国际数学奥林匹克题库

America

Olympic

美国数学奥林匹克题解

《美国数学奥林匹克题解》编委会 组编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

国际数学奥林匹克题库

美国数学奥林匹克题解

《美国数学奥林匹克题解》编委会　组编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

美国数学奥林匹克题解 /《美国数学奥林匹克题解》编委会组编．—杭州：浙江大学出版社，2010.1
ISBN 978-7-308-07236-6

Ⅰ.美… Ⅱ.美… Ⅲ.数学课—高中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 225843 号

美国数学奥林匹克题解

《美国数学奥林匹克题解》编委会　组编

责任编辑　杨晓鸣
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州求是图文制作有限公司
印　　刷　临安市曙光印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　9.25
字　　数　190 千字
版 印 次　2010 年 1 月第 1 版　2010 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-07236-6
定　　价　16.00 元

版权所有 翻印必究　印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88925591

国际数学奥林匹克与奥林匹克数学(代序)

数学是锻炼思维的体操,以数学为内容的竞赛已有悠久的历史.在公元16世纪意大利的Tartalia和Cardano曾以解一元三次方程为内容进行过激烈的竞赛.在9世纪,法国科学院等也曾以悬赏的形式征求对数学难题的解答,通过有奖比赛而得到重要的数学发现.

国际数学奥林匹克的权威人士认为,以激发数学才能和引起数学兴趣为目的,中学生自愿参加的数学竞赛,是从匈牙利开始的.

1894年,著名数学家、物理学家L.Eötrös男爵就任匈牙利文化大臣.从这一年起,便开始了为选拔有数学才能的学生的国家考试.开始命名为Eötrös竞赛,后来又以对这一竞赛做出了贡献的J.Kurschak的名字命名,这一竞赛对匈牙利的数学发展起了很重要的作用.后来很多有成就的数学家都曾是这一竞赛的优胜者,例如:1897年的优胜者利波特·费叶尔,在傅立叶级数的可积性理论方面做出了许多出色的工作.1898年的优胜者忒奥多耳·冯·卡门是著名的应用力学家和工程师,对航空和航天技术的发展有过卓越的贡献.1903年的优胜者阿尔伏瑞德·哈尔提出了哈尔测度.马赛尔·黎斯是1904年的优胜者,在泛函分析中提出黎斯凸性定理.而1912年的优胜者嘎波尔·基格,他和波利亚合著的《分析中的定理和问题》至今仍享有盛名.

继匈牙利之后,罗马尼亚于1902年由《数学杂志》组织过数学竞赛.在以后的30年中再没有其他国家系统举办过重大的类似活动,直到匈牙利数学竞赛造就的大师们纷纷登台的时候,欧洲其他国家才睁开惊奇的目光,产生了浓厚的兴趣,并争相效仿.

1934年,前苏联在列宁格勒(今圣彼得堡)大学举办中学生数学奥林匹克,首次将中学生的数学竞赛与体育竞赛的奥林匹克相提并论,把这种活动命名为“数学奥林匹克”.

1949年,保加利亚举办了数学竞赛.

1950年,波兰举办了数学竞赛.

1951年,捷克斯洛伐克举办了数学竞赛.

1956年,中国举办了数学竞赛.

1958年,印度举办了数学竞赛.

此后还有前东德、瑞典(1961)、越南、前南斯拉夫、荷兰、古巴、意大利(1962)、蒙古、卢森堡(1963)、西班牙(1964)、英国、芬兰、阿根廷、比利时(1965)、以色列(1968)、加拿

大、希腊(1969)、前西德(1970)、澳大利亚(1971)、美国(1972)等国举办了数学竞赛.

事实表明,20世纪50年代以来,世界各地的这股举办中学生数学竞赛的热潮,它既为国际数学奥林匹克(IMO)的诞生准备了条件,又为世界数学奥林匹克的发展提供了动力.

1956年,经罗马尼亚罗曼教授的积极活动,东欧国家正式确定了开展国际数学奥林匹克竞赛的计划.并在1959年7月在罗马尼亚古都布拉索举行了第一届国际数学奥林匹克竞赛.保加利亚、捷克、匈牙利、波兰和罗马尼亚各派出了由8名学生组成的代表队,前苏联(实际是莫斯科)派出了4名学生组成的代表队.以后几年,参赛的国家并未增多.在1963年和1964年,南斯拉夫和蒙古先后加入,1965年芬兰加入,1967年法国、英国、意大利和瑞典也参加进来.从此参加的国家逐渐增多.1971年共有34个队,以后逐年发展,2008年共有103个国家及地区的549名选手参加了第49届IMO.

随着世界各地各级各类数学竞赛活动的蓬勃开展,对数学奥林匹克竞赛的试题的研究也悄然兴起.国际数学奥林匹克的发展使得竞赛的试题也形成一定的规范:它不再限定在各国高中数学的范围,而更多的是一般中学不怎么涉及的领域.如初等数论、组合论、一般几何、不等式等方面.而且试题的难度不在于了解和解决试题所需要的数学知识的多少,而在于对数学本质的洞察力以及是否具有创造力和数学的机智,试题无模式可套,要求学生探索思考,寻找规律.

由于IMO试题的上述特点,有人认为IMO试题代表的是一种特殊的数学,可以称为“奥林匹克数学”.

对于数学奥林匹克活动而言,其中最吸引人的,无疑就是那一道道闪耀着数学智慧,散发着数学美的试题.

数学大师华罗庚教授曾经说过:“出题比做题要难,题目要出得妙,出得好,要测得出水平.一次数学竞赛成功与否,主要取决于命题.”

基于数学竞赛试题的重要作用,对竞赛试题的研究和分析就成为一项重要的工作.为加强交流学习,开阔视野,给数学奥林匹克爱好者提供学习的源泉,我们特组织编写了“国际数学奥林匹克题库”系列丛书.

“国际数学奥林匹克题库”汇集了国内外重大数学竞赛的试题和解答.这些竞赛试题构思独特,新颖别致,灵活深邃,内容广,内涵深.解这些题不仅需要扎实的基础知识和基本技能,也需要灵活的思维和坚强的毅力.因此,对于有志于参加数学竞赛的同学来说,本丛书中的问题是不可或缺的训练材料.

“国际数学奥林匹克题库”的编写也是对国际数学竞赛资料的一次大整理,可作为各数学竞赛老师的一份重要资料,作为数学爱好者了解数学竞赛的一个窗口.

丛书的编写过程中,我们参考了一些国内外的资料,在此对这些资料的作者表示感谢.

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

本丛书篇幅较大,内容庞杂.虽然作者仔细认真地核查多遍,但囿于我们的水平,不当乃至错误之处恐难避免,敬请读者不吝指正.请将您的意见发到 sxjszcbjb@163.com.或至网站:http://www.jsmaths.com 留言.

编　者

2010 年 1 月于苏州

目　录

数学奥林匹克在美国

美国是世界上开展数学竞赛较早的国家之一,早在 1950 年,美国数学会就开始举办美国高中数学考试(AHSME),并在 1957 年,将美国高中数学考试纳入国家方案,发展成全美国的数学竞赛。今天,世界上已经有很多国家和地区参加了这项竞赛活动。

随着美国数学竞赛活动的发展成长,今天,美国已经形成了一套系统的高中数学竞赛体系。其主要有以下几个层次:

一、美国数学竞赛(AMC)

美国数学竞赛(AMC)的前身就是 1950 年开始举办的美国高中数学考试(AHSME),自 2000 年开始,美国高中数学考试就分成两个不同级别的竞赛 AMC 10 和 AMC 12。

AMC10 一般在每年 2 月份举行,考试时间 75 分钟,共 25 道题,全为单项选择题,使用 2B 铅笔填涂答题卡,答对一题得 6 分,答错得 0 分,不答得 1.5 分,满分 150 分。考试可以使用普通计算器,不可使用编程计算器。此赛事于 2000 年开赛,2008 年 2 月举行第 10 届。此赛事主要是给高一及高一以下学生设置。

AMC12 是针对中等学校学生的数学测验,高三及高三以下学生均可报名参加。考试时间 75 分钟,共 25 道题,全为单项选择题,使用 2B 铅笔填涂答题卡,答对一题得 6 分,答错得 0 分,不答得 1.5 分,满分 150 分。考试可以使用普通计算器,不可使用编程计算器。

AMC10 和 AMC 12 的主要目的是在刺激学生对数学的兴趣,并且通过以选择题方式来考察学生的数学才能。

AMC 的另一个特殊的目的是帮助一些学生发掘出他们的数学才能,让学校注意到这些学生的才能及存在。AMC10 得分在 120 分或名列全球前 5% 者和 AMC12 得分在 100 分或名列全球前 5% 者将获得参加美国数学邀请赛(AIME)的资格。

二、美国数学邀请赛(AIME)

美国数学邀请赛(AIME)一般在每年的 3 月份举行,考试时间 3 小时,共 15 道题,每题答案均设计成 000~999 之间的三位整数,使用 2B 铅笔填涂答题卡,答对一题得 1 分,

答错得 0 分,不答得 0 分,满分 15 分,考试不可使用任何类型的计算器。此赛事于 1983 年开赛,主要是考虑到 AMC 和美国数学奥林匹克(USAMO)之间差距较大,故设置此赛事。2009 年 3 月份举行了第 27 届 AIME。

三、美国数学奥林匹克(USAMO)

美国数学奥林匹克(USAMO)开始于 1972 年,至 2009 年已举办 38 届,在每年的 4 月底或 5 月初举行,每次竞赛分两天举行,每次四个半小时解答三道试题(早期要求三个半小时解答五道试题)。美国数学奥林匹克的参加者都来自美国数学邀请赛(AIME)的优胜者。

美国数学奥林匹克的模式和国际数学奥林匹克一致,难度也大体相当,是数学奥林匹克训练的好材料,本书对 1990—2009 年美国数学奥林匹克(USAMO)的试题进行收集、整理,并加以翻译和解答。为使读者了解完整的美国数学奥林匹克(USAMO)资料,特将 1972—1989 年美国数学奥林匹克(USAMO)的试题作为附录,供读者参考。

四、美国数学奥林匹克夏令营(MOSP)

美国数学奥林匹克夏令营(MOSP)为期 3~4 周,在每年的 6 月和 7 月举行,它的举办目的是:将在一些重要的数学领域中给学生提供丰富的知识、深入的内容以激发他们保持和提高在数学方面的兴趣,为进一步研究数学做充分准备.这些内容包括组合论证,生成函数,图论,递推关系,嵌进和与积,概率,数论,多项式,方程理论,复数,算法证明,函数方程,RamseyS 定理,几何,鸽笼原理,包含排除,古典不等式等内容(传统上,与其他国家相比,这些内容在美国的学校受到较少重视),深入认识理解这些内容才能在国际数学奥林匹克竞赛中有出色的表现.夏令营还努力在参加者中营造一种友好的合作关系,并让他们感受到合作及自尊的愉快.在夏令营期间,还将举行国际数学奥林匹克美国队选拔考试,以选拔参加国际数学奥林匹克的 6 名美国队队员。

美国于 1974 年开始参加国际数学奥林匹克,是国际数学奥林匹克传统强队,名次大多在前五名,并先后四次获得团体总分第一名,分别是:1977 年第 19 届 IMO、1981 年第 22 届 IMO、1986 年第 27 届 IMO 和 1994 年第 35 届 IMO。

尤其值得说明的是,1994 年在中国香港举行的第 35 届 IMO 上,美国队全队 6 名队员都获得满分。这至今在 IMO 历史上前无古人,是一个了不起的奇迹。

本书中的题目和解答一是来源于领队交流资料中的官方解答,二是来源于作者和作者辅导的学生的解答,还有一些来源于国内一些期刊杂志中发表的解答.在此,对这些资料的提供者表示深深的谢意。

一、美国数学奥林匹克(1990—2008)试题

第19届美国数学奥林匹克(1990)

1 某州发行的执照的底版由6个数字组成(数字指0到9).每两个底版至少有两处的数字不同(因此底版 $\boxed{027592}$ 与 $\boxed{020592}$ 不能同时使用).试确定(并证明)这个州可以发行的执照底版的数目最大是多少?

2 一列函数 $\{f_n(x)\}$,定义如下:

$$f_1(x)=\sqrt{x^2+48},$$
$$f_{n+1}(x)=\sqrt{x^2+6f_n(x)},\quad n\geqslant 1.$$

对每个正整数 n,求方程 $f_n(x)=2x$ 的全部实数解.

3 项链 A 由14颗珠子组成,B 由19颗组成.证明对每个奇数 $n\geqslant 1$,均可将33颗珠子标以

$$n,n+1,n+2,\cdots,n+32.$$

使得上述每个整数各用一次,并且相邻的两颗珠子对应于互素的整数.

4 求出在 n 进制中,由不同的数字表示并且除去最左的数字外,每个数字与它左边的某个数字均差 ± 1 的数的个数(答案应读为 n 的一个尽可能简单的显函数),并予以证明.

5 平面上已给一锐角三角形 ABC.以 AB 为直径的圆交高 CC' 及其延长线于 M,N,以 AC 为直径的圆交高 BB' 及其延长线于 P,Q.证明点 M,N,P,Q 共圆.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第20届美国数学奥林匹克(1991)

1 对于满足$\angle A=2\angle B$,$\angle C$是钝角,三边长a,b,c是整数的$\triangle ABC$,求周长的最小值并给出证明.

2 对任何非空数集S,令$\sigma(S)$和$\pi(S)$分别表示S中所有元素的和与乘积,求证:

$$\sum_{S}\frac{\sigma(S)}{\pi(S)}=(n^2+2n)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(n+1),$$

其是“$\sum_{S}$”表示对$\{1,2,\cdots,n\}$的所有非空子集求和.

3 对于任意固定的整数$n\geqslant 1$,求证数列

$$2,2^2,2^{2^2},\cdots,(\bmod n)$$

自某项后是常数.

4 设$a=\dfrac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$,其中$m,n$是正整数,求证:

$$a^m+a^n\geqslant m^m+n^n.$$

5 设D是已给$\triangle ABC$的边AB上的动点,E点在该三角形的内部且是$\triangle ACD$和$\triangle BCD$内切圆的外公切线与CD的交点.求证:点E的轨迹是一段圆弧.

第21届美国数学奥林匹克(1992)

1 求下面乘积的数码和(关于 n 的函数)

$$9\times99\times9999\times\cdots\times(10^{2^n}-1),$$

其中每个因子的数码的个数等于它前面的因子的数码个数的两倍.

2 证明:

$$\frac{1}{\cos0^\circ\cos1^\circ}+\frac{1}{\cos1^\circ\cos2^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos88^\circ\cos89^\circ}=\frac{\cos1^\circ}{\sin^21^\circ}.$$

3 对于由整数构成的非空集合 S,令 $\sigma(S)$表示 S 中的所有元素和.设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是一个由正整数构成的集合,并且 $a_1<a_2<\cdots<a_n$.如果对每个正整数 $n\leqslant1500$,都存在 A 的一个子集 S,使得 $\sigma(S)=n$,求 a_{10} 的最小可能值.

4 设 AA',BB',CC'是过球内一点 P 的不在同一平面上的三条弦,过 A,B,C,P 的球与过 A',B',C',P 的球相切.证明:$AA'=BB'=CC'$.

5 $P(z)$是次数为1992的复系数多项式,且有不同的根.证明:存在复数 a_1,a_2,$\cdots$,a_{1992},使得 $P(z)$整除多项式

$$(\cdots((z-a_1)^2-a_2)^2-\cdots-a_{1991})^2-a_{1992}.$$

第 22 届美国数学奥林匹克(1993)

1 对每一个整数 $n\geqslant 2$,确定并证明满足下列等式:

$$a^n=a+1 \quad 及 \quad b^{2n}=b+3a$$

的两个正实数 a,b 谁大.

2 设凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 互相垂直,垂足为 E,证明:点 E 关于 AB、BC、CD、DA 的对称点共圆.

3 设函数 $f:[0,1]\to R$ 满足:

(1) $f(x)\geqslant 0, \forall x\in[0,1]$;

(2) $f(1)=1$;

(3) $f(x)+f(y)\leqslant f(x+y), x, y, x+y\in[0,1]$.

求出最小的常数 c,使 $f(x)\leqslant cx$ 对一切满足上述条件的函数 f 及一切 $x\in[0,1]$都成立,并证明你的结论.

4 设 a、b 是正奇数,序列 f_n 定义下:$f_1=a, f_2=b$,对 $n\geqslant 3$, f_n 是 $f_{n-1}+f_{n-2}$ 的最大奇约数.证明,当 n 充分大时 f_n 为常数,并确定此常数之值(用关于 a,b 的函数表示).

5 设 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 是一个正实数序列,满足 $a_{i-1}a_{i+1}\leqslant a_i^2$ ($i=1,2,\cdots$),证明:对一切 $n>1$,有

$$\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{n+1}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$$
$$\geqslant\frac{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}}{n}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

第 23 届美国数学奥林匹克(1994)

1 设 $K_1<K_2<K_3<\cdots$是正整数,且没有两个数是相邻的,$S_m=K_1+K_2+\cdots+K_m$,$m=1,2,3,\cdots$.证明:对每一个正整数 n,区间$[S_n,S_{n+1})$中至少有一个完全平方数.

2 将一个 99 边形的边依次涂色为红,蓝,红,蓝,…,红,蓝,黄.每条边涂一种颜色.然后允许进行如下操作:在保证任何相邻两边都不同色的条件下,每次可改变一条边的颜色.问能否经过若干次操作而使 99 条边的涂色状态变为红,蓝,红,蓝,…,红,黄,蓝?

3 凸六边形 $ABCDEF$ 内接于圆,并且 $AB=CD=EF$,对角线 AD、BE 和 CF 共点于 Q.设 AD 和 CE 相交于 P.求证:$\dfrac{CP}{PF}=\dfrac{AC^2}{CE^2}$.

4 设 $a_1,a_2,a_3,\cdots$是正实数数列,对所有的 $n\geqslant1$ 满足条件 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\geqslant\sqrt{n}$.证明对所有的 $n\geqslant1$,$\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2>\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$.

5 设$|v|$、$\sigma(v)$和 $\pi(v)$分别表示由正整数组成的有限集合 v 的元素的个数,元素的和以及元素的积(如果集合 v 是空集,则$|v|=0$,$\sigma(v)=0$,$\pi(v)=1$).若 S 是由正整数组成的有限集合.证明

$$\sum_{v\subseteq S}(-1)^{|v|}C_{m-\sigma(v)}^{|S|}=\prod(S)$$

对所有的正整数 $m\geqslant\sigma(S)$成立.

第24届美国数学奥林匹克(1995)

1 设 p 是奇素数.各项不同的数列 a_n,$n\geqslant 0$ 定义如下:$a_0=0$,$a_1=1$,…,$a_{p-2}=p-2$,并且对所有的 $n\geqslant p-1$,a_n 是这样一个最小的正整数,使得它和它前面的任何项都不能组成长度为 p 的等差数列.证明:对所有的 n,a_n 是将 n 写成 $p-1$ 进制数而将它看作是 p 进制数时所得出的数.

2 一个损坏的计算器只有 sin,cos,tan,arcsin,arccos,arctan 这几个键可以工作.初始显示为0.证明对任一正有理数 q,都可以揿有限多次键得出 q(假定计算器做实数计算无限精确,所有的函数都采用弧度制).

3 设$\triangle ABC$是非等腰非直角三角形.设 O 是它的外接圆圆心.并且设 A_1、B_1 和 C_1 分别是边 BC、CA 和 AB 的中点.点 A_2 在射线 OA_1 上,使得$\triangle OAA_1\backsim\triangle OA_2A$.点 B_2 和 C_2 分别在射线 OB_1 和 OC_1 上,使得$\triangle OBB_1\backsim\triangle OB_2B$ 和$\triangle OCC_1\backsim\triangle OC_2C$.证明直线 AA_2、BB_2 和 CC_2 共点.

4 设 q_0,q_1,q_2,…是满足下列两个条件的无限整数数列:

(i)对所有的 $m>n\geqslant 0$,$m-n$ 整除 q_m-q_n.

(ii)对所有 n 存在多项式 p,使得 $|q_n|<p(n)$.

证明:存在多项式 Q,对所有的 n 有 $q_n=Q(n)$.

5 一个社团内,每一对人不是友好就是敌对.设这个社团共有 n 个人和 q 个友好对子,并在任三人中至少有一对人是敌对的,证明:这个社团中至少有一个成员,他的敌人所组成的集合中友好对子不多于 $q\left(1-\frac{4q}{n^2}\right)$.

第 25 届美国数学奥林匹克(1996)

1 证明数 $n\sin n^\circ(n=2,4,6,\cdots,180)$的平均值是 $\cot 1^\circ$.

2 对任意非空实数集 S,令 $\sigma(S)$为 S 的元素之和.已知 n 个正整数的集 A,考虑 S 跑遍 A 的非空子集时,所有不同和 $\sigma(S)$的集.证明这些和可以分为 n 类,每一类中最大的和与最小的和的比不超过 2.

3 已知$\triangle ABC$.证明存在一条直线 l(在$\triangle ABC$ 所在平面内),使得$\triangle ABC$ 关于 l 的对称图形$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$ 的公共部分,面积大于$\triangle ABC$ 面积的 2/3.

4 n 项的 0、1 序列$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为长为 n 的二元序列.a_n 为无连续三项成 0,1,0 的、长为 n 的二元序列的个数.b_n 为无连续四项成 0,0,1,1 或 1,1,0,0 的、长为 n 的二元序列的个数.证明:对每一正整数 n,$b_{n+1}=2a_n$.

5 $\triangle ABC$ 具有下面性质:存在一个内部的点 P 使$\angle PAB=10^\circ$,$\angle PBA=20^\circ$,$\angle PCA=30^\circ$,$\angle PAC=40^\circ$.证明:$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

6 确定(并证明)是否有整数集的子集 X 具有下面的性质:对任意整数 n,恰有一组 a、$b\in X$,使 $a+2b=n$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com