北大版

2004 MBA

北京大学研究生院策划

MBA联考

综合能力考试
疑难解析与全真模拟试题
数学分册

姚孟臣 主编

北京大学出版社

2004年MBA联考

综合能力考试
疑难解析与全真模拟试题

数学分册

主　编　姚孟臣
副主编　赵达夫　胡金德　邵光砚

北京大学出版社
北　京

图书在版编目(CIP)数据

2004年MBA联考综合能力考试疑难解析与全真模拟试题——数学分册/姚孟臣主编. —北京:北京大学出版社,2003.7

ISBN 7-301-04496-8

Ⅰ.2… Ⅱ.姚… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

书　　名:**2004年MBA联考综合能力考试疑难解析与全真模拟试题——数学分册**

著作责任者:姚孟臣　主编

责 任 编 辑:王煜玲　林君秀

标 准 书 号:7-301-04496-8/G·0580

出 版 发 行:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　址:http://cbs.pku.edu.cn

电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752926

电 子 信 箱:em@pup.pku.edu.cn

印 刷 者:北京市银祥福利印刷厂

经 销 者:新华书店

787毫米×1092毫米　16开本　9.75印张　250千字

2003年7月第1版　2003年7月第1次印刷

定　　价:15.00元

目　　录

第一部分

解题指南:两种题型的常用解法

条件充分性判断

解题说明：

本大题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论. 阅读条件(1)和(2)后选择：

A：条件(1)充分，但条件(2)不充分.

B：条件(2)充分，但条件(1)不充分.

C：条件(1)和(2)单独都不充分，但条件(1)和条件(2)联合起来充分.

D：条件(1)充分，条件(2)也充分.

E：条件(1)和(2)单独都不充分，条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

可见，此种类型试题结构为：

题干中的结论

条件(1)

条件(2)

若以 B 表示题干中的结论，以 A 表示条件(1)或条件(2)，或条件(1)与(2)的联合.

解题要求为：判断 A 是否是 B 的充分条件，也就是判断命题"$A \Longrightarrow B$"的真假.

常用的求解方法有以下几种：

解法一　直接法(即由 A 推导 B)

若由 A 可推导出 B，则 A 是 B 的充分条件；若由 A 推导出与 B 矛盾的结论，则 A 不是 B 的充分条件. 解法一是解"条件充分性判断"型题的最基本的解法，应熟练掌握.

例 1　要保持某种货币的币值不变

(1) 贬值 10%后又升值 10%

(2) 贬值 20%后又升值 25%

分析　设该种货币原币值为 a 元($a \neq 0$).

由条件(1)经过一次贬值又一次升值后的币值为：

$$a(1-10\%)\cdot(1+10\%)=a\cdot 0.9\cdot 1.1=0.99a$$

显然与题干结论矛盾.

所以条件(1)不充分.

由条件(2)经过一次贬值又一次升值后的币值为：

$$a(1-20\%)\cdot(1+25\%)=a\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}=a$$

题干中的结论成立.

所以条件(2)充分.

故应选择 B.

例 2　等差数列 $\{a_n\}$ 中，可以确定 $S_{100}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=250$

(1) $a_2+a_3+a_{98}+a_{99}=10$

(2) $a_2+a_3+a_{97}+a_{98}=12$

分析 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

由条件(1)得

$$a_1+d+a_1+2d+a_1+97d+a_1+98d=10$$

即
$$4a_1+198d=10$$

所以
$$2a_1+99d=5$$

$$S_{100}=\frac{100(a_1+a_{100})}{2}=50(2a_1+99d)=250$$

因为题干结论成立,所以条件(1)充分.

由条件(2)得

$$a_1+d+a_1+2d+a_1+96d+a_1+97d=12$$

即
$$4a_1+196d=12$$

所以
$$2a_1+98d=6$$

$$S_{100}=50(2a_1+99d)=50(6+d)$$

由于d的值无法确定,所以S_{100}的值无法确定.

所以条件(2)不充分.

故应选择A.

例3 设函数$f(x)$在$x=a$处可导,函数$|f(x)|$在$x=a$处不可导

(1) $f(a)=0$且$f'(a)\neq 0$

(2) $f(a)=0$且$f'(a)=0$

分析 令$\varphi(x)=|f(x)|$,

$$\varphi'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=|f'_+(a)|=|f'(a)|$$

$$\varphi'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}-\frac{|f(x)|}{|x-a|}=-|f'_-(a)|=-|f'(a)|$$

因为$f'(a)\neq 0$,则$\varphi'_+(a)\neq\varphi'_-(a)$,故$|f(x)|$在$x=a$不可导.

故应选择A.

例4 已知$x\ln x$是$f(x)$的一个原函数,且$\int_1^e \frac{af(x)}{x}dx=3$

(1) $a=2$

(2) $a=1$

分析 因为$x\ln x$是$f(x)$的一个原函数,所以

$$f(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$$

$$\int_1^e a\cdot\frac{f(x)}{x}dx=a\int_1^e\frac{\ln x+1}{x}dx=a\left[\int_1^e\ln x d\ln x+\int_1^e\frac{1}{x}dx\right]$$

$$=a\left[\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln x\right]\Big|_1^e=\frac{3a}{2}=3$$

所以$a=2$.

故应选择A.

例 5 A,B 是 n 阶矩阵，$A+B$ 可逆

(1) A,B 满足 $A^2+AB+B^2=0$

(2) $BX=0$ 惟一零解

分析 由(1) $A^2+AB+B^2=0$，得 $A(A+B)=-B^2$，若对 B(或 A)没有任何其他条件，不能推出 $A+B$ 可逆(如 $B=0$，则 $A^2=0$，$A+B=A$ 不可逆).

由(2) $BX=0$ 惟一零解，故知 B 可逆，但 $A+B$ 不一定可逆，如取 $A=-B$，则 $A+B=-B+B=0$，$A+B$ 不可逆.

由(1)及(2)得，$A(A+B)=-B^2$，B 可逆，得 $(-B^2)^{-1}A(A+B)=E$. 从而由定义知 $A+B$ 可逆且 $(A+B)^{-1}=(-B^2)^{-1}A$.

故应选择 C.

例 6 A,B 都是 3 阶矩阵，$|A+B|=4(|A|+|B|)$

(1) $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$B=[\beta_1,\alpha_2,\alpha_3]$

(2) $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$B=[\alpha_1,\alpha_2,\beta_3]$

分析 由(1)

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3],\quad B=[\beta_1,\alpha_2,\alpha_3]$$

则

$$\begin{aligned}|A+B|&=|[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]+[\beta_1,\alpha_2,\alpha_3]|=|\alpha_1+\beta_1,2\alpha_2,2\alpha_3|\\&=4|\alpha_1+\beta_1,\alpha_2,\alpha_3|=4(|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|+|\beta_1,\alpha_2,\alpha_3|)\\&=4(|A|+|B|)\end{aligned}$$

由(2)

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3],\quad B=[\alpha_1,\alpha_2,\beta_3]$$

则

$$\begin{aligned}|A+B|&=|[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]+[\alpha_1,\alpha_2,\beta_3]|=|2\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3+\beta_3|\\&=4|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\beta_3|=4(|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|+|\alpha_1,\alpha_2,\beta_3|)\\&=4(|A|+|B|)\end{aligned}$$

故应选择 D.

例 7 设随机变量 $X\sim N(0,4)$，$Y\sim U(0,4)$，求 $E(2X-3Y)$

(1) X 与 Y 独立

(2) X 与 Y 不独立

分析 由于只要 $E(X)$，$E(Y)$ 存在，就有

$$E(2X-3Y)=2E(X)-3E(Y)$$

考虑到

$$X\sim N(0,4),\quad E(X)=0$$

$$Y\sim U(0,4),\quad E(Y)=\frac{4}{2}=2$$

故应选择 D.

例 8 $P(B-A)=P(B)-P(A)$ 成立

(1) A 与 B 相互独立

(2) $A\subset B$

分析 由于

$$B-A=B\cdot\overline{A}$$

由条件(1)，A 与 B 相互独立，有

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

而 $$P(B - A) = P(B\overline{A}) = P(B)P(\overline{A}) = P(B)(1 - P(A)) \neq P(B) - P(A)$$

由条件(2)，$A \subset B$，有

$$B = A + (B\overline{A})$$

因此，由于 A 与 $B\overline{A}$ 互斥，有

$$P(B) = P(A) + P(B\overline{A}) = P(A) + P(B - A)$$

即 $$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

故应选择 B.

解法二　定性分析法(由题意分析，得出正确的选择)

当所给题目比较简单明了，又无定量的结论时，可以分析当条件成立时，有无结论成立的可能性，从而得出正确选择，而无需推导和演算.

例 1　对于一项工程，丙的工作效率比甲的工作效率高

(1) 甲、乙两人合作，需 10 天完成该项工程

(2) 乙、丙两人合作，需 7 天完成该项工程

分析　条件(1)中无甲与丙间的关系，条件(2)中亦无甲与丙间的关系，故条件(1)和(2)显然单独均不充分.

将两条件联合起来分析：在完成相同工作量的前提下，甲与乙合作所需时间比乙与丙合作所需时间多. 故甲的工作效率当然比丙的工作效率低，题干结论成立. 所以条件(1)和(2)联合起来充分.

故应选择 C.

例 2　在一个宴会上，每个客人都免费获得一份冰淇淋或一份水果沙拉，但不能同时获得二者，可以确定有多少客人能获得水果沙拉

(1) 在该宴会上，60%的客人都获得了冰淇淋

(2) 在该宴会上，免费提供的冰淇淋和水果沙拉共 120 份

分析　由于条件(1)中不知客人总数，所以无法确定获得水果沙拉的客人的人数. 而由于条件(2)中只给出客人总数，所以仍无法确定获得水果沙拉的客人的人数，故条件(1)和(2)单独显然均不充分.

由条件(2)知客人总数，由条件(1)可知获得水果沙拉的客人占总客人数的百分比，必可确定获水果沙拉的客人的人数，所以条件(1)和(2)联合起来充分.

故应选择 C.

例 3　任给 $x \in (a,b)$，$f'(x) > 0$

(1) $f(x)$ 在 (a,b) 上严格单调递增且可导

(2) $f'(a) = 0$，$x \geqslant a$ 时，$f''(x) > 0$

分析　条件(1)不充分，因为满足(1)的 $f(x)$ 可能存在 $x_0 \in (a,b)$，使 $f'(x_0) = 0$，例如 $f(x) = x^3$，$f(x)$ 在 $(-1,2)$ 上严格递增且可导，但 $f'(0) = 0$ 不满足 $f'(x) > 0$. 条件(2)充分，因为 $f''(x) > 0$ 保证了 $f'(x)$ 严格单调递增，因为 $f'(a) = 0$，即 $x > a$ 时，$f'(x) > 0$. 所以条件(2)是充分的.

故应选择 B.

例 4 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性相关

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关

(2) $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$不能由其余向量线性表示

分析 (1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关,存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_{s-1}$,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}=\mathbf{0}$$

成立,则

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}+0\alpha_s=\mathbf{0}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{s-1}$不全为零,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

(2) $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$不能由其余的向量线性表示$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$ 线性无关,故(2)不是充分条件.

故应选择 A.

例 5 事件 A,B,C 相互独立

(1) $P(ABC)=P(A)P(BC)$

(2) $\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(AC)=P(A)P(C)\end{cases}$

分析 由条件(1)可以推出事件 A 与 BC 独立,并不能保证 A、B、C 相互独立. 而条件(2)说明事件 A、B、C 两两独立,也不能保证 A、B、C 相互独立. 但是,将条件(1),(2)联立起来后,由于

$$P(ABC)=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$$

加上条件(2)就是 A、B、C 相互独立的充要条件了.

故应选择 C.

解法三 逆推法(由条件中变元的特殊值或条件的特殊情况入手,推导出与题干矛盾的结论,从而得出条件不充分的选择)

注意 此种方法绝对不能用在条件具有充分性的肯定性的判断上.

例 1 要使不等式$|1-x|+|1+x|>a$ 的解集为 R

(1) $a>3$

(2) $2\leqslant a<3$

分析 由条件(1) $a>3$,取 $a=4$,不等式化为$|1-x|+|1+x|>4$,此不等式化为:

$$\begin{cases}x\geqslant 1\\2x>4\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}-1\leqslant x<1\\2>4\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x<-1\\-2x>4\end{cases}$$

所以 $$x>2\quad\text{或}\quad x\in\varnothing\quad\text{或}\quad x<-2$$

所以不等式的解为 $x<-2$ 或 $x>2$,与解集为 R 矛盾.

所以条件(1)不充分.

由条件(2) $2\leqslant a<3$,取 $a=2$,不等式化为$|1-x|+|1+x|>2$,此不等式化为:

$$\begin{cases}x\geqslant 1\\2x>2\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}-1\leqslant x<1\\2>2\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x<-1\\-2x>2\end{cases}$$

所以 $$x>1 \quad 或 \quad x\in\varnothing \quad 或 \quad x<-1$$
所以不等式的解为 $x<-1$ 或 $x>1$，与解集为 R 矛盾.

所以条件(2)也不充分.

条件(1)和(2)联合，得 $\begin{cases}a>3,\\2\leqslant a<3,\end{cases}$ 所以 $a\in\varnothing$，显然条件(1)和(2)联合起来也不充分.

故应选择 E.

例 2 三个球中，最大球的体积是另外两个球体积和的 3 倍

(1) 三个球的半径之比为 1 : 2 : 3

(2) 大球半径是另两球半径之和

分析 由条件(1) 设三球半径分别为 $r,2r,3r$，

所以大球体积
$$V_{大}=\frac{4}{3}\pi(3r)^3=36\pi r^3$$
两小球体积和
$$V_1+V_2=\frac{4}{3}\pi r^3+\frac{4}{3}\pi(2r)^3=\frac{36}{3}\pi r^3$$
显然 $V_{大}=3(V_1+V_2)$ 成立.

所以条件(1)充分.

由条件(2) 设两小球的半径分别为 $r_1=1,r_2=3$，大球半径 $r=4$，所以
$$V_{大}=\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3=\frac{256}{3}\pi$$
$$V_1+V_2=\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3+\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=\frac{112}{3}\pi$$
显然 $V_{大}\neq 3(V_1+V_2)$.

所以条件(2)不充分.

故应选择 B.

注意 条件(1)的充分性，是用解法一判断的. 只有当条件不充分时，才可用解法三，如对条件(2)不充分的判断.

例 3 设 $F(x)=g(x)\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续，但不可导，又 $g'(a)$ 存在. $F(x)$ 在 $x=a$ 可导

(1) $g(a)\neq 0$

(2) $g(a)=0$

分析 若 $g(a)=0$，按导数定义：
$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)\varphi(x)-g(a)\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\varphi(x)$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x)=g'(a)\varphi(a)$$
即 $$F'(a)=g'(a)\varphi(a)$$
若 $g(a)\neq 0$，则 $F(x)$ 在 $x=a$ 不可导. 否则若 $F'(a)$ 存在，则由商的求导法知 $\varphi(x)=\dfrac{F(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 可导，与假设 $\phi'(a)$ 不存在矛盾.

故应选择 B.

例 4 α_1 不能由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示

(1) $r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)<3$

(2) $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$

分析 由(1) $r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)<3$，故 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关. 但与 α_1 没有联系，不知 α_1 能否可由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，故不是充分条件.

由(2) $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，α_1 不能由 α_2,α_3 线性表示. 但不知 α_1 能否由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，故也不是充分条件.

由(1) $r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)<3$ 及(2) $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，可得 α_1 不能由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，用反证法：若 α_1 可以由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)<3$$

这和 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\geqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$ 矛盾，故 α_1 不能由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示.

故应选择 C.

例 5 求 $P(A+B)$

(1) $P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{2}{3}$

(2) $AB=\varnothing$

分析 由加法公式，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

可见，单独使用条件(1)无法确定 $P(A+B)$的值. 而由条件(2)可知

$$P(AB)=0$$

也无法单独确定 $P(A+B)$的值.

将条件(1)，(2)联合起来，会导致

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{7}{6}>1$$

故应选择 E.

解法四 一般分析法(寻找题干结论的充分必要条件)

即：要判断 A 是否是 B 的充分条件，可找出 B 的充要条件 C，再判断 A 是否是 C 的充分条件.

例 1 要使$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^6$的展开式中的常数项为 60

(1) $a=1$

(2) $a=2$

分析 设$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^6$展开式的常数项为 T_{r+1}，因为

$$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r=C_6^r a^r x^{6-3r}$$

所以

$$6-3r=0$$

$$r=2$$

因为 $$C_6^2a^2=60$$
所以 $$15a^2=60$$
$$a=\pm 2$$
所以题干中结论的充要条件是 $a=\pm2$.

所以条件(1) $a=1$ 不充分;条件(2) $a=2$ 充分.

故应选择 B.

此题用解法一需要将 $a=1$ 和 $a=2$ 代入,推算两次,而用此种方法只推算一次得出 $a=\pm2$ 即可.

例 2 要使关于 x 的一元方程 $x^4-2x^2+k=0$ 有四个相异的实根

(1) $0<k<\frac{1}{2}$

(2) $1<k<2$

分析 方程 $x^4-2x^2+k=0$ 有四个相异的实根,设 $t=x^2$,$t\geqslant0$,所以方程 $t^2-2t+k=0$ 有两不等正实根 $t_1>0$,$t_2>0$,所以

$$t_1+t_2=2>0,\quad \begin{cases}\Delta>0\\ t_1t_2>0\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}4-4k>0\\ k>0\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}k<1,\\ k>0,\end{cases}\quad 0<k<1$$

所以题干中结论的充要条件是 $0<k<1$.

所以条件(1)充分,条件(2)不充分.

故应选择 A.

一道条件充分性判断试题有时可以用多种方法求解,如上面的例 2 也可求解如下:

分析 设 $t=x^2$,$t>0$,所以原方程化为:

$$t^2-2t+k=0 \tag{*}$$

原方程有四个相异实根,即(*)有两不等正实根.因为

$$\Delta=4-4k=4(1-k)$$

由条件(1) $k<\frac{1}{2}$,所以 $\Delta>0$,又因为两根之和为 2,两根之积为 k,由条件(1) $k>0$,所以这两根一定是不等正实根.题干结论成立,所以条件(1)充分.

由条件(2) $1<k<2$,取 $k=\frac{3}{2}$,则(*)化为

$$t^2-2t+\frac{3}{2}=0$$

$$\Delta=4-4\times\frac{3}{2}=4-6<0$$

所以方程无实根,题干结论不成立,所以条件(2)不充分.

故应选择 A.

例 3 广义积分 $\int_0^{+\infty}e^{-kx}dx$ 收敛

(1) $k\geqslant 0$

(2) $k<0$

分析

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}dx=-\frac{1}{k}e^{-kx}\Big|_0^{+\infty}$$

当 $k>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-kx}=0$. 由于 k 在分母位置，所以 $k\neq 0$.

即当 $k>0$ 时，积分$\int_0^{+\infty} e^{-kx}dx=\frac{1}{k}$收敛.

所以条件(1)，条件(2)单独都不充分，联合起来也不充分.

故应选择 E.

例 4 方程 $x^3-3x+q=0$ 有两相异实根

(1) $q=2$

(2) $q=-2$

分析 $y=x^3-3x+q$，$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，驻点为 $x=\pm 1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	极大	↘	极小	↗

极大值 $y(-1)=2+q$，极小值 $y(1)=-2+q$. 此外

$$y(-\infty)=-8,\quad y(+\infty)=+\infty$$

所以当 $q=-2$ 或 $q=2$ 时方程有两个相异实根.

故应选择 D.

例 5 $A=\begin{bmatrix} x_1y_1-1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2-1 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3-1 \end{bmatrix}$是可逆矩阵

(1) $\sum\limits_{i=1}^{3} x_iy_i=-1$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{3} x_iy_i=1$

分析

$$A\text{ 可逆}\Leftrightarrow |A|=\begin{vmatrix} x_1y_1-1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2-1 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3-1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & x_1y_1-1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ 0 & x_2y_1 & x_2y_2-1 & x_2y_3 \\ 0 & x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ -x_1 & -1 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & -1 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{i=1}^{3} x_i y_i & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3\left(1-\sum_{i=1}^{3} x_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i - 1 \neq 0$$

故由(1) $\quad \sum\limits_{i=1}^{3} x_i y_i = -1 \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{3} x_i y_i - 1 = -2 \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow A$ 可逆

但由(2) $\quad \sum\limits_{i=1}^{3} x_i y_i = 1 \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{3} x_i y_i - 1 = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow A$ 不可逆

故应选择 A.

例 6 方程组 $\begin{cases} 3x_1+kx_2+x_3=0, \\ 4x_2+x_3=0, \\ kx_1-5x_2-x_3=0 \end{cases}$ 只有零解

(1) $k\neq-1,-3$

(2) $k=-1,-3$

分析 由(1) 方程组 $\begin{cases} 3x_1+kx_2+x_3=0, \\ 4x_2+x_3=0, \\ kx_1-5x_2-x_3=0 \end{cases}$ 只有零解

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & k & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ k & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & k-4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ k & -1 & 0 \end{vmatrix} = -[-3-k(k-4)] = k^2-4k+3 \neq 0$$

$\Longleftrightarrow k\neq-1$, 且 $k\neq-3$

故 $k\neq-1$ 且 $k\neq-3$ 时,方程组只有零解,而 $k=-1$ 或 $k=-3$ 时,方程组的系数行列式为零,方程组有非零解.

故应选择 A.

例 7 $p_1(x)-p_2(x)$是概率密度函数

(1) $p_1(x),p_2(x)$均为概率密度函数

(2) $0\leqslant p_1(x)-p_2(x)\leqslant 1$

分析 由于函数 $p(x)$为一概率密度函数的充要条件是:

(1) $p(x)\geqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x=1$.

若条件(1)成立,我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)\mathrm{d}x = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x)\mathrm{d}x = 1$$

从而
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (p_1(x) - p_2(x))\mathrm{d}x = 0 \neq 1$$

而条件(2)不能保证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (p_1(x) - p_2(x))\mathrm{d}x = 1$$

因此它不是 $p_1(x)-p_2(x)$ 为密度函数的充分条件，并且即使把条件(1)，(2)联合起来也不能保证 $p_1(x)-p_2(x)$ 为概率密度函数.

故应选择 E.

例 8 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 是一个完备事件组

(1) $P(A_1+A_2+A_3+A_4+A_5)=1$

(2) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 互斥

分析 事件组 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 构成一个完备事件组的充要条件是，它必须满足：

(1) $A_1+A_2+A_3+A_4+A_5=\Omega$;

(2) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 互斥.

由此可见，由条件(1)无法导出

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \Omega$$

而条件(2)以及将条件(1)、(2)联合起来都不能满足上述两个条件.

故应选择 E.

选择题(问题求解)

解法一 直接求解法

即将此种类型的试题作为解答题求解，这种解法是解此类型试题的最常用的基本方法.

例 1 若关于 x 的方程 $x^2+px+37=0$ 恰有两个正整数解 x_1, x_2，则 $\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}$ 的值是(　　).

(A) -2　　　　(B) -1

(C) $-\frac{1}{2}$　　　　(D) 1

(E) A、B、C、D 均不正确

分析 由一元二次方程根与系数间关系得：

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1x_2 = 37$$

因为 x_1, x_2 是正整数，故必为 37 的正约数.

因为 37 是质数，所以 $x_1=1, x_2=37$，所以

$$p = -(x_1 + x_2) = -38$$

$$\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p} = \frac{2 \times 38}{-38} = -2$$