概率统计辅导书

西安交通大学 魏 平 王 宁 主编

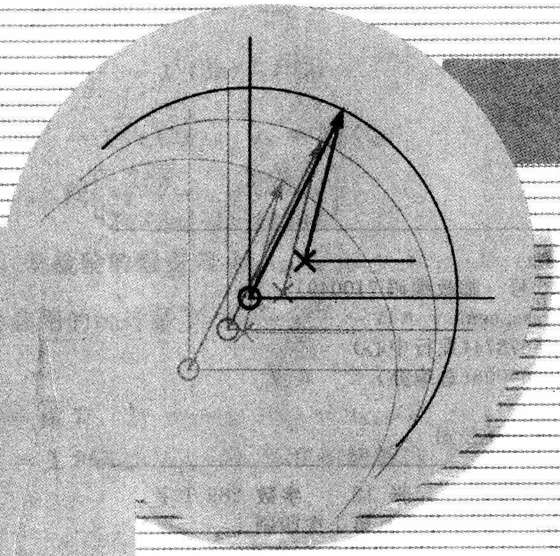
西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

概率统计
辅导书

西安交通大学

主编 魏 平 王 宁

编者 齐雪玲 魏 平 王 宁 王翠玲 徐凤敏
刘康民 李耀武 赵小艳 戴雪峰 吴春红



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书由五个部分组成:一、本章内容提要,帮助读者对当前章内容进行总结和梳理,使读者对本章内容有一个宏观的了解;二、疑难解惑,以问答形式对容易混淆的概念和基本方法作解答;三、典型例题解析;通过例题对概率统计典型题的分析方法和计算方法给出示范解答;四、应用题解析,意在提高读者解决实际问题的能力;五、自测题,提供一定数量经精心编写的习题。书后还附录了多套模拟试题,可供读者检验学习效果之用。

本书可供大学本科非数学专业学生学习使用,也可供非数学专业考研复习使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计辅导书/魏平 王宁主编.—西安:西安交通大学出版社,2010.8

ISBN 978-7-5605-3674-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①魏… ②王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 149501 号

书　　名	概率统计辅导书
主　　编	魏平　王宁
责任编辑	叶涛
出版发行	西安交通大学出版社 (西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址	http://www.xjtupress.com
电　　话	(029)82668357　82667874(发行中心) (029)82668315　82669096(总编办)
传　　真	(029)82668280
印　　刷	陕西宝石兰印务有限责任公司
开　　本	787mm×1 092mm　1/16　**印张** 12　**字数** 289 千字
版次印次	2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5605-3674-3/O·348
定　　价	19.80 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248　(029)82665249

投稿热线:(029)82664954

读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

前言

概率论与数理统计是高等院校一门重要的基础课，它在工农业生产、科学技术、经济活动及教育研究等领域中有着十分广泛的应用。它是一门具有较强系统性，基础理论较为抽象，具体计算比较繁杂，同时实用性很强的课程，因此这门课程越来越受到重视。为了便于学生掌握本课程的基本内容，加深对内容的理解，我们编写了这本概率统计辅导书。根据本课程的特点，在编写过程中，我们着重注意了以下几个方面：

(1) 在内容选取上，遵循“内容的选取要注重实用性与先进性”的原则，加强了理论与实际的联系，注重了该学科知识在社会经济与工程技术方面的具体应用。

(2) 本辅导书由五个部分组成：第一部分，通过各章内容提要，帮助学生对本章内容进行总结和梳理，使学生对本章内容有一个宏观的了解；第二部分通过疑难解惑，使学生对容易混淆的概念和基本方法有一个正确的理解；第三部分通过典型例题解析，提高学生对基本概念和基本内容的掌握；第四部分通过应用题解析，意在提高学生解决实际问题的能力；第五部分通过自测题来了解学生对基本概念和基本方法的初步掌握状况。学生通过这些习题的练习，可以进一步加深理解和巩固本章的基本概念和基本理论。

(3) 本辅导书在处理上避免使用较深的数学知识，只要具备高等数学和线性代数的基本知识即可，书中的所有推导论证都是在这一范围内进行。

本辅导书由魏平统一策划；齐雪玲编写第 1 章：随机事件与概率； 魏平编写第 2 章：一维随机变量及其分布； 王宁编写第 3 章：二维随机变量及其分布； 王翠玲编写第 4 章：随机变量的数字特征； 徐凤敏编写第 5 章：大数定理与中心极限定理； 刘康民编写第 6 章：数理统计的基本概念； 李耀武编写第 7 章：参数估计与区间估计； 赵小艳编写第 8 章：假设检验； 戴雪峰编写第 9 章：方差分析； 吴春红编写第 10 章：回归分析，最后由魏平统稿。

由于我们水平有限，加之时间仓促，缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正，以使本辅导书不断完善。

作 者

2010 年 6 月于西安交通大学

目　录

前言

第 1 章　随机事件和概率 ………… (1)
- 1.1　内容提要 ………… (1)
- 1.2　疑难解惑 ………… (5)
- 1.3　典型例题解析 ………… (6)
- 1.4　应用题 ………… (14)
- 1.5　自测题 ………… (16)

第 2 章　一维随机变量及其分布 ………… (19)
- 2.1　内容提要 ………… (19)
- 2.2　疑难解惑 ………… (21)
- 2.3　典型例题解析 ………… (22)
- 2.4　应用题 ………… (34)
- 2.5　自测题 ………… (37)

第 3 章　二维随机变量及其分布 ………… (39)
- 3.1　内容提要 ………… (39)
- 3.2　疑难解惑 ………… (41)
- 3.3　典型例题解析 ………… (47)
- 3.4　应用题 ………… (58)
- 3.5　证明题 ………… (60)
- 3.6　自测题 ………… (62)

第 4 章　随机变量的数字特征 ………… (64)
- 4.1　内容提要 ………… (64)
- 4.2　疑难解惑 ………… (66)
- 4.3　典型例题解析 ………… (67)
- 4.4　应用题 ………… (80)
- 4.5　自测题 ………… (88)

第 5 章　大数定律及中心极限定理 ………… (90)
- 5.1　内容提要 ………… (90)
- 5.2　疑难解惑 ………… (91)
- 5.3　典型例题解析 ………… (91)
- 5.4　应用题 ………… (97)
- 5.5　自测题 ………… (99)

第 6 章　数理统计的基本概念 ……（102）
6.1　内容提要 ……（102）
6.2　疑难解惑 ……（104）
6.3　典型例题解析 ……（106）
6.4　应用题 ……（109）
6.5　自测题 ……（112）
第 7 章　参数点估计与区间估计 ……（114）
7.1　内容提要 ……（114）
7.2　疑难解惑 ……（117）
7.3　典型例题解析 ……（118）
7.4　应用题 ……（133）
7.5　自测题 ……（136）
第 8 章　假设检验 ……（140）
8.1　内容提要 ……（140）
8.2　疑难解惑 ……（142）
8.3　典型例题 ……（143）
8.4　应用题 ……（146）
8.5　自测题 ……（148）
第 9 章　方差分析 ……（150）
9.1　内容提要 ……（150）
9.1.1　方差分析概述 ……（150）
9.1.2　单因素方差分析 ……（150）
9.1.3　双因素方差分析 ……（152）
9.2　疑难解惑 ……（155）
9.3　典型例题 ……（156）
9.4　应用题 ……（159）
9.5　自测题 ……（162）
第 10 章　回归分析 ……（164）
10.1　内容提要 ……（164）
10.2　疑难解惑 ……（166）
10.3　典型例题 ……（167）
10.4　应用题 ……（169）
10.5　自测题 ……（170）
模拟试题 ……（171）
模拟试题参考答案 ……（177）

第 1 章　随机事件和概率

1.1　内容提要

1. 随机试验的概念

具有以下三个特点的试验称为随机试验

(1) 重复性:试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 明确性:试验的可能结果不止一个,但能事先明确试验的所有可能的结果;

(3) 随机性:每次试验只会出现一种结果,但出现哪一种结果,在试验前不能确定。

样本空间和随机事件

随机试验所有可能结果的全体称为样本空间;试验的每一个可能结果称为样本点,样本空间是全体样本点的集合;随机事件是对随机试验中出现的某些现象或某种情况的描述,它可以用试验的某些可能结果来表示。所以从集合论的观点来看,随机事件就是样本空间的子集合。随机事件简称为事件。

2. 事件的关系及运算

(1) 包含关系　如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A。记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$。

(2) 相等关系　对于两个事件 A、B,若 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 同时成立,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A = B$。

(3) 和事件　"事件 A 与事件 B 中至少有一个发生"的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件,记为 $A \cup B$。

(4) 积事件　"事件 A 与事件 B 同时发生"的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件,记为 $A \cap B$,或记为 AB。

(5) 互斥关系　若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互斥或互不相容。

(6) 差事件　"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件,记为 $A - B$。

(7) 逆事件　对 A、B 两个随机事件,若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \varnothing$ 同时成立,则称事件 A 与事件 B 互为逆事件(或对立事件)。事件 A 的对应事件记为 $\overline{A}$。

事件关系的性质:

$A \subset A \cup B$;$B \subset A \cup B$;$A \cup A = A$

$A - B \subset A$;$A - B = A\overline{B}$;$(A - B) \cup A = A$; $(A - B) \cup B = A \cup B$;

$(A - B) \cap B = \varnothing$;$\overline{\overline{A}} = A$;$A \cup \overline{A} = \Omega$;$A\overline{A} = \varnothing$;

$A \cap A = A; A \cup \varnothing = A; A \cup \Omega = \Omega;$

$A \cap \Omega = A; A \cap \varnothing = \varnothing;$

事件运算的性质：设 A、B、C 为事件，则有

和的交换律	$A \cup B = B \cup A$
积的交换律	$A \cap B = B \cap A$
和的结合律	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
积的结合律	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
积对和的分配律	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
和对积的分配律	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
德摩根对偶律	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3. 概率的定义及性质

概率是随机事件出现的可能性大小，是随机事件不确定性的度量。

(1) 概率的统计定义：$P(A) = \frac{n_A}{n}$，其中 n 表示试验的总次数；n_A 表示 n 次试验中 A 出现的次数。

概率的统计定义揭示了随机事件的统计规律，即概率是频率的稳定值。在实际应用中可用频率作概率的近似计算。

(2) 概率的公理化定义：设随机试验 E 的样本空间为 Ω，则称满足下列性质且定义在事件域上的集合函数 $P(*)$ 为概率：

1) 非负性　对于任一随机事件 A，都有 $P(A) \geqslant 0$；

2) 规范性　对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega) = 1$；

3) 可列可加性　对两两互斥事件列 $A_1, \cdots, A_m$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(3) 概率的古典定义：

具有以下特点的随机试验称为古典概型：

1) 随机试验的可能结果只有有限个；

2) 每个结果在一次试验中发生的可能性相等。

设古典概型试验 E 的所有可能结果为 n，若事件 A 恰好包含其中的 m 个结果，则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A\text{ 所包含的试验结果的个数}}{\Omega\text{ 中试验结果的总数}}$$

容易验证，概率的古典定义确定的概率满足公理化定义的三条性质：非负性，规范性，可列可加性。

(4) 概率的几何定义：如果一个随机试验的样本空间 Ω 充满某个区域，其度量(长度、面积或体积等)大小可用 S_Ω 表示，任意一点落在度量相同的子区域内是等可能的(这里“等可能”的确切意义为：设区域 Ω 中有任意一个小区域 A，如果它的度量为 S_A，则点落入 A 中的可能性大小与 S_A 成正比，而与 A 的位置及形状无关)，则事件 A 的概率为 $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$。

这个概率称为几何概率，它满足概率的公理化定义的三条性质。

(5) 概率的性质

1) $P(\varnothing)=0$;

2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

3) 设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A);P(A)\leqslant P(B)$$

4) $P(\bar{A})=1-P(A)$

5) 对于任意两个事件 A、B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

4. 条件概率与全概率公式、逆概率公式

(1) 条件概率的定义

设 A、B 为两个事件，若 $P(A)>0$，则称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为“在已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率”。而将 $P(B)$ 称为无条件概率。

条件概率满足概率的三条公理，即：

1) 非负性　对于任一事件 B，$P(B\mid A)\geqslant 0$;

2) 规范性　对于必然事件 Ω，$P(\Omega\mid A)=1$;

3) 可列可加性　对两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\mid A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\mid A)$$

(2) 乘法公式

由上述条件概率的定义，可推出下述乘法公式：

若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$。

乘法公式可以推广到 n 个任意事件之积的情形，即

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 为 n 个事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$

则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$

(3) 全概率公式

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是随机试验 E 的样本空间 Ω 的一个完备事件组(划分)，$P(A_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则对 Ω 中的任一事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

全概率公式的简单形式为：$0<P(A)<1$，则

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})$$

(4) 逆概率公式

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是随机试验 E 的样本空间 Ω 的一个完备事件组(划分)，$P(A_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，B 为 E 的一个事件，则

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

全概率公式与逆概率公式都是求复杂事件概率的重要公式，两个公式所求的概率虽不相同，但两者之间存在着密切的联系。在全概率公式中，如果把 A_i 看作导致事件 B 发生的“原因”，则全概率公式是一个“由因求果”问题。在这里，$P(A_i) > 0$ 是事先已知的，可根据经验或分析得到，通常被称为“先验概率”。在逆概率公式中，“结果”事件 B 已经发生，而要寻找使 B 发生的“原因”，所以是一个“由果求因”问题。$P(A_i \mid B)$ 是得到信息 B 后确定的，被称为“后验概率”。从逆概率公式可以看到，后验概率 $P(A_i \mid B)$ 的计算是以先验概率 $P(A_i)$ 为基础的，两者之间是有密切联系的。

5. 事件的独立性

两个事件独立的定义：设 A、B 是两个事件，若 $P(AB) = P(A)P(B)$ 成立，则称事件 A 与 B 相互独立，简称 A 与 B 独立

根据这个定义，容易验证必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件都是相互独立的。因为必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 的发生与否，的确是不受任何事件的影响，也不影响其他事件是否发生。

定理 下面四个命题是等价的：

(1) 事件 A 与 B 相互独立；

(2) 事件 A 与 $\bar{B}$ 相互独立；

(3) 事件 $\bar{A}$ 与 B 相互独立；

(4) 事件 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立。

两个事件的相互独立性定义，可以推广到三个事件以至 n 个事件的情形。

定义：设 A、B、C 是三个事件，如果下面四个等式

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

都成立，则称事件 A、B、C 相互独立

定义：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是任意的 n 个事件，如果对于任意的整数 $k(1 < k \leqslant n)$ 和任意的 k 个整数 $i_1, i_2, \cdots, i_k (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n)$，都有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立

由上述定义可以看出，如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，那么其中的任意 $k(1 < k \leqslant n)$ 个事件也相互独立。与上述定理类似，可以证明：将相互独立事件中的任意部分换为逆事件，所得的诸事件仍相互独立。

事件的相互独立性是概率论中的一个重要概念。一般在理论推导和证明中，常用定义判定独立性，而在实际应用中，往往是根据问题的实际意义来判断独立性。

1.2　疑难解惑

问题 1.1　概率为零的事件是不可能事件吗？

答　不可能事件的概率一定为零，即：若 $A=\varnothing$，则 $P(A)=0$。但反之不一定成立，即：概率为零的事件不一定是不可能事件，即：若 $P(A)=0$，则不一定有 $A=\varnothing$。

例如：在几何概型的概率计算中，设样本空间为 $\Omega=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$，随机事件 $A=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$。Ω 为圆域的所有点，A 为圆周上的所有点，由几何概型的概率计算公式得 $P(A)=\dfrac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\dfrac{0}{\pi}=0$。但是，$A$ 是可能发生的。即，若随机试验是向 Ω 随机地投点，点落在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的情况是可能发生的。

又如，对于连续型随机变量 X，只讨论它在一个区间上取值的概率，而它取单个点的概率为零，即有 $P(X=a)=0$，但 $\{X=a\}$ 这个随机事件是有可能发生的。仅在样本点有限（古典概型）或样本点无穷可数（离散型随机变量）这种特殊的情况下，若 $P(A)=0$，才有 $A=\varnothing$。

问题 1.2　概率为 1 的事件是必然事件吗？

答　必然事件的概率一定为 1，即：若 $A=\Omega$，则 $P(A)=1$，但概率等于 1 的事件不一定是必然事件，即，若 $P(A)=1$，不一定有 $A=\Omega$。

例如，在几何概型的概率计算中，设样本空间为 $\Omega=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$，随机事件 $A=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$，$\bar{A}=\Omega-A=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\text{ 且 }x^2+y^2\neq 1\}$，则 $P(\bar{A})=P(\Omega)-P(A)=1-0=1$，但事件 $\bar{A}$ 显然不是必然事件 Ω。即，若随机试验是向 Ω 随机地投点，点落在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的情况是可能发生的，即点有可能不落在 $\bar{A}$ 上。

又如，对于连续型随机变量 X，若 X 服从 $[1,2]$ 上的均匀分布，则 $P\{1\leqslant X\leqslant 2\}=1$，而 $P\{1<X\leqslant 2\}=1$，但 $\{1<X\leqslant 2\}$ 不是必然事件。仅在样本点有限（古典概型）或样本点无穷可数（离散型随机变量）这种特殊的情况下，若 $P(A)=1$，才有 $A=\Omega$。

问题 1.3　随机事件互斥与随机事件独立的关系如何？

答　随机事件的独立性是事件间的概率属性，即若 A、B 是两个随机事件且相互独立，则有 $P(AB)=P(A)P(B)$；而随机事件的互斥是指事件间本身的关系，即若 A、B 是两个随机事件且互斥，则有 $AB=\varnothing$，即 A、B 不能同时发生。一般情况下，若 A、B 独立，则 A、B 是不互斥的，即 $AB\neq\varnothing$。因为如果它们互斥，则说明 A 发生 B 就一定不发生，这就与独立性的定义“A 发生与否对事件 B 发生的没有影响”相矛盾。

下面证明两者之间的关系。

若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 A、B 互斥与 A、B 相互独立不能同时成立。

证明　若 A、B 互斥，则 $AB=\varnothing$，即 $P(AB)=P(\varnothing)=0$。

又 $P(A)P(B)>0$，所以 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，即 A、B 不独立。这就是说，若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，且 A、B 互斥，则 A、B 一定不独立。

反之，若 A、B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，所以 $AB\neq\varnothing$，即 A、B 不互斥。

但是，若不限制 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 A、B 互斥与 A、B 相互独立有时是可以同时成立的。例如，当 $A=\varnothing$ 时，对任意事件 B 有 $AB=\varnothing$，即 A、B 互斥，而 $P(AB)=P(\varnothing)=0=P(A)P(B)$，故 A、B 相互独立。

问题 1.4 对于任意两个随机事件 A、B，若 $P(A) > 0$，则 $P(B \mid A)$ 与 $P(B)$ 的大小关系如何？

答 $P(B \mid A)$ 与 $P(B)$ 的大小关系不一定。

例如，一个口袋中有 10 张彩票，只有 2 张有奖。今从中无放回抽取两次，一次一张。设 A 表示“第一次抽到有奖彩票”，B 表示“第二次抽到有奖彩票”，则 $P(A) = P(B) = \frac{1}{5}$，$P(B \mid A) = \frac{1}{9} < P(B)$，$P(B \mid \overline{A}) = \frac{2}{9} > P(B)$。

1.3 典型例题解析

例 1.1 n 对新人参加婚礼，现进行一项游戏，随机地把 $2n$ 个人分成 n 对，问每对恰为夫妻的概率是多少？

解 把这 $2n$ 个人从左至右排成一列，总共有 $(2n)!$ 种排法。处在 1、2 位置的作为一对夫妻，3、4 位置的作为一对夫妻，等等。第一位可有 $2n$ 种取法 C_{2n}^1，第二位只有一种取法；第三位有 $2n-2$ 种取法 C_{2n-2}^1，第四位只有一种取法；如此类推。这种排列的总数为 $2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2 = 2^n n!$。

所以每对恰为夫妻的概率 $P = \frac{2^n n!}{(2n)!} = \frac{1}{(2n-1)!!}$。

例 1.2（盒子模型） 设有 n 个球，每个球都等可能地被放到 N 个不同盒子中的任一个，每个盒子所放的球数没有限制。试求

(1) 指定的 $n(n \leqslant N)$ 个盒子中各有一个球的概率 p_1；

(2) 恰好有 $n(n \leqslant N)$ 个盒子各有一个球的概率 p_2；

(3) 指定的一个盒子不空的概率 p_3；

(4) 指定的一个盒子恰有 k 个球的概率 p_4。

解 因为每一个球都有 N 种可能的放法，n 个球就有 N^n 种放法，所以样本空间样本点的总数为 N^n 个，它们是等可能的；

(1) n 个球放到指定的 n 个盒子中，共有 $n!$ 种放法，所以 $p_1 = \frac{n!}{N^n}$；

(2) 与(1)的区别在于：此 n 个盒子可以在 N 个盒子中任意选取，有 C_N^n 种取法，所以 $p_2 = \frac{C_N^n n!}{N^n}$；

(3) 指定的一个盒子不空，则该盒子所放的球数可以是一个，也可以是 n 个，计算

该事件所含样本点数较繁琐，故考虑其逆事件所含样本点数，即“指定的一个盒子是空的”所含样本点数为 $(N-1)^n$，所以 $p_3 = 1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}$；

(4) 指定的一个盒子放 k 个球，共有 $C_n^k (N-1)^{n-k}$ 种放法，所以 $p_4 = \frac{C_n^k (N-1)^{n-k}}{N^n}$。

例 1.3 一质点从坐标原点(0,0)出发，等可能地向上、下、左、右四个方向游动，每次游动距离为 1 个长度单位。

(1) 求经过 4 次游动之后，质点到达点(2,2) 的概率；

(2) 求经过 $2n$ 次游动之后，质点到达点(2,2) 的概率；

解 由已知可知质点向上、下、左、右游动的概率均为$\frac{1}{4}$。

(1) 设$A=\{$经四次游动后，质点到达点(2,2)$\}$，A发生等价于4次游动中有2次向右，2次向上，故

$$P(A)=C_4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{128}$$

(2) 设$B=\{$经 $2n$ 次游动后，质点到达点(2,2)$\}$，要使 B 发生，必须是质点在这 $2n$ 次游动中向右比向左游动的次数多 2，向上比向下游动的次数多 2。

$$\begin{aligned}
P(B)&=\sum_{k+m=n-2}C_{2n}^{k+2}C_{2n-(k+2)}^{k}C_{2n-(2k+2)}^{m+2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{m+2}\left(\frac{1}{4}\right)^{m}\\
&=\sum_{k+m=n-2}\frac{(2n)!}{(k+2)!k!(m+2)!m!}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{m+2}\left(\frac{1}{4}\right)^{m}\\
&=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(2n)!}{(k+2)!k!(n-k-2)!(n-k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\\
&=C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!}\\
&=C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n-2}C_n^kC_n^{k+2}
\end{aligned}$$

例 1.4 设罐中有 b 个黑球、r 个红球，每次随机取出一个球，取出后将原球放回，还加进 c 个同色球和 d 个异色球，若连续从罐中取出三个球，求其中有两个红球、一个黑球的概率

解 设 B_i 为“第 i 次取出的是黑球”，R_j 为“第 j 次取出的是红球”。

若连续从罐中取出三个球，其中有两个红球、一个黑球，则由乘法公式可得

$$\begin{aligned}
P(B_1R_2R_3)&=P(B_1)P(R_2\mid B_1)P(R_3\mid B_1R_2)\\
&=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{r+d}{b+r+c+d}\cdot\frac{r+d+c}{b+r+2c+2d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(R_1B_2R_3)&=P(R_1)P(B_2\mid R_1)P(R_3\mid R_1B_2)\\
&=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{b+d}{b+r+c+d}\cdot\frac{r+d+c}{b+r+2c+2d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(R_1R_2B_3)&=P(R_1)P(R_2\mid R_1)P(B_3\mid R_1R_2)\\
&=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{r+c}{b+r+c+d}\cdot\frac{b+2d}{b+r+2c+2d}
\end{aligned}$$

以上概率与黑球在第几次被抽取有关。

罐子模型也称为波利亚(Polya) 模型，这个模型可以有各种变化，具体如下：

(1) 当 $c=-1,d=0$ 时，即为不放回抽样，此时前次抽取结果会影响后次抽取结果。但只要抽取的黑球与红球个数确定，则概率不依赖其抽出球的次序，都是一样的。此例中有：

$$\begin{aligned}
P(B_1R_2R_3)&=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)\\
&=\frac{br(r-1)}{(b+r)(b+r-1)(b+r-2)}
\end{aligned}$$

(2) 当 $c=0,d=0$ 时，即为放回抽样，此时前次抽取结果不会影响后次抽取结果，故上述

三个概率相等，且都等于 $P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)=\dfrac{br^2}{(b+r)^3}$；

(3) 当 $c>0, d=0$ 时，称为传染病模型。此时，每次取出球后会增加下一次取到同色球的概率，或换句话说，每次发现一个传染病患者，以后都会增加再传染的概率，与(1)，(2) 一样，以上三个概率都相等，且都等于

$$P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)$$
$$=\frac{br(r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}$$

从以上(1)、(2) 和(3) 中可以看出：在罐子模型中只要 $d=0$，则以上三个概率都相等，即只要抽取的黑球与红球个数确定，则概率不依赖其抽出球的次序，都是一样的。

(4) 当 $c=0, d>0$ 时，称为安全模型。此模型可解释为：每当事故发生了(红球被取出)，安全工作就抓紧一些，下次再发生事故的概率就会减少；而当事故没有发生时(黑球被取出)，安全工作就放松一些，下次再发生事故的概率就会增大。在这种场合，上述三个概率分别为：

$$P(B_1R_2R_3)=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{r+d}{b+r+d}\cdot\frac{r+d}{b+r+2d}$$

$$P(R_1B_2R_3)=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{r+d}{b+r+2d}$$

$$P(R_1R_2B_3)=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{r}{b+r+d}\cdot\frac{b+2d}{b+r+2d}$$

例 1.5　设在 n 张彩票中有一张奖券，求第二个人摸到奖券的概率是多少？

解　设 A_i 表示事件“第 i 人摸到奖券”，$i=1,2,\cdots,n$，现在目的是求 $P(A_2)$，因为 A_1 是否发生直接关系到 A_2 发生的概率，即：

$$P(A_2\mid A_1)=0,\quad P(A_2\mid\overline{A_1})=\frac{1}{n-1}$$

而 A_1 与 $\overline{A_1}$ 是两个概率大于 0 的事件，即

$$P(A_1)=\frac{1}{n},\quad P(\overline{A_1})=\frac{n-1}{n}$$

于是由全概率公式得

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})$$
$$=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$$

用类似的方法可得

$$P(A_3)=P(A_4)=\cdots=P(A_n)=\frac{1}{n}$$

如果设 n 张彩票中有 $k(\leqslant n)$ 张奖券，则可得

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=\frac{k}{n}$$

这说明购买彩票时，不论先买后买，中奖机会是均等的。

例 1.6　设甲掷骰子 $m+1$ 次，乙掷 m 次，求甲掷出的偶数面数比乙掷出的偶数面数多的概率。

解　设 $A=\{$甲掷出偶数面数 $>$ 乙掷出偶数面数$\}$，$B=\{$甲掷出奇数面数 $>$ 乙掷出奇

数面数}。

由于$\overline{A}$＝{甲掷出偶数面数$\leqslant$乙掷出偶数面数}。设$\overline{A}$发生，则当乙掷出m次偶数面，甲至多掷出m次偶数面，即说明乙掷出 0 次奇数面时，甲至少掷出 1 次奇数面，从而甲掷出奇数面数大于乙掷出奇数面数。若乙掷出$m-1$次偶数面，则甲至多掷出$m-1$次偶数面，即说明乙掷出 1 次奇数面时，甲至少掷出 2 次奇数面，从而也有甲掷出奇数面数大于乙掷出奇数面数。这说明$\overline{A}$发生必导致B发生。同理可以说明B发生必导致$\overline{A}$发生。从而有

$\overline{A}=\{$甲掷出偶数面数$\leqslant$乙掷出偶数面数$\}$

$=\{$甲掷出奇数面数$>$乙掷出奇数面数$\}=B$

所以，$P(A)+P(B)=P(A)+P(\overline{A})=1$。

由于$P(A)=P(B)$，故，$P(A)=\dfrac{1}{2}$。

例 1.7　在长度为a的线段内任取两点将其分为三段，求这三条线段可以构成一个三角形的概率。

解　由于是将线段任意分成三段，所以由等可能性知这是一个几何概型问题。分别用x、y和$a-x-y$表示线段被分成的三段长度，见图 1-1，则显然应该有：

$0<x<a$；　$0<y<a$；　$0<a-(x+y)<a$。

第三个式子等价于：$0<x+y<a$，所以样本空间为(图 1-2)

$\Omega=\{(x,y);0<x<a,0<y<a,0<x+y<a\}$，

Ω的面积为$S_\Omega=\dfrac{a^2}{2}$。

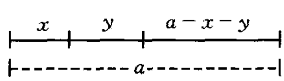


图 1-1

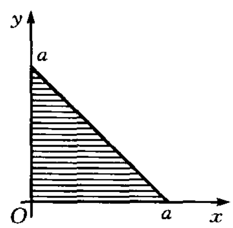


图 1-2

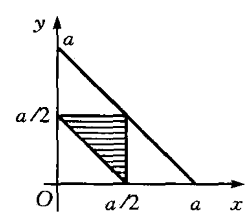


图 1-3

又根据构成三角形的条件：三角形中两边之和大于第三边，事件A所含样本点(x,y)必须满足：

$0<a-(x+y)<x+y$；　$0<x<y+(a-x-y)$；　$0<y<x+(a-x-y)$

整理得：$\dfrac{a}{2}<x+y<a$；　$0<x<\dfrac{a}{2}$；　$0<y<\dfrac{a}{2}$。

所以事件A可用图 1-3 中的阴影部分表示：事件A的面积为$S_A=\dfrac{a^2}{8}$，由此得：$P(A)=\dfrac{1}{4}$。

例 1.8　甲、乙两人约定上午 9 时至 10 时之间到某车站乘观光巴士，这段时间内有 4 班车。开车时间分别为9:15，9:30，9:45，10:00。如果约定：(1) 见车就乘；(2) 最多等一班车。求

甲、乙两人同乘一趟车的概率。假定甲、乙两人到达车站的时刻互不关联，且每人在 9 时至 10 时内的任何时刻到达车站是等可能的。

解 由题设可知，此问题属几何概型。

(1) 设 (x,y) 分别表示甲、乙两人到达车站的时刻，当 (x,y) 落入图 1-4 中阴影部分即可同乘一趟车，故 $P=\frac{900}{3600}=\frac{1}{4}$；

(2) 当 (x,y) 落入图 1-5 中阴影部分即可同乘一趟车，故 $P=\frac{2250}{3600}=\frac{5}{8}$。

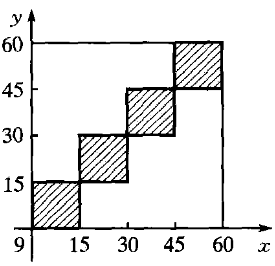


图 1-4

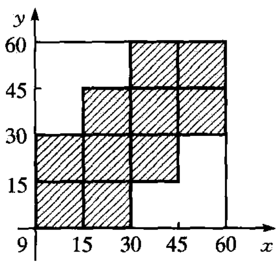


图 1-5

例 1.9 在一个有 n 个人参加的晚会上，每个人带了一件礼物，且假定每人带的礼物都不相同，晚会期间每人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件，问至少有一个人自己抽到自己礼物的概率是多少？

解 设 A_i 表示事件"第 i 个人自己抽到自己的礼物"，$i=1,2,\cdots,n$，所求概率为 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$，因为

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=\frac{1}{n}$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=\cdots=P(A_{n-1}A_n)=\frac{1}{n(n-1)}$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2A_4)=\cdots=P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}$$

所以由概率的加法公式得：

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

譬如，当 $n=5$ 时，此概率为 0.6333；当 $n\geqslant 10$ 时，此概率近似为 $1-e^{-1}=0.6321$。这表明：即使参加晚会的人很多(譬如 100 人以上)，事件"至少有一个人自己抽到自己礼物"也不是必然事件。

例 1.10 考察家庭中孩子的性别构成，假设生男生女是等可能的。设 $A=\{$一个家庭中有男孩又有女孩$\}$；$B=\{$一个家庭中最多有一个女孩$\}$。

对下述两种情况，讨论 A、B 的独立性。

(1) 该家庭中有两个小孩；

(2) 该家庭中有三个小孩。

解　(1) 有两个小孩的家庭，样本空间为 $\Omega=\{bb,bg,gb,gg\}$，其中 b 代表男孩，g 代表女孩。由等可能性知，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(AB)=\frac{1}{2}$。显然 A、B 不独立。

(2) 有三个小孩的家庭，样本空间为 $\Omega=\{bbb,bbg,bgb,gbb,gbg,ggb,bgg,ggg\}$，由等可能性知，$P(A)=\frac{3}{4}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{3}{8}$，显然有 $P(AB)=P(A)P(B)$，即 A、B 独立。

在许多实际问题中，随机事件的独立性大多是根据经验(相互有无影响)来判断的，从而使问题和计算都得到简化。但上面的例题告诉我们，不能仅停留在直觉上，有必要对随机现象作仔细研究。

例 1.11　设有 n 个盒子，k 个球($k\geqslant n$)，每个球等可能地落入一个盒子中，求每个盒子至少有一个球(没有一个盒子是空的)的概率。

解　每个盒子至少有一个球即可以有一个球，两个球，，也可以是 k 个球，直接计算比较繁琐，因此不妨考虑其逆事件的概率。

设 $A_i=\{$第 i 个盒子是空的$\}$，$i=1,2,\cdots,n$。

故所求概率为 $1-P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)$。

$$P(A_i)=\frac{(n-1)^k}{n^k}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k,i=1,2,\cdots,n$$

$$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)^k}{n^k}=\left(1-\frac{2}{k}\right)^k,1\leqslant i<j\leqslant n,\text{这样的 } i,j \text{ 共有 } C_n^2 \text{ 个}$$

$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_{n-1}})=\frac{[n-(n-1)]^k}{n^k}=\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k$，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中任意 $n-1$ 个数的一个排列，共有 C_n^{n-1} 个。而 $P(A_1A_2\cdots A_n)=0$，所以

$$1-P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\Big[\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\Big]$$

$$=1-\left[C_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^k-C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^k+\cdots+(-1)^{n-2}C_n^{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k+0\right]$$

$$=1-C_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^k+C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^k-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k$$

例 1.12　五个人进行抽签，其中四张是空的，一张为电影票，求每个人抽到电影票的概率

解　设 $A_i(i=1,2,3,4,5)$ 为第 i 个人抽到电影票的事件，$B_i(i=1,2,3,4,5)$ 为第 i 次抽到电影票的事件；

$$P(A_1)=P(B_1)=\frac{1}{5}$$

$$P(A_2)=P(\overline{B_1}B_2)=P(\overline{B_1})P(B_2\mid\overline{B_1})=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

$$P(A_3)=P(\overline{B_1}\,\overline{B_2}B_3)=P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}\mid\overline{B_1})P(B_3\mid\overline{B_1}\,\overline{B_2})=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

$$P(A_4)=P(\overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3}B_4)=P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}\mid\overline{B_1})P(\overline{B_3}\mid\overline{B_1}\,\overline{B_2})P(B_4\mid\overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3})=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$$