21世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生系列教材

概率论基础

GAILÜLUN JICHU

北京师范大学数学科学学院 主 编

王凤雨 毛永华/编 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

21世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生系列教材

概率论基础

GAILÜLUN JICHU

北京师范大学数学科学学院 主 编

王凤雨 毛永华／编 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论基础/王凤雨，毛永华编著.—北京：北京师范大学出版社，2010.7
(21世纪高等学校研究生教材)
ISBN 978-7-303-10975-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①王… ②毛… Ⅲ.①概率论-研究生-教材 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第072504号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：10
字　　数：150千字
版　　次：2010年7月第1版
印　　次：2010年7月第1次印刷
定　　价：16.00元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　邓昌松
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳
责任校对：李　菡　　责任印制：李　丽

前　言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节, 是研究生教学改革措施之一, 也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据. 纵观我院的研究生教育, 可分为几个阶段: 1953～1960 年是我院研究生教育初创时期, 招生为代数、分析、几何等方向的 10 个研究生班; 1962～1965 年改为招收少量的硕士研究生; 1966～1976 年"文化大革命"时期, 研究生停止招生. 1978 年, 我院恢复招收硕士研究生, 研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外, 主要学习几门专业课. 每年导师根据招生情况, 分别制订每个研究生的培养计划. 从 1982 年开始, 首次开展制订攻读硕士学位研究生培养方案的工作. 为拓宽研究生的知识面, 对每届研究生开设 5 门专业基础理论课: 泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形, 每人至少选 3 门; 从 1983 年起,增加代数拓扑, 共 6 门基础理论课, 安排有经验的教师讲课且相对固定, 考试要求严格, 使研究生受到正规的训练. 由于不同院校开设的本科生课程有一定的差距, 经过这个阶段的学习后, 基本上达到了一个相同的水平, 为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障. 在 1992 年修订教学计划时, 增加了概率论基础和计算机基础. 这样, 基础理论课共开设 8 门. 从 1997 学年开始, 规定研究生每人至少选 4 门. 从 2000 年开始, 改为开设 12 门基础课, 增加现代分析基础、偏微分方程、李群、随机过程. 经过近 30 年系统的研究生培养工作, 研究生教育正在逐步走向正规. 在此期间, 学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的培养经验, 将这些经验落实并贯彻到研究生教材编著中去是大有益处的.

随着研究生的扩招, 招收研究生的数量越来越大. 再加上培养方案的改革, 出版研究生系列教材已经提到议事日程上来. 在 20 世纪 90 年代, 北京师范大学出版社已经出版了几部基础课教材: 《泛函分析》《实分析》《随机过程通论》等, 但未系统策划出版系列教材. 2005 年 5 月, 由北京师范大学

数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商, 由北京师范大学数学科学学院组编 (李仲来教授负责), 准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后再版, 进一步计划用几年时间, 出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材.

我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者, 提出宝贵的修改意见, 使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论 (数学) 等硕士研究生使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2010 年 4 月 20 日

作者的话

我们在本科期间已经学习了《概率论与数理统计》, 那么为什么还要学习《概率论基础》呢? 要回答这个问题, 需要弄清楚《概率论基础》这门课是干什么的, 它与本科所学的概率论有什么关系. 简而言之,《概率论基础》就是概率论的数学基础, 主要目的是使用公理化手段把概率论纳入严格的数学体系.

在本科所学的概率论教材中, 许多内容都依赖于随机试验. 例如: 样本空间是随机试验中可能发生的结果全体, 事件是样本空间的子集, 事件发生的概率是当随机试验的次数趋于无穷时, 该事件所发生频数的极限等. 这些概念很直观, 因而易于理解, 但由于不严格而无法继续深入, 甚至经不起推敲. 比如, 关于概率的定义, 为什么可以把一个试验做无穷多次? (人的寿命是有限的.) 即使可以一直做下去, 也只有到无穷时刻才知道某事件发生频数的极限, 否则人们得到的只是一个近似值而无法严格地确定事件发生的概率是否存在 (即频数是否有极限). 当然, 有人会说依据大数定律, 这个极限一定存在. 但是大数定律也是在概率有定义的假设下证明的, 这岂不是陷入循环论证的误区啦? 因此, 我们本科时所学习的概率论, 许多地方是基于直观而非严格的公理化体系. 于是几乎所有的计算只能局限于直观比较清楚的离散型与连续型这两种随机变量, 而无法继续深入, 甚至于有时基本的存在性问题也只能简单地回避. 比如, 通常我们会假设某随机变量服从某分布, 那么给定这个分布如何确定具有该分布的随机变量一定存在? 为构造这样的随机变量应该怎样设计随机试验?

现在问题比较清楚了: 《概率论基础》就是要使用公理化手段把我们以前所学的概率论严格化, 使之成为数学的一部分. 如果说本科时所学的概率论是在处理一些具体的关于随机事件的例子,《概率论基础》则是通过对这些例子的共同特征进行抽象而形成一般的数学理论. 因此这门课具有数学

理论的所有特征: 内容抽象、应用广泛、推理严谨、结论明确. 正因为内容抽象, 我们在学习中会遇到许多困难, 而克服这些困难的诀窍就是在学习抽象理论时头脑中一定要有具体的例子. 通过借鉴以前所学习的具体理论 (特别是 Lebesgue 测度理论), 就可以比较轻松地掌握更一般的理论. 下面我们按照章节的顺序简要概括本讲义的主要内容.

既然是撇开具体的随机试验来定义事件、概率、随机变量等, 我们首先需要一个全集 Ω 代表所关心的随机现象中的基本元素全体. 再假设 $\mathscr{A}$ 是 Ω 中某些子集所组成的类, 它代表随机现象中可以测量发生概率的事件全体. 留意, 基于 Lebesgue 测度论, 我们知道未必 Ω 的所有子集都可以测量. 事实上, 根据 Lebesgue 可测集类的特征以及概率论中对事件运算的要求, 作为公设我们要求 $\mathscr{A}$ 包含 Ω 并对集合的可数次运算封闭, 这就引入了 σ 代数的概念. 再者, 一个事件的概率可设想成我们对 $\mathscr{A}$ 中一个集合的测量结果, 于是为定义概率我们需要构造在 $\mathscr{A}$ 上的函数 $\mathbb{P}:\mathscr{A}\to[0,1]$. 根据概率论中对概率的要求, 我们公设 $\mathbb{P}$ 具有 σ 可加性, 即任给两两不交的序列 $\{A_n\}_{n\geqslant 1}\subset\mathscr{A}$, 有 $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)$. 这样就确立了概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, 而一个随机变量则是 Ω 到 $\mathbb{R}$ 上的一个可测映射.

那么, 如何在一个 σ 代数上构造概率测度呢? 依据 Lebesgue 测度论, 我们通常只能先对简单的集合 (区间) 定义测度值, 然后再延拓到所有可测集类上. 为将这一手法抽象到一般空间上, 首先根据欧氏空间中的左开右闭区间所组成集类的特征, 定义 Ω 中的半集代数, 并设法由半集代数出发生成 σ 代数 $\mathscr{A}$. 这一步的关键结果是单调类定理, 它是用来刻画 σ 代数中集合性质的标准工具. 进一步地, 假如我们已经在半集代数上定义了概率测度, 通过使用单调类定理并结合 Lebesgue 测度的构造思想, 可将它唯一地延拓到该半集代数所生成的最小 σ 代数上, 从而完成概率空间的构造. 这就是第一章的核心结果——测度扩张定理.

有了测度空间后, 我们就完成了对集合的测量, 第二、三章的任务便是研究对函数的测量了. 关于积分的定义与性质, 完全沿用了 Lebesgue 积分的处理方法, 因而可以比较轻松地掌握. 至此, 我们可以定义一般随机变量的期望了: 它就是随机变量作为 Ω 上可测函数关于概率测度的积分. 由积分变换公式, 我们可将该积分换化为恒同函数关于 $\mathbb{R}$ 上一个概率测度的积分 (Lebesgue-Stieltjes 积分表示), 从而覆盖了我们熟知的离散型与连续型随机变量数学期望的定义. 为对随机变量的分布进行分类, 第三章还讨论了

测度的分解.

为研究多个乃至无穷个随机变量, 我们要使用乘积概率空间, 并讨论给定一些随机变量的条件下另一些随机变量的性质. 这便是第四、五章的主要内容. 这里的主要难点是弄清楚给定 σ 代数下的条件期望的定义以及正则条件概率的构造思想, 从而掌握转移概率的定义以及乘积空间上一般概率测度的构造. 这些对于未来学习随机过程理论是至关重要的.

第六章通过研究有限测度的特征函数, 给出测度弱收敛的若干等价定义. 而第七章则通过引入概率距离把一些收敛性进行度量化, 并进一步讨论由概率测度所组成空间的拓扑性质. 这两章内容是研究随机变量和随机过程极限理论的重要基础.

总之, 本课程是对本科阶段所学概率论的严格化、抽象和延伸, 几个难点包括单调类定理、测度扩张定理、条件期望与正则条件概率. 如何在学习中清楚地理解引入它们的背景和基本思想, 便不难对全书的内容进行全盘把握了.

从 1995 年起, 编者已为北京师范大学的十多届硕士研究生讲授过"概率论基础"课, 逐步摸索出一些帮助学生克服难点、把握重点的经验. 把这些经验写入教材形成一本以突出概率论基础核心内容、清晰勾画每个章节的基本背景和脉络为特征的讲义, 对这门课程的教学应该是有益的. 这便是我们编写这本讲义的原动力.

在本讲义的编写过程中, 我们参考了一些有关的教材和专著, 它们被列入本书后面的参考文献. 特别地, 我们曾多次以严士健、王隽骧、刘秀芳三位教授编写的《概率论基础》为教本讲授该课程. 在本书出版之际, 我们向这些书的作者们表示衷心的感谢. 最后, 我们感谢李仲来教授长期以来的大力支持与热情鼓励.

编著者

2009 年 12 月

目录

第一章　集类与测度

什么是测度? 简单地讲, 测度是用来测量集合大小的工具. 例如, 使用通常的测度 (Lebesgue 测度) 测量 $\mathbb{R}$ 中一个区间 $[a,b)$ 时, 得到的测量结果是 $b-a$. 那么对于一个抽象的全集 Ω, 我们如何选定其子集类并对其中的集合进行测量 (即定义该子集类上的测度)? 通过学习 Lebesgue 测度, 我们知道, 通常并非 Ω 的所有子集都可以测量 (即可测), 因此我们首先需要研究如何定义可测集类. 为此, 先回顾 Lebesgue 可测集类所具备的基本特征: (1) 包含全集和空集; (2) 对于集合的可数次运算 (即集合的交、并、差) 是封闭的. 我们将具有这两个特征的由 Ω 的一些子集所组成的类, 称作 σ 代数 (域), 它将是我们理想中的"可测集类".

那么如何在一个 σ 代数上定义测度呢? 让我们回到已学过的 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度.

前面提过, 我们首先很容易定义区间的测度值, 即 $[a,b)$ 的测度为 $b-a\,(\forall b \geqslant a)$, 因此我们首先在由区间组成的集类上定义了该测度, 然后再通过一些合理的手段把它定义到可测集类上. 如何将这一手法推广到一般情形呢? 如同 σ 代数的定义, 我们先看看由区间所组成的集类所具备的特征: (1) 包含全集和空集; (2) 对于交封闭, 且集类中任意两个集合的差可表成这个集类中有限个集合的不交并. 我们将 Ω 中具有这两个特征的子集类称为半集代数. 而假设已经在一个半集代数上定义了测度, 我们再设法将其扩张到相应的 σ 代数上, 这就是本章的核心定理——测度扩张定理. 为此, 如何由半集代数生成 σ 代数, 便是我们首先要研究的内容, 其核心结果就是单调类定理.

§1.1 集类与单调类定理

§1.1.1 半集代数

如同前面的解释, 以 $\mathbb{R}$ 上的区间所组成的集类的特征为基础, 引入半集代数的概念. 在集合的运算中, 我们将用 $\sum$ 代表集合的不交并.

定义 1.1 如果 Ω 的子集类 $\mathscr{S}$ 满足

(1) $\Omega, \varnothing \in \mathscr{S}$,

(2) $A, B \in \mathscr{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{S}$,

(3) $A_1, A \in \mathscr{S}, A_1 \subset A \Rightarrow \exists n \geqslant 1$ 及 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{S}$ 两两不交, 使 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$,

则称之为 Ω 中的一个半集代数.

性质 1.2 在定义 1.1 之 (1) 和 (2) 成立的条件下, (3) 等价于:

(3′) 若 $A \in \mathscr{S}$, 则 $\exists n \geqslant 1$ 及 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{S}$ 两两不交, 使得 $A^c = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.

证明 (3) $\Rightarrow$ (3′): 由于 $A \subset \Omega$, 由 (3) 知 $\exists n \geqslant 1$ 及 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{S}$ 两两不交, 且与 A 不交, 使得 $\Omega = A + \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$, 从而 $A^c = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(3′) $\Rightarrow$ (3): 由 (3′) 知 $\exists n \geqslant 2$ 及 $A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{S}$ 两两不交, 使得 $A_1^c = \sum\limits_{i=2}^{n} A_i$, 则 $A = A_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} A_i \cap A$. □

例 1.3 $\Omega = [0, +\infty)$, $\mathscr{S} = \{[a, b) : 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty\}$, 则 $\mathscr{S}$ 是 Ω 上的半集代数.

作为由半集代数到 σ 代数的过渡, 我们引入集代数, 它对于集合的有限次运算均封闭, 因而更接近 σ 代数. 后面我们将看到, 由半集代数生成集代数是非常直接的.

§ 1.1.2 集代数

定义 1.4 如果 Ω 的子集类 $\mathscr{F}$ 满足

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$,

(2) $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A - B \in \mathscr{F}$,

则称之为 Ω 中的一个集代数 (或 Boole 代数).

性质 1.5 在定义 1.4 之 (1) 成立的条件下, (2) 与下列任一条件等价:

(2′) $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cup B, A^c, B^c \in \mathscr{F}$;

(2″) $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cap B, A^c, B^c \in \mathscr{F}$.

证明 我们将证明 $(2'') \Rightarrow (2') \Rightarrow (2) \Rightarrow (2'')$.

$(2'') \Rightarrow (2')$: 由 $(2'')$, $\mathscr{F}$ 对于余与交封闭, 从而 $A, B \in \mathscr{F}$ 蕴涵 $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathscr{F}$.

$(2') \Rightarrow (2)$: 设 $A, B \in \mathscr{F}$. 由 $(2')$ 知 $\mathscr{F}$ 对于余与并封闭, 从而 $A - B = (A^c \cup B)^c \in \mathscr{F}$.

$(2) \Rightarrow (2'')$: 设 $A, B \in \mathscr{F}$. 由 (2) 知 $A^c = \Omega - A, B^c = \Omega - B \in \mathscr{F}$, 进而 $A \cap B = A - B^c \in \mathscr{F}$. □

命题 1.6 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 中的集代数, 则 $\forall A, B \in \mathscr{F}$, 有 $A^c, B^c, A \cap B, A \cup B, A - B \in \mathscr{F}$.

显然, 集代数一定是半集代数. 下面的定理告诉我们如何由半集代数生成集代数.

定理 1.7 若 $\mathscr{S}$ 是半集代数, 则

$$\mathscr{F} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} A_k : n \geqslant 1, A_k \in \mathscr{S} (1 \leqslant k \leqslant n) \text{ 两两不交} \right\}$$

是包含 $\mathscr{S}$ 的最小集代数, 记作 $\mathscr{F}(\mathscr{S})$.

证明 先证 $\mathscr{F}$ 是集代数. 显然定义 1.4 之 (1) 成立. 此外, $\forall A, B \in \mathscr{F}$, $\exists A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{S}$ 及 $B_1, B_2, \cdots, B_m \in \mathscr{S}$, 分别两两不交且 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i, B = \sum\limits_{i=1}^{m} B_i$. 则 $A \cap B = \sum\limits_{i,j} A_i \cap B_j$. 由定义 1.1 之 (2) 知 $A \cap B \in \mathscr{F}$. 从而 $\mathscr{F}$ 对有限交封闭.

由性质 1.5, 为证 $\mathscr{F}$ 为集代数, 只需证明若 $A \in \mathscr{F}$, 则 $A^c \in \mathscr{F}$. 设 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}, A_i \in \mathscr{S}$. 则 $A^c = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i^c$. 由性质 1.2 知 A_i^c 可表为 $\mathscr{S}$ 中两两不交集合之和, 故 $A_i^c \in \mathscr{F}$. 由于 $\mathscr{F}$ 对于有限交封闭, 从而 $A^c \in \mathscr{F}$.

最后, 如果 $\mathscr{F}' \supset \mathscr{S}$ 是集代数, 由集代数的有限并封闭性质知 $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$. □

例 1.8 例 1.3 中的 $\mathscr{S}$ 不是集代数, 对并运算不封闭. 由定理 1.7,

$$\mathscr{F}(\mathscr{S}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : n \geqslant 1, 0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \right\}.$$

§ 1.1.3 σ 代数

按照 Lebesgue 可测集类的特征, 我们要求 σ 代数对于可数运算封闭. 由于并与交可以通过余运算而相互表示, 我们可以简单地要求其对于余运算及可数交 (或并) 运算封闭.

定义 1.9 如果 Ω 的子集类 $\mathscr{A}$ 满足

(1) $\Omega \in \mathscr{A}$,

(2) 若 $A \in \mathscr{A}$, 则 $A^c \in \mathscr{A}$,

(3) 若 $A_n \in \mathscr{A}, n = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$,

则称之为 Ω 中的一个 σ 代数.

性质 1.10 σ 代数是集代数.

性质 1.11 在定义 1.9 中, 当 (1) 与 (2) 成立的条件时, (3) 等价于

(3′) 若 $A_n \in \mathscr{A}, n = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

证明 仅留意 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c$. □

性质 1.12 Ω 中任意多个 σ 代数的交仍是 Ω 中的 σ 代数.

证明 设 $\{\mathscr{A}_r : r \in \Gamma\}$ 是一族 σ 代数, $\mathscr{A} = \bigcap\limits_{r \in \Gamma} \mathscr{A}_r$.

(1) 由于任给 $r \in \Gamma$, $\varnothing, \Omega \in \mathscr{A}_r$, 则 $\varnothing, \Omega \in \mathscr{A}$.

(2) 若 $A \in \mathscr{A}$, 则 $\forall r \in \Gamma$ 有 $A \in \mathscr{A}_r$. 从而 $A^c \in \mathscr{A}_r$ $(r \in \Gamma)$, 故 $A^c \in \mathscr{A}$.

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{A}$, 则 $\forall r \in \Gamma$ 有 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{A}_r$, 从而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}_r$. 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$. □

例 1.13 $\mathscr{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ 是 Ω 中的最小 σ 代数, $\mathscr{A} = \{A : A \subset \Omega\}$ 是 Ω 中的最大 σ 代数. 最大 σ 代数常被记为 2^{Ω}, 这是由于 Ω 中的每个子集唯一对应于 $\{0,1\}^{\Omega}$ 中的一个组态: $\Omega \ni \omega \mapsto \mathbf{1}_A(\omega)$, 其中 $\mathbf{1}_A$ 为 A 的示性函数.

定理 1.14 设 $\mathscr{C}$ 是 Ω 的一个子集类. 则存在 Ω 中的 σ 代数 $\mathscr{A}_0$, 使得

(1) $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}_0$,

(2) 如 $\mathscr{A}$ 为 Ω 中的 σ 代数且 $\mathscr{A} \supset \mathscr{C}$, 则 $\mathscr{A} \supset \mathscr{A}_0$.

证明 由于最大 σ 代数包含 $\mathscr{C}$, 故存在包含 $\mathscr{C}$ 的 σ 代数. 令 $\mathscr{A}_0$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的所有 σ 代数之交, 则由性质 1.12 知 $\mathscr{A}_0$ 是 σ 代数, 且包含 $\mathscr{C}$. 此外 $\forall\sigma$ 代数 $\mathscr{A} \supset \mathscr{C}$, 有 $\mathscr{A} \supset \mathscr{A}_0$. □

我们称定理 1.14 中的 σ 代数是由 $\mathscr{C}$ 生成的 σ 代数, 记作 $\sigma(\mathscr{C})$.

下面的定理表明, 当半集代数生成 σ 代数时, 可先生成集代数, 再由集代数生成 σ 代数.

定理 1.15 若 $\mathscr{S}$ 是 Ω 中的半集代数, 则 $\sigma(\mathscr{S}) = \sigma(\mathscr{F}(\mathscr{S}))$.

证明 由于 $\sigma(\mathscr{F}(\mathscr{S})) \supset \mathscr{S}$, 则 $\sigma(\mathscr{F}(\mathscr{S})) \supset \sigma(\mathscr{S})$. 反之, 由于 $\sigma(\mathscr{S})$ 是包含 $\mathscr{S}$ 的集代数, 故 $\sigma(\mathscr{S}) \supset \mathscr{F}(\mathscr{S})$, 而 $\sigma(\mathscr{S})$ 是 σ 代数, 所以 $\sigma(\mathscr{S}) \supset \sigma(\mathscr{F}(\mathscr{S}))$. □

例 1.16 在 $\mathbb{R}^d$ 中, 由所有开集生成的 σ 代数称为 Borel 域 (或 Borel σ 代数), Borel 域中的元素称为 Borel 集, 它包含所有的开集和闭集, 且与由开集类或闭集类所生成的 σ 代数相同. 在一般的拓扑空间中, 由开集类或闭集类生成的 σ 代数也称为 Borel σ 代数, 或 Borel 域.

§ 1.1.4 单调类定理

相对于数列极限而言, 集合序列的极限仅对单调增或单调降两种情形有定义, 相应的极限分别是单调增序列的并与单调降序列的交. 这是两种特殊的易于验证的集合的可数运算. 我们因此把验证单调集合序列极限的封闭性作为集类是否为 σ 代数的关键步骤. 为此, 引入单调类的概念.

定义 1.17 Ω 中子集类 $\mathscr{M}$ 如果对单调序列的极限封闭, 即: