景山区京原路 8 号
网　　址：http://www.xinhuapub.com
邮　　编：100043
经　　销：新华书店
印　　刷：淄博恒业印务有限公司
开　　本：880mm×1230mm　1/32
印　　张：25
字　　数：620 千字
版　　次：2010 年 2 月第 5 版
印　　次：2010 年 2 月第 5 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5011-7166-8
定　　价：31.60 元(全套两册)

图书如有印装问题，请与印刷厂联系调换　电话：(0533)6182227

前言

高等数学是理工类专业重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学数学系主编的《高等数学》体系完整，层次清晰，讲解深入浅出，是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用。2007 年同济大学数学系推出的《高等数学》第六版保持了该教材一贯的优点、特色，进一步强调了提高学生的综合素质并激发学生的创新能力。为了帮助读者学好高等数学，编者根据多年的教学经验编写了这本与同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)完全配套的《高等数学辅导及习题精解》上、下册。本书旨在帮助、指导广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与技巧，提高应试能力和数学思维水平。

本书章节的划分和内容设置与同济第六版教材完全一致，共分十二章，每章又分若干节，每节包括两大部分内容：

一、知识要点与考点:用表格形式简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行系统的梳理，并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点；

二、习题精解:对教材里该节全部习题做了解答。对部分有代表性的习题，在解题过程中，设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。另外本书还用“警示语”的形式对解题要点、技巧和解题中易错的地方做了简短警示。

为了帮助读者对每章所学过的知识进行复习巩固，在每章编写完后另外增加两部分内容：

一、本章知识结构及内容小结:先用网络结构图揭示出本章知识点之间的有机联系，以便于学生系统地掌握本章知识体系和核心内容；然后给出了教材总习题全解:对每道题给出了详细解答，有的题还给出了“思路探索”和“方法点击”，以便帮助读者尽快找到解决问题的思路、方法、技巧和规律；

二、同步自测题及参考答案：精选部分有代表性、测试价值高的题目（部分题目选自历年全国研究生入学考试试题），以此检测、巩固读者的学习效果，提高应试水平。

全书内容编写系统、独到，充分体现了如下三大特色：

一、知识梳理清晰、简洁：直观、形象的图表总结，精炼、准确的考点提炼，权威、独到的题型归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的教材知识结构，以便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，从而为以后提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、互动：所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，给出丰富的精选例题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合，一举完成。

三、联系考研密切、实用：本书是一本教材同步辅导，也是一本实用的考研复习用书。书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测题中也有考研试题，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的重点、难点等，目的就是让读者同步完成考研备考，达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此，向这些书籍的编著者表示感谢。由于作者水平有限，书中疏漏与不妥之处，在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

目 录

第八章 空间解析几何与向量代数

第一节 向量及其线性运算

一、知识要点与考点

1. 空间直角坐标系的概念

	定义	说明
空间直角坐标系	在空间取定一点 O，和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，它们都是以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴），y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴）. 这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系.	通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴是铅垂线，它们的正向符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向.
坐标面	三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面	x 轴和 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，y 轴和 z 轴确定 yOz 面，z 轴和 x 轴确定 zOx 面.
卦限	三个坐标面把空间分成的八个部分	一共八个卦限，用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 来表示
空间中点的坐标	空间中任一点 M 在三条坐标轴上的投影 P,Q,R 在各自坐标轴上的坐标记为 x,y,z，则点 M 与有序数组 (x,y,z) 建立了一一对应关系，称 (x,y,z) 为点 M 的坐标，点 M 称为以 (x,y,z) 为坐标的点	
空间中两点间的距离	$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，则 M_1 和 M_2 之间的距离为 $d=\vert M_1M_2\vert$	$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

2. 向量的有关定义和性质

	定 义	说 明
向量(矢量)	既有大小又有方向的量称为向量.	(1) 常用有向线段表示向量,如 $\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{AB}$ 等. (2) 将向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点与空间直角坐标系的原点重合,则其终点的坐标 (x,y,z) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,记作 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$ 或 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. (3) 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,则 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$. (4) 大小相等、方向相同的两向量相等.
向量的模	向量的大小(或长度)	(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$ 的模依次记作 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$、$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$. (2) 模为0的向量叫做零向量,记作 $\boldsymbol{0}$ 或 0,它的方向可看作是任意的.模为 1 的向量叫做单位向量.与 $\boldsymbol{a}$ 模相同,方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$. (3) 设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,则 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$. (4) 对空间中任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,有 $\lvert\overrightarrow{M_1M_2}\rvert=\lvert M_1M_2\rvert$ $=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.
向量的方向余弦	设向量 $\boldsymbol{a}$ 与三坐标轴正向的夹角分别为 α、β、γ,则 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦	(1) 如果 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,则 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$. (2) $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 恰为与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量,$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

	定　义	说　明
向量的投影	已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和轴 u，M_1，M_2 在 u 上的投影分别为 M'_1，M'_2，那么 u 上的有向线段 $\overrightarrow{M'_1M'_2}$ 的值 $\lvert\overrightarrow{M_1M_2}\rvert$ 即为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 u 上的投影.	(1) 若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{a}$ 与轴 u 的夹角为 φ，则 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\cos\varphi$. (2)（投影定理）向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦；$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{M_1M_2}=\lvert\overrightarrow{M_1M_2}\rvert\cos\varphi$. (3) 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和，即：$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2$. (4) 向量与数的乘积在轴上的投影等于向量在轴上的投影与数的乘积，即：$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$. (5) 向量在与其方向相同的轴上的投影为其模；在与其方向垂直的轴上的投影为 0. (6) $\boldsymbol{a}$ 在 x,y,z 轴上的投影坐标分别为 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cos\alpha$，$\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cos\beta$，$\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cos\gamma$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

3．向量的线性运算

	坐标表示	说　明
向量的数乘	$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$.	当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，其模 $\lvert\lambda\boldsymbol{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\boldsymbol{a}\rvert$.
向量的加法	$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$， $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$.	(1) 对向量的加法有平行四边形法则和三角形法则. (2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 λ,μ 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

4．重点难点与考点

重点	向量、向量的线性运算、空间直角坐标系、方向角、方向余弦
难点	方向角、方向余弦、向量在轴上的投影
考点	向量的线性运算、方向角、方向余弦、投影

二、经典例题解析

基本题型Ⅰ：有关向量的线性运算、模、方向角、方向余弦、向量的坐标表示等问题

例 1　一向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向、y 轴正向的夹角相等，与 z 轴正向的夹角是前者的两倍. 求与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

【思路探索】　与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量就是以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向

量. 故问题求解的关键在于求出向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解：设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向、y 轴正向的夹角为 α，则它与 z 轴的正向夹角为 2α，

那么，$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦分别是 $\cos\alpha,\cos\alpha,\cos2\alpha$，

故有 $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2(2\alpha)=1$，即 $2\cos^2\alpha-1+\cos^2(2\alpha)=0$，

由此得到 $\cos2\alpha(\cos2\alpha+1)=0$.

$\therefore\ \cos2\alpha=0$ 或 $\cos2\alpha=-1$.

又 $\because\ 2\alpha\in[0,\pi]$，$\therefore\ \alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$.

则 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=0$ 或 $\cos\alpha=0,\cos\beta=0,\cos\gamma=-1$.

因此，所求的单位向量为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 或 $(0,0,-1)$.

【方法点击】 向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 满足关系式：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

例 2 设 $\boldsymbol{a}=(4,5,-3)$，$\boldsymbol{b}=(2,3,6)$，求 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦.

解：与 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量，因此

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}}(4,5,-3)=\left(\frac{4}{\sqrt{50}},\frac{5}{\sqrt{50}},\frac{-3}{\sqrt{50}}\right).$$

又 $$\boldsymbol{b}^\circ=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}(2,3,6)=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right),$$

从而，$\boldsymbol{b}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2}{7},\cos\beta=\frac{3}{7},\cos\gamma=\frac{6}{7}.$$

例 3 从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=(8,9,-12)$ 方向取长为 34 的线段 $\overline{AB}$，求点 B 的坐标.

解：设 B 点坐标为 (x,y,z)，则

$\overrightarrow{AB}=(x-2,y+1,z-7)$.

由于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致，故存在实数 $\lambda>0$，使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{a}$，即

$$(x-2,y+1,z-7)=\lambda(8,9,-12)$$

得 $x-2=8\lambda,y+1=9\lambda,z-7=-12\lambda$

又 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2}=34$，得

$\sqrt{289\lambda^2}=34$，$17\lambda=34$，得 $\lambda=2$，所以

$x=8\lambda+2=18,y=9\lambda-1=17,z=-12\lambda+7=-17$

B 点坐标为 $(18,17,-17)$.

【方法点击】 $\boldsymbol{b}\ /\!/\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow$ 存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

基本题型 Ⅱ：利用向量的运算与性质证明结论

例 4 试证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等

腰直角三角形.

证明:∵ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2} = 7$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2} = 7$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2} = 7\sqrt{2}$

∴ $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$ 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$

从而,$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

例 5 用向量的方法证明:三角形的中位线平行于底边,且它的长度等于底边的一半.

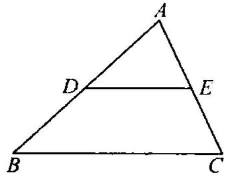

图 8-1

证明:设 $\triangle ABC$ 中,D、E 分别为 AB、AC 的中点,

∵ $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$,

∴ $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

即 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

故 $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$ 且 $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$,结论得证.

教材习题 8-1 解答(下册 P_{12})

1. 解:$2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} = 2(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}) - 3(-\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})$

$= 5\boldsymbol{a} - 11\boldsymbol{b} + 7\boldsymbol{c}$

2. 证明:设四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 相交于 M,且 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MB}$.

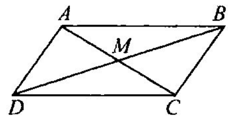

图 8-2

∵ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM}$

$= \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DC}$

∴ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$

∴ $ABCD$ 是平行四边形.

3. 解:$\overrightarrow{D_1A} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD_1} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = -\boldsymbol{c} - \frac{1}{5}\boldsymbol{a}$

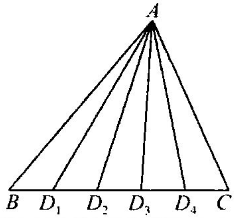

图 8-3

$\overrightarrow{D_2A} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD_2} = -\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} = -\boldsymbol{c} - \frac{2}{5}\boldsymbol{a}$

$\overrightarrow{D_3A} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD_3} = -\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = -\boldsymbol{c} - \frac{3}{5}\boldsymbol{a}$

$\overrightarrow{D_4A} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD_4} = -\overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{BC} = -\boldsymbol{c} - \frac{4}{5}\boldsymbol{a}$

4. 解:$\overrightarrow{M_1M_2} = (1,-2,-2)$,$-2\overrightarrow{M_1M_2} = (-2,4,4)$

5. 解:$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{6^2+7^2+(-6)^2} = 11$

$$\therefore \boldsymbol{e} = \pm \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \left(\pm \frac{6}{11}, \pm \frac{7}{11}, \mp \frac{6}{11}\right)$$

6. 解：A：Ⅳ；B：Ⅴ；C：Ⅷ；D：Ⅲ.

7. 解：在 yOz 面上，点的横坐标 $x = 0$；
在 zOx 面上，点的纵坐标 $y = 0$；
在 xOy 面上，点的竖坐标 $z = 0$.
在 x 轴上，点的纵、竖坐标均为 0，即 $y = z = 0$；
在 y 轴上，点的横、竖坐标均为 0，即 $z = x = 0$；
在 z 轴上，点的横、纵坐标均为 0，即 $x = y = 0$.
A 在 xOy 面上，B 在 yOz 面上，C 在 x 轴上，D 在 y 轴上.

8. 解：(1) 关于 xOy、yOz、zOx 面的对称点的坐标分别为 $(a,b,-c)$，$(-a,b,c)$，$(a,-b,c)$；
(2) 关于 x、y、z 轴的对称点的坐标分别为 $(a,-b,-c)$，$(-a,b,-c)$，$(-a,-b,c)$；
(3) 关于坐标原点的对称点的坐标为 $(-a,-b,-c)$.

9. 解：xOy 面：$(x_0,y_0,0)$；yOz 面：$(0,y_0,z_0)$；zOx 面：$(x_0,0,z_0)$；x 轴：$(x_0,0,0)$；y 轴：$(0,y_0,0)$；z 轴：$(0,0,z_0)$. 如图 8-4 所示：

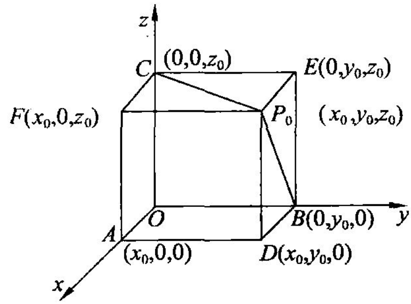

图 8-4

10. 解：过 P_0 且平行于 z 轴的直线上的点有相同的横坐标 x_0 和相同的纵坐标 y_0；过 P_0 且平行于 xOy 平面上的点具有相同的竖坐标 z_0.

11. 解：如图 8-5 所示，各顶点的坐标分别为：

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right), C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right), B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right),$$

$$D\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right), A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right), C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right),$$

$$B'\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right), D'\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right).$$

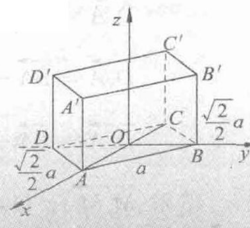

图 8-5

12. 解：点 M 到 x 轴的距离：$r_x = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$

点 M 到 y 轴的距离：$r_y = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}$

点 M 到 z 轴的距离：$r_z = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

13. 解：在 yOz 面上，设点 $P(0,y,z)$ 与 A、B、C 三点等距离，即

$|\overrightarrow{PA}|^2 = |\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PC}|^2$

故 $\begin{cases} 3^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = (y-5)^2+(z-1)^2 \\ 4^2+(y+2)^2+(z+2)^2 = (y-5)^2+(z-1)^2 \end{cases}$

解方程组，得 $y=1, z=-2$.

故所求点为 $(0,1,-2)$.

14. 解答见 P_{426} 例 4.

15. 解：$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(3-4)^2+(0-\sqrt{2})^2+(2-1)^2} = 2$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1,-\sqrt{2},1) = 2\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \cos\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi, \gamma = \frac{\pi}{3}$.

16. 解：(1) 当 $\cos\alpha = 0$ 时，向量与 x 轴垂直，平行于 yOz 面；

(2) 当 $\cos\beta = 1$ 时，$\beta = 0$，则向量与 y 轴正向一致，垂直于 zOx 面；

(3) 当 $\cos\alpha = \cos\beta = 0$ 时，则 $\cos^2\gamma = 1$. 故 $\gamma = 0$ 或 π，此时向量平行于 z 轴，垂直于 xOy 面.

17. 解：$\mathrm{Prj}_u \boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}| \cdot \cos\theta = 4 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 2$.

18. 解：设起点 A 的坐标为 (x,y,z)，则

$\overrightarrow{AB} = (2-x,-1-y,7-z)$

由题意，得 $2-x=4, -1-y=-4, 7-z=7$

$\therefore x=-2, y=3, z=0$.

故起点 A 为 $(-2,3,0)$.

19. 解：$\boldsymbol{a} = 4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})$

$= 13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$

则 $a_x = 13$ 且 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

第二节　数量积　向量积　*混合积

一、知识要点与考点

1. 向量的运算

	定　义	说　明
数量积（内积，点乘）	两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\,\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\theta$，$\theta$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角	(1) 若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$. (2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$. (3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$. (4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. (5) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦为 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$. (6) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 即 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.
向量积（外积，叉乘）	两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为一向量 $\boldsymbol{c}$，其模为 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert\,\lvert\boldsymbol{b}\rvert\sin\theta$，其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，其方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面（即 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $\boldsymbol{b}$），且 $\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定.	(1) 若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\{a_yb_z-b_ya_z,a_zb_x-b_za_x,a_xb_y-b_xa_y\}$. (2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$. (3) $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$. (4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$. (5) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角正弦 $\sin\theta=\dfrac{\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$. (6) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$ 其中 b_x,b_y,b_z 中有一个为 0 时，如 $b_x=0$，应理解为 $a_x=0$. (7) 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为相邻边的平行四边形的面积为 $\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert$；若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为三角形的任意两边，则三角形面积为 $\dfrac{1}{2}\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert$.

	定义	说明
混合积	对向量 a、b、c，称 $(a\times b)\cdot c$ 为三向量 a、b、c 的混合积，记作 $[a,b,c]$.	(1) 若 $a=\{a_x,a_y,a_z\}$，$b=\{b_x,b_y,b_z\}$，$c=\{c_x,c_y,c_z\}$ 有 $[a,b,c]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$. (2) $(a\times b)\cdot c=(b\times c)\cdot a=(c\times a)\cdot b$. (3) $(a\times b)\cdot c=-(b\times a)\cdot c=-(a\times c)\cdot b$. (4) $\mid[a,b,c]\mid$ 等于以 a、b、c 为棱的平行六面体的体积，并且当 a、b、c 成右手系时，$[a,b,c]$ 为正，当 a、b、c 成左手系时，$[a,b,c]$ 为负. (5) a、b、c 共面 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的 λ、μ 和 υ，使得 $\lambda a+\mu b+\upsilon c=0\Leftrightarrow(a\times b)\cdot c=0$.

2. 重点、难点与考点

数量积、向量积和混合积的定义、性质及相关运算.

二、经典例题解析

基本题型Ⅰ：有关向量的数量积、向量积与混合积的运算及性质问题

例 1 设未知向量 x 与 $a=2i-j+2k$ 共线，且满足 $a\cdot x=-18$. 求 x.

解：方法一

由于 x 与 a 共线，故设 $x=\lambda a=(2\lambda,-\lambda,2\lambda)$，

$\because a\cdot x=(2,-1,2)\cdot(2\lambda,-\lambda,2\lambda)=9\lambda=-18$，

$\therefore \lambda=-2$，

故 $x=(-4,2,-4)$.

方法二

由于 x 与 a 共线，故可设 $x=\lambda a$，则

$a\cdot x=a\cdot(\lambda a)=\lambda(a\cdot a)=\lambda|a|^2=\lambda[2^2+(-1)^2+2^2]=9\lambda=-18$，

$\therefore \lambda=-2$.

故 $x=(-4,2,-4)$.

例 2 已知 $|a|=6$，$|b|=3$，$|c|=3$，$(\hat{a,b})=\dfrac{\pi}{6}$，$c\perp a$，$c\perp b$，求 $[a,b,c]$.

【思路探索】 由定义，$[a,b,c]=(a\times b)\cdot c=|a\times b|\cdot|c|\cdot\cos(\widehat{a\times b,c})$. 故应先求 $|a\times b|$ 及 $\cos(\widehat{a\times b,c})$.

解：$|a\times b|=|a|\cdot|b|\cdot\sin(\hat{a,b})=6\times3\times\sin\dfrac{\pi}{6}=9$

又 $\because c\perp a$，$c\perp b$，$\therefore c\parallel(a\times b)$，

故 c 与 $(a\times b)$ 的夹角 $\theta=0$ 或 π.

因此，$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\theta=\pm 27$.

例 3 设 $\boldsymbol{a}=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,-4,5)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，问 λ 为何值时，$|\boldsymbol{c}|$ 最小？并证明：当 $|\boldsymbol{c}|$ 最小时，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$.

解：$|\boldsymbol{c}|^2=(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\lambda^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\lambda+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})$，所以当 $\lambda=-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=-\dfrac{12}{50}=-\dfrac{6}{25}$ 时，$|\boldsymbol{c}|$ 最小，

为什么？

此时
$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}&=(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\left(-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}\right)(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})=0,\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$.

例 4 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$ ________.

【思路探索】 利用向量运算的性质将要求的式子展开化简.

解：
$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\&=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.\end{aligned}$$

【方法点击】 熟练掌握向量的数量积、向量积与混合积的基本性质.

基本题型 Ⅱ：关于向量的平行、垂直、共面关系及夹角的问题

例 5 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求一单位向量 $\boldsymbol{m}$，使 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共面.

解：设所求向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，依题意，有

$|\boldsymbol{m}|=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$

$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{c}=0\Rightarrow 2x-2y+z=0$

$\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共面 $\Rightarrow[\boldsymbol{m},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=0$，即 $\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&0\\0&1&-2\end{vmatrix}=2y+z=0$

以上三式联立，解得

$x=\dfrac{2}{3},y=\dfrac{1}{3},z=-\dfrac{2}{3}$，或 $x=-\dfrac{2}{3},y=-\dfrac{1}{3},z=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore\boldsymbol{m}=\pm\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

【方法点击】 涉及到共面问题时，常用混合积.

例 6 设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 和 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，求非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解：由 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$，得