高等数学 下

修订版

GAODENG SHUXUE

主编 邓 康 严秀坤

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

x

y

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等数学

修订版
（下册）

主编　邓　康　严秀坤
主审　刘金旺

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书共分上下两册，主要介绍了函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数(含傅里叶级数)、常微分方程等内容.

通过学习本课程，可以培养学生的抽象思维能力、问题概括能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力，还特别注重培养学生的运算能力、运用所学知识分析和解决实际问题的能力.

本书适用于高等院校各专业的高等数学教学用书，也可作为考研、自学人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/邓康，严秀坤主编.—修订本．—天津：天津大学出版社，2010.8

ISBN 978-7-5618-3511-1

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①邓…②严…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 164245 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
电　　话 发行部：022-27403647　邮购部：022-27402742
网　　址 www.tjup.com
印　　刷 天津泰宇印务有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 169mm×239mm
印　　张 20.75
字　　数 430 千
版　　次 2010 年 8 月第 1 版
印　　次 2010 年 8 月第 1 次
定　　价 32.00 元

再版前言

本书在使用过程中受到了教师和学生的充分肯定和好评，反映良好．为了更好地适应高等院校各专业高等数学的教学需要，依据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，我们在前版的基础上进行了修订．在修订中，根据我们多年的教学改革实践，结合国内外高等数学课程改革和学科建设的最新成果，在保持原教材的系统和风格不变的前提下，使新版能符合精品课程教材的要求，体现创新教学理念，有利于激发学生自主学习，有利于提高学生的综合素质和创新能力．

新版保持了原版结构严谨、叙述清晰准确、论证简明易懂、例题选配典型多样、难度层次分明、注重解题方法总结等优点，在修订时，对一些证明进行了反复推敲，简化了证明过程，力求叙述和论证更加通俗易懂，便于自学．

根据广大同行和读者在使用本教材中的意见和建议，在保持原教材深广度不变的前提下，对习题的类型和数量进行了调整和充实，并设置了部分带“*”号的内容以适应分层次教学的需要．

在本书的使用和修订过程中，我院许多教师提出了宝贵的意见和建议，给予我们很大的帮助，在此，我们表示衷心的感谢．

编　者

2010.6

前　言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的一门科学．随着现代科学技术和数学科学的发展，“数量关系”和“空间形式”有了越来越丰富的内涵和更加广泛的外延．数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；数学不仅是一种知识，而且是一种素养；数学不仅是一门科学，而且是一种文化．数学教育在培养高素质科技人才中具有其独特的、不可替代的作用．对于高等学校工科类专业的本科生而言，高等数学课程是一门非常重要的基础课．它内容丰富，理论严谨，应用广泛，影响深远，不仅为学生学习后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础，而且在培养学生的抽象思维、逻辑推理能力，综合利用所学知识分析问题解决问题的能力，较强的自主学习的能力，创新意识和创新能力上都具有非常重要的作用．

本教材面对高等教育大众化的现实，以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，以“必须够用”为原则确定内容和深度．知识点的覆盖面与“基本要求”相一致，要求度上略高于“基本要求”．本教材对基本概念的叙述清晰准确；对定理的证明简明易懂，但对难度较大的理论问题则不过分强调论证的严密性，有的仅给出结论而不加证明；对例题的选配力求典型多样，难度上层次分明，注意解题方法的总结；强调基本运算能力的培养和理论的实际应用；注重对学生的思维能力、自学能力和创新意识的培养．

考虑到不同学校、不同专业对高等数学课程内容广度和深度的不同要求，《高等数学》作了适当的处理，以适应不同层次、不同专业的需要．

《高等数学》中存在的问题，欢迎专家、同行及读者批评指正．

编　者

2009.6

目　　录

第七章　向量代数与空间解析几何

我们知道，代数学的优越性在于推理方法的程序化．鉴于这种优越性，人们产生了用代数方法研究几何问题的思想(这是解析几何的基本思想)．要用代数方法研究几何问题，就必须沟通代数与几何的联系，也就是要把数学研究的两个基本对象数和形结合、统一起来，于是，人们建立了坐标系，通过坐标系，建立起数与点的一一对应的关系，从而就可以用代数方法来研究几何问题(这是解析几何的基本内容)．

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识是学习多元函数微积分的基础．因此，本章先介绍向量的基本概念，在此基础上建立空间坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的一些基本内容，为学习多元函数微积分奠定基础．

第一节　向量及其线性运算

自然界中的很多量既有大小，又有方向，我们对其进行抽象、研究和发展，就得到了数学中的向量(矢量)．向量在数学、物理、力学及工程技术中有着广泛的应用，是一种重要的数学工具。本节介绍向量的基本概念及其运算．

一、向量的概念

在数学上，常用有向线段来表示向量．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．以 M 为起点，N 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{MN}$，如图 7-1 所示．有时也用一个黑体字母表示向量，如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 等．书写时在字母上面加箭头，即写成 $\vec{a},\vec{b},\vec{u},\vec{v}$ 等．

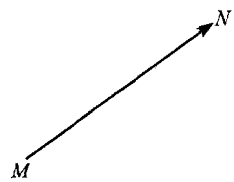

图 7-1

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为向量的**模**或**长度**，记为 $|\boldsymbol{a}|$．模为 1 的向量称为**单位向量**．模为零的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$. 零向量没有确定的方向，可以认为它的方向是任意的．

在实际问题中，有些向量与它的起点有关，如质点运动的速度与该质点的位置有关，一个力与它的作用点的位置有关，有些向量与它的起点位置无关．由于向量的共性是具有大小和方向，因此，在数学上只讨论与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**，简称**向量**．即只考虑向量的大小和方向这两个要素，而不关心它的起点位置如何．

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 大小相等且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 两

个相等的自由向量在空间平行移动后能够完全重合．

记两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 θ（图 7-2），规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 特别地，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\theta=0$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\theta=\pi$.

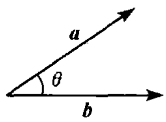

图 7-2

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，就称这两个向量**平行**，记作 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的，因此可以认为**零向量平行于任何向量**．

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在同一条直线上．因此，两向量平行又称为两向量**共线**．

类似地，还可引入向量共面的概念．设有 $k(k\geqslant3)$ 个向量，如果把它们的起点放在同一点时，这 k 个向量的终点和公共起点在同一个平面上，就称这 k 个向量**共面**．

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC（图 7-3），则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 上述作出两向量之和的方法称为向量相加的**三角形法则**．

在力学上，我们有作用在一质点上的两个力的合力的平行四边形法则，类似地，我们也可按如下方式定义两向量相加的**平行四边形法则**：当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为边作平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC（图 7-4），显然向量 $\overrightarrow{AC}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

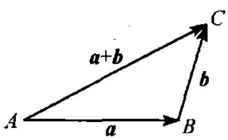

图 7-3

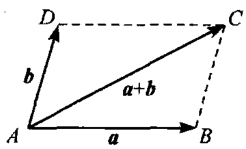

图 7-4

向量的加法满足下列运算规律：

(1)交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2)结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

对于(1)，根据向量相加的三角形法则，由图 7-4，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

所以向量的加法满足交换律．对于(2)，如图 7-5 所示，先作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再将其与 $\boldsymbol{c}$ 相加，即得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，如将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得同一结果，所以向量的加法满足结合律．由于向量的加法满足交换律与结合律，所以 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant3)$ 相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，并可按三角形法则相加如下：使前一向量的终点作为次一向量

的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和，如图 7-6 所示，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

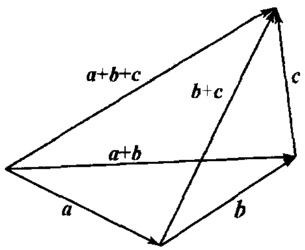

图 7-5

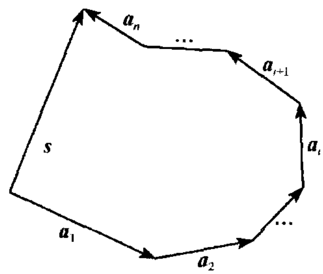

图 7-6

设有向量 $\boldsymbol{a}$，我们称与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$，由此，我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**差**为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

上式表明，向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差就是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $-\boldsymbol{a}$ 的和(图 7-7(a))．特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

显然，对任意向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 7-7(b))．

(a)　　(b)

图 7-7

2．向量与数的乘法

设有向量 $\boldsymbol{a}$，λ 是实数，规定：向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$．且

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2)当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；

(3)当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$．

称向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的**乘积**，简称**数乘**．向量与数的乘法满足以下运算规律：

(1)结合律　　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2)分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

(3)交换律 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\lambda$.

以上运算规律可以按向量与数的乘积定义进行证明.

向量相加及数乘向量统称为向量的线性运算.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系.

定理 7.1.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 必要性. 设 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$,取 $\lambda=\pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值,即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,则两式相减得 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,即

$$|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

因为 $|\boldsymbol{a}|\neq0$,所以 $|\lambda-\mu|=0$,即 $\lambda=\mu$.

充分性是显然的.

与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,记作 $\boldsymbol{a}^0$. 显然有

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \text{或} \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0.$$

这表明一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

定理 7.1.1 是建立数轴的依据. 给定一个点、一个方向及单位长度就确定一条数轴. 由于一个单位向量既确定了方向,又确定了单位长度,因此,给定一个点 O(作原点)及一个单位向量(记做 $\boldsymbol{i}$)就确定了一条数轴 Ox(如图 7-8 所示),数轴上任一点 P,对应一向量$\overrightarrow{OP}$.

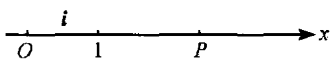

图 7-8

向量$\overrightarrow{OP}$与 $\boldsymbol{i}$ 共线,由定理 7.1.1 知,存在唯一的实数 x,使$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,称实数 x 为数轴上有向线段 OP 的值. 这样数轴上任意一点 P 与向量$\overrightarrow{OP}$及实数 x 三者就建立了一一对应关系,点 $P\leftrightarrow\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow x$,也称实数 x 为数轴 Ox 上点 P 的坐标.

利用向量及其运算,可以推得初等几何的许多结果.

例 7.1.1 证明三角形两边中点连线平行且等于第三边的一半.

证 如图 7-9 所示,设 E、F 分别为 CA 与 CB 的中点.

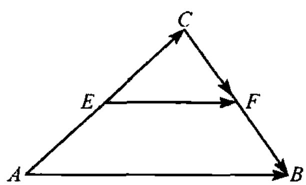

图 7-9

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{EF}//\overrightarrow{AB},\text{且}|\overrightarrow{EF}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.$$

第二节　空间直角坐标系　向量的坐标

一、空间直角坐标系

正像平面解析几何一样，为了沟通平面图与数的研究，我们通过建立平面直角坐标系，把平面上的点和一对有序数组(x,y)对应起来．同样，为了把空间的任一点与有序数组对应起来，我们来建立空间直角坐标系．

在空间取定一点O和三个两两垂直的单位向量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以O为原点的两两互相垂直的数轴，依次记为**x轴**（横轴）、**y轴**（纵轴）、**z轴**（竖轴），统称**坐标轴**．它们构成一个空间直角坐标系，称为$Oxyz$坐标系（图7-10）．通常把x轴和y轴配置在水平面上，而z轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住z轴，当右手的四个手指从正向x轴以$\frac{\pi}{2}$角度转向正向y轴时，大拇指的指向就是z轴的正向，如图7-11所示．

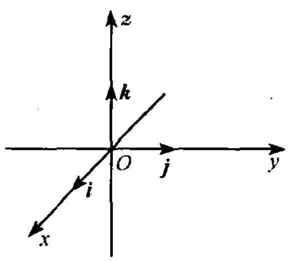

图7-10

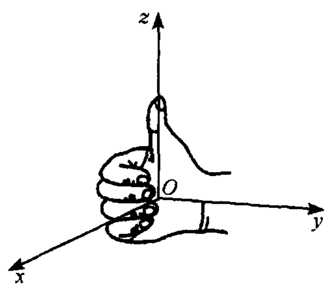

图7-11

三条坐标轴中每两条坐标轴所在的平面xOy、yOz、zOx称为**坐标面**．三个坐标面把空间分成8个部分，每个部分称为一个**卦限**，共8个卦限，其中$x>0,y>0,z>0$部分为第Ⅰ卦限，第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限在xOy面的上方，按逆时针方向确定．第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限在xOy面的下方，由第Ⅰ卦限正下方的第Ⅴ卦限，按逆时针方向确定（图7-12）．

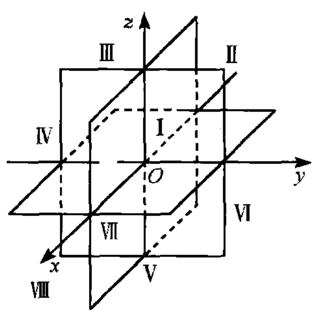

图7-12

定义了空间直角坐标系后，就可以用一组有序实数组来确定空间点的位置．设M为空间中任意一

点(图 7-13)，过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，它们与 x 轴、y 轴、z 轴分别交于 P、Q、R 三点，这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x、y、z. 这样，空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x,y,z. 反之，若给定一有序数组 x,y,z，就可以分别在 x 轴、y 轴、z 轴找到坐标分别为 x、y、z 的三点 P、Q、R，过这三点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这三个平面的交点就是由有序数组 x,y,z 所确定的唯一的点 M. 这样就建立了空间的点 M 和有序数组 x,y,z 之间的一一对应关系. 这组数 x,y,z 称为**点 M 的坐标**，并依次称 x,y 和 z 为点 M 的**横坐标、纵坐标**和**竖坐标**，坐标为 x,y,z 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

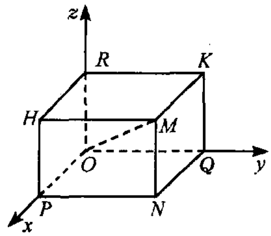

图 7-13

坐标面和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如，在 x 轴上的点，其纵坐标 $y=0$，竖坐标 $z=0$，于是，其坐标为 $(x,0,0)$. 同理，y 轴上的点的坐标为 $(0,y,0)$；z 轴上的点的坐标为 $(0,0,z)$. xOy 面上的点的坐标为 $(x,y,0)$；yOz 面上的点的坐标为 $(0,y,z)$；zOx 面上的点的坐标为 $(x,0,z)$.

设点 $M(x,y,z)$ 为空间一点，则点 M 关于坐标面 xOy 的对称点为 $A(x,y,-z)$；关于 x 轴的对称点为 $B(x,-y,-z)$；关于原点对称的点为 $C(-x,-y,-z)$. 掌握这些特殊位置上点的坐标的特征，对于分析有关问题是很有好处的.

二、空间两点间的距离

在空间直角坐标系中，任意两点都可以用它们的坐标来表示它们之间的距离.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间直角坐标系中给定的两点，过点 M_1 和 M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体. 如图 7-14 所示.

由于 $|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|M_2N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|M_2N|^2$. 又因

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|M_2N|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

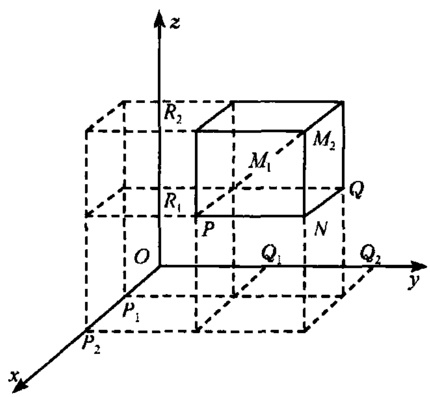

图 7-14

所以

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

于是，空间两点 M_1，M_2 间的距离公式为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离公式为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 7.2.1　求证以三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形．

证明

$$|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=\sqrt{49}=7,$$

$$|AC|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=\sqrt{49}=7,$$

$$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+(4-(-1))^2+(3-6)^2}=\sqrt{98}.$$

$|AB|=|AC|$，且 $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形．

三、向量的坐标表示

确定空间直角坐标系后，就可以建立任一空间向量与一个三元有序数组之间的一一对应关系：

设有向量 $\boldsymbol{r}$，将该向量平移至 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，$O$ 点为坐标原点，以 OM 为对角线，作棱边在三条坐标轴的长方体 $OPNQ$-$RHMK$，如图 7-15 所示，于是

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}$$

$$=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的三个分向量，记为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(x,y,z).$$

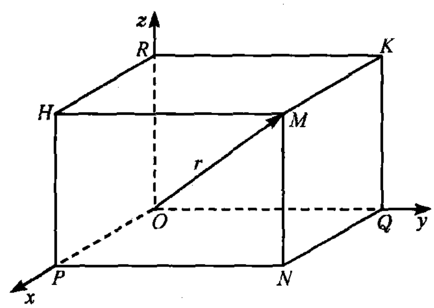

图 7-15

称数组 (x,y,z) 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标．这样，就建立起空间的点 M，向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 与其坐标 (x,y,z) 之间的一一对应关系

$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z).$$

以原点为起点的向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 又称向径，(x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$. x,y,z 分别是点 M 或向量 $\overrightarrow{OM}$ 的横坐标、纵坐标、竖坐标．

如果在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中任意给定两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).\end{aligned}$$

四、向量的代数运算

利用向量在直角坐标系中的坐标表达式，就可以把向量的几何运算转化为代数

运算．设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\ (\lambda\text{ 为实数}).$$

由此可见，对向量进行加、减及数乘运算，只需对向量的各个坐标进行相应的代数运算即可．

例 7.2.2 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda(\lambda\neq-1)$，试在有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 上求一点 $M(x,y,z)$，使

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}.$$

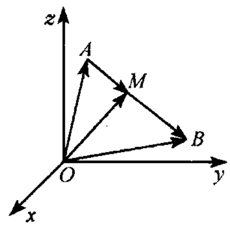

图 7-16

解 如图 7-16 所示，由于

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

因此

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}),$$

从而

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})=\frac{1}{1+\lambda}[(x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)],$$

于是，所求点为 $M\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

本例中的点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的**定比分点**．特别地，当 $\lambda=1$ 时，得线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点为 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$.

五、向量的模、方向角、投影

有了向量的坐标表示式后，向量的模和方向也可以用它的坐标来表示．由空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,x_2)$ 的距离公式，得向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

即 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}(a_x,a_y,a_z).$$

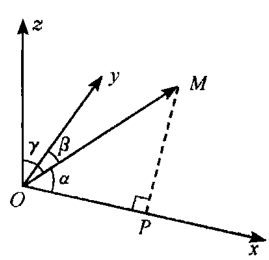

图 7-17

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**．从图 7-17 可见，设 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，由于 x 是有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值，$MP\perp OP$，故

$$\cos\alpha=\frac{x}{|OM|}=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|},$$

类似可知

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}.$$

称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，它们满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

由上式知，以向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向余弦为分量构成的向量 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$.

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定了 u 轴（图 7-18），任意给定向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'（点 M' 称为点 M **在 u 轴上的投影**），则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量．设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影**，记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 r_u.

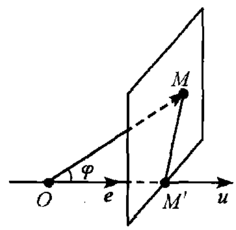

图 7-18

根据这个定义，向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x、a_y、a_z 分别是向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影，即

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\quad a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\ a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}.$$

由此可知，向量的投影具有与坐标相同的性质．

性质 7.2.1　$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$（$\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角）.

性质 7.2.2　$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$.

性质 7.2.3　$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$（$\lambda$ 为实数）.

例 7.2.3　已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角．

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$，所以

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2,$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

例 7.2.4　已知三个力 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_2=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\sqrt{2}\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_3=-4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 作用于同一点，求合力的大小和方向角．

解　合力

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(1+2-4)\boldsymbol{i}+(2+1-2)\boldsymbol{j}+(-1-\sqrt{2}+1)\boldsymbol{k}\\&=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\sqrt{2}\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

或 $\boldsymbol{F}=(-1,1,-\sqrt{2})$．合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为 $|\boldsymbol{F}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$，其方向余弦为 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，方向角为 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，$\gamma=\frac{3}{4}\pi$.

例 7.2.5 设立方体的一条对角线为 OM，一条棱为 OA，且 $|\overrightarrow{OA}|=a$，求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $\text{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.

解 如图 7-19 所示，记 $\angle MOA=\varphi$，有

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是

$$\text{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

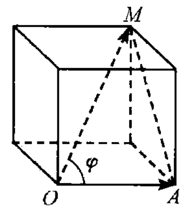

图 7-19

*第三节 数量积 向量积 混合积

一、向量的数量积

数量积是从物理、力学问题中抽象出来的一个数学概念，先看引例．

如图 7-20 所示．设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2，设位移 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 θ：由物理学知识可知，力 F 所做的功 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$.

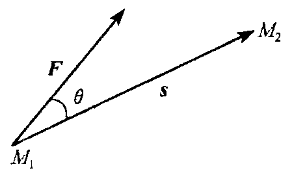

图 7-20

即力 $\boldsymbol{F}$ 作用下物体产生位移 $\boldsymbol{s}$ 所做的功等于力 $\boldsymbol{F}$ 的模与位移向量 $\boldsymbol{s}$ 的模及二者夹角余弦的积．

由这个问题可见，两个向量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 确定一个数 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$. 在现实生活中，有许多实际问题会遇到类似的情况．下面引入向量的数量积的概念．

设有向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 θ，乘积 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（或称为**内积**、**点积**），记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

这样，上述常力所做的功就是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

根据数量积的定义，可以推得：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\text{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\text{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

(3) 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

事实上，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，由 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$，则有 $\cos\theta=0$，从而 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则有 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，于是