

数学分析

习题演练(第一册)

(第二版)

周民强 编著



科学出版社
www.sciencep.com

数学分析习题演练

(第一册)

(第二版)

周民强 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是基于作者多年教学实践的积累整理编写而成的. 全书共分为三册. 第一册分为 6 章: 实数、函数、极限论、连续函数、微分学(一)、微分学(二)、不定积分. 第二册分为 6 章: 定积分、反常积分、常数项级数、函数项级数、幂级数、Taylor 级数、Fourier 级数. 第三册分为 8 章: 多元函数的极限与连续性、多元函数微分学、隐函数存在定理、一般极值与条件极值、含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分、各种积分之间的关系. 本书选择的习题起点适当提高, 侧重理论性和典范性. 书中还添加了若干注记, 便于读者厘清某些误解.

本书适合理工科院校及师范院校的本科生、研究生及教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题演练. 第 1 册/周民强编著. —2 版. —北京: 科学出版社, 2010

ISBN 978-7-03-028183-8

I. 数… II. 周… III. 数学分析-高等学校-习题 IV. O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 124752 号

责任编辑: 林 鹏 刘嘉善 姚莉丽 / 责任校对: 李奕莹
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 1 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2010 年 7 月第 二 版 印张: 22 3/4

2010 年 7 月第四次印刷 字数: 450 000

印数: 6 501—10 500

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

学数学必须演算习题,这是大家的共识.通过演算,我们不仅能熟悉理论的意义和应用,掌握方法的操作,同时还可以洞察理论本身的适应性,预测其扩展前景.因此,关于数学各分支,都编写出了众多习题集或学习参考书,尤以微积分(或数学分析)类为最.作者在多年的教学实践中,积累了相当数量的练习题,且在培训学生过程中收到较好的效果.现在,在科学出版社编辑的鼓励下,把它们整理并编写出来,供读者参考,以开阔视野和启示思路.

本书以上海科技出版社(2002年)出版的《数学分析》教材为蓝本.因此,总的说来,选题的起点适当提高,侧重理论性和典范性,并力求多角度展示,减少了一般性命题及其在几何、力学方面的应用练习.解答也从简,不再在文字上多下功夫.书中还添加了若干注记,便于读者厘清某些误解.

全书共分三册.第一册分6章:实数、函数,极限论,连续函数,微分学(一),微分学(二),不定积分.第二册分6章:定积分,反常积分,常数项级数,函数项级数,幂级数、Taylor级数,Fourier级数.第三册分8章:多元函数的极限与连续性,多元函数微分学,隐函数存在定理,一般极值与条件极值,含参变量的积分,重积分,曲线积分与曲面积分,各种积分之间的联系.

由于作者的水平和视野所限,书中不足之处在所难免,欢迎读者批评指正.

作 者
2008年

技重于练,
巧重于悟.

目 录

前言

第 1 章 实数、函数	1
1.1 实数	1
1.1.1 分类	1
1.1.2 稠密性	4
1.1.3 常用公式	6
1.2 函数	7
1.2.1 函数的构成和表示手段简介	7
1.2.2 函数分类初步	11
第 2 章 极限论	24
2.1 数列极限以及求极限的方法	24
2.1.1 数列及其极限概念	24
2.1.2 求数列极限的方法	25
2.2 收敛数列的典型——单调有界数列	50
2.2.1 数列单调性、有界性判别	50
2.2.2 数列收敛性判别	53
2.2.3 e 列 ($\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$) 的应用	63
2.3 数列极限的 Cauchy 收敛准则	66
2.4 上、下极限	69
2.4.1 数列与子(数)列	69
2.4.2 上、下极限(最大、小聚点)	72
2.5 函数极限	86
2.5.1 函数的界	86
2.5.2 函数的极限概念	88
2.5.3 函数极限的基本性质	91
2.5.4 著名极限、重要典式	96
2.6 渐近线	103
2.7 函数极限的 Cauchy 收敛准则、Stolz 定理	104

2.8	数列极限与函数极限的关系	105
2.9	闭区间套序列、有限子覆盖	112
第3章	连续函数	116
3.1	函数在一点连续的概念及其局部性质	116
3.2	连续函数的运算性质,复合函数、反函数以及初等函数的连续性 ...	121
3.3	闭区间上连续函数的重要性质	134
3.3.1	有界性、最值性	134
3.3.2	中(介)值性	136
3.3.3	一致连续性	143
第4章	微分学(一):导数、微分	151
4.1	导数概念	151
4.2	基本初等函数的导数,求导运算法则,复合函数以及反函数的求导法	160
4.3	导数的几何意义	167
4.4	参数式函数和隐函数的导数	168
4.5	微分	172
4.6	高阶导数、高阶微分	174
4.7	光滑曲线的几何量	183
第5章	微分学(二):微分中值定理、Taylor 公式	186
5.1	微分中值定理	186
5.2	不定型的极限——L'Hospital 法则	210
5.3	可微函数的性质	218
5.3.1	函数的单调性	218
5.3.2	不等式	230
5.3.3	导函数的特征	238
5.3.4	函数的极值	242
5.4	光滑曲线的几何特征	255
5.4.1	凹凸性	255
5.4.2	拐点	261
5.5	方程的根	263
5.6	Taylor 公式	273
5.6.1	Peano 余项的 Taylor 公式	273
5.6.2	Lagrange 余项的 Taylor 公式	285

5.7 函数和导函数的极限动态	294
5.7.1 函数的极限动态	294
5.7.2 导函数的极限动态	295
5.8 广义中值公式	300
第6章 微分的逆运算——不定积分	302
6.1 原函数与不定积分的概念	302
6.2 积分法法则	309
6.2.1 不定积分运算的初等性质	309
6.2.2 换元积分法	313
6.2.3 分部积分法	322
6.2.4 不定积分的递推公式	330
6.3 原函数是初等函数的几类函数积分法	336
6.3.1 有理分式	336
6.3.2 无理函数	340
6.3.3 三角(超越)函数	351
补记	355

第 1 章 实数、函数

数学分析是以研究函数性质为己任的,这些函数是定义在实数集(或有序实数组形成的点集)上,且取值为实数.因此,先对这方面的基础知识作一简单介绍和回顾是有益的.

1.1 实数

1.1.1 分类

全体实数记为 $(-\infty, \infty)$ 或 $\mathbf{R}$. 正整数(自然数, $1, 2, \dots, n, \dots$)全体记为 $\mathbf{N}$. 整数 $(0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots)$ 全体记为 $\mathbf{Z}$. 有理数 $(\frac{m}{n}, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}; m$ 与 n 互素,为既约分数)全体记为 $\mathbf{Q}$. 无理数(非有理数之实数)全体记为 $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

代数数 满足整系数代数方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 的实数(根). (有理数是代数数; $p+q\sqrt{7}$ ($p, q \in \mathbf{Q}$) 满足方程 $x^2 - 2px + (p^2 - 7q^2) = 0$, 是代数数.)

超越数 非代数数的实数. (圆周率 π , 对数底 e . 若 a 是不等于 $0, 1$ 的代数数, b 是无理数又是代数数, 则 a^b 是超越数.)

例 1.1.1 试证明下列命题:

- (1) 若 n 是自然数, 则 $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.
- (2) 若自然数 n 不是完全平方数, 则 $\sqrt{n} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.
- (3) 设 a, b, c 是正有理数, 若 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$, 则 $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}, \sqrt{b} \in \mathbf{Q}$.
- (4) (i) $\sqrt[n]{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ($n \geq 2$). (ii) $\sqrt[n]{n} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ($n \geq 2$).
- (5) 存在正无理数 a, b , 使得 a^b 是正整数.

证明 (1) 反证法. 假定 $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} = p/q$ (p 与 q 是互素正整数), 则知

$$n^2 - 1 = \left(\frac{p^2}{q^2} - 2n \right)^2 / 4, \quad n = (p^4 + 4q^4) / 4p^2 q^2.$$

由此可知 q^2 是 $p^4 + 4q^4$ 的因子, 也即 q^2 是 p^4 的因子, 这与假定矛盾.

(2) 反证法. 假定 $\sqrt{n} = p/q$ (p, q 是互素正整数), 则由 $nq^2 = p^2$ 可知, q^2 是 p^2 的因子. 从而得 $q^2 = 1$, 即 $p^2 = n$, 这与题设矛盾.

(3) 记 $d = \frac{a-b}{c} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, 注意到 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$, 即可得

$$\sqrt{a} = \frac{c+d}{2}, \sqrt{b} = \frac{c-d}{2}. \text{证毕.}$$

(4) (i) 反证法. 假定 $\sqrt[n]{2} \in \mathbf{Q}$, 记为 $\sqrt[n]{2} = (1 + p/q)$ (p, q 是互素正整数), 则 $2q^n = p^n + \binom{n}{1} p^{n-1} q + \cdots + q^n$. 由此知 q 可除尽 p^n , 但这与 p, q 互素矛盾. 证毕.

(ii) 反证法. 假定存在 $r \in \mathbf{Q}$, 使得 $r = \sqrt[n]{n}$, 即 $r^n = n$. 易知 $r \in \mathbf{N}$ 且 $r \geq 2$. 由此得 $r^n > n$, 矛盾. 证毕.

(5) 取 $a = \sqrt{2}, b = \log_{\sqrt{2}} 3$ ($b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, 否则有 $b = p/q = 2 \log_2 3$, 则 $2^b = 3^{2q}$. 这是不可能的) 可知 $a^b = 3$.

例 1.1.2 试证明下列命题:

(1) 若有理数 p/q (既约分式) 是整系数多项式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

的根, 则 p 是 a_0 的因子, q 是 a_n 的因子.

(2) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ 与 $\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$ 以及 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 都是无理数.

(3) 若 $\cos a + \sin a \in \mathbf{Q}$, 则 $\cos^n a + \sin^n a \in \mathbf{Q}$ ($n \in \mathbf{N}$).

证明 (1) 用 p/q 代入方程并化简为

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

由此知 p 是 $a_0 q^n$ 的因子, 但 p 不是 q^n 的因子, 故 p 是 a_0 的因子. 类似地可证 q 是 a_n 的因子.

(2) 易知 $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}, \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$ 分别满足方程

$$x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4 = 0,$$

$$x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 27x^2 - 36x - 23 = 0.$$

从而由(1)立即得证. 此外, 如果 $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是有理数, 那么对 $\sqrt{3} = r - \sqrt{2}$ 两端平方, 可得

$$3 = r^2 - 2\sqrt{2}r + 2, \quad \sqrt{2} = (r^2 - 1)/2r.$$

这与 $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ 矛盾.

(3) 由题设知

$$1 + 2\cos a \sin a = (\cos a + \sin a)^2 \in \mathbf{Q}.$$

从而根据公式

$$\begin{aligned} \cos^{n+1} a + \sin^{n+1} a &= (\cos a + \sin a)(\cos^n a + \sin^n a) \\ &\quad - \cos a \cdot \sin a (\cos^{n-1} a + \sin^{n-1} a), \end{aligned}$$

再用归纳法即可得证.

定义 1.1.1 一个实数集 E 的全部元素若能按自然数次序排列起来, 即 $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$, 则称 E 为可列集.

定理 1.1.1 若 E_1, E_2 都是可列集, 则其并集 $E_1 \cup E_2$ 是可列集.

证明 不妨设 $E_1 \cap E_2 = \emptyset, E_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}, E_2 = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$, 则对 $E_1 \cup E_2$

中全部元素可排列为 $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$.

例 1.1.3 试证明下列命题:

- (1) 自然数集 $\mathbf{N}$ 是可列集, 偶正整数全体是可列集.
- (2) 正有理数全体 $\mathbf{Q}_+$ 是可列集.
- (3) $\mathbf{Q}$ 是可列集.

证明 (2) 作 $\mathbf{Q}$ 之方阵如图 1.1, 并按所示箭头为序把全体正有理数 $\mathbf{Q}_+$ 排成

$$\{r_n\}: 1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \dots$$

其中舍去重复者, 且仅保留可约化的最简式.

(3) 因为正有理数全体是可列集, 而负有理数全体只是前者在每个数前多一个“—”号, 所以只要按前者的排序仍可排列起来, 根据定理 1.1.1 即知 $\mathbf{Q}$ 是可列集(注意, 数“0”可排在最前面).

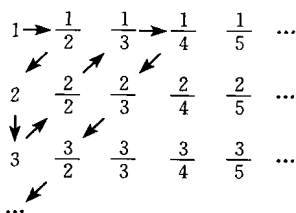


图 1.1

定理 1.1.2 开区间 $(0, 1)$ 中的全体实数是不可排列的.

证明 用反证法. 将 $(0, 1)$ 中实数都用十进制小数表示, 并舍弃其小数点后连续出现无限个“0”的表示法. 现在假定 $(0, 1)$ 中实数是可排列的, 不妨将全体排列为 $\{a_n\}$:

$$a_1 = 0. a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \dots$$

$$a_2 = 0. a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \dots$$

.....

$$a_n = 0. a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm} \dots$$

.....

下面将指出这是不可能的, 即可找出 $(0, 1)$ 中一个实数 b , 它不在排列中. 我们取 $b = 0. b_1 b_2 \dots b_n \dots$ 如下:

$$b_1 \quad \text{若 } a_{11} = 1, \text{ 则取 } b_1 = 2; \text{ 若 } a_{11} \neq 1, \text{ 则取 } b_1 = 1.$$

$$b_2 \quad \text{若 } a_{22} = 1, \text{ 则取 } b_2 = 2; \text{ 若 } a_{22} \neq 1, \text{ 则取 } b_2 = 1.$$

.....

$$b_n \quad \text{若 } a_{nn} = 1, \text{ 则取 } b_n = 2; \text{ 若 } a_{nn} \neq 1, \text{ 则取 } b_n = 1.$$

.....

显然 $b \neq a_i (i=1, 2, \dots, n, \dots)$, 这说明小数 b 没有在排列之中. 这一矛盾指出 $(0, 1)$ 中实数全体是不可排列的.

我们称不可排列的数集为不可列集. 因此, $(0, 1)$ 是不可列集, 随之 $(0, 1)$ 中无理数全体是不可列集. 这说明无理数的“数量”要比有理数“多得多”. 只有有限个元素的集合称为有限集, 非有限集称为无限集. 可列集是无限集, 有限集与可列集统称为至多可列集或可数集.

例 1.1.4 直线(实数全体)上互不相交的开区间形成的集是至多可列集.

证明 在每个开区间中取定一个有理数, 显然这些有理数互不相同, 因此开区间的“数量”与所选的有理数“数量”相同, 即得所证.

1.1.2 稠密性

定义 1.1.2 设 E 是 $\mathbf{R}$ 中的一个实数集. 若任意两个实数之间必有 E 中的一个数, 则称 E 在 $\mathbf{R}$ 中稠密.

例 1.1.5 (有理数的稠密性) 设 a, b 是实数, $a < b$, 则存在有理数 $r: a < r < b$.

证明 因为 $b - a > 0$, 所以存在正整数 n , 使得 $0 < \frac{1}{n} < b - a$. 易知 $na < na + 1 < nb$, 且存在整数 $m: m \leq na + 1 < m + 1$. 从而有 $na < m$.

综合上述结果, 可得 $na < m \leq na + 1 < nb$. 由此立即导出 $na < m < nb$, 即 $a < \frac{m}{n} < b$, 其中 $\frac{m}{n}$ 是有理数.

例 1.1.6 (无理数的稠密性) 设 a, b 是实数, $a < b$, 则有无理数 $c: a < c < b$.

证明 根据 $\sqrt{2}a < \sqrt{2}b$, 可知存在有理数 r , 使得 $\sqrt{2}a < r < \sqrt{2}b$, 易知 $a < \frac{r}{\sqrt{2}} < b$.

若 $r \neq 0$, 则 $\frac{r}{\sqrt{2}}$ 是无理数. 若 $r = 0$, 则 $a < 0 < b$ 或 $\sqrt{2}a < 0 < \sqrt{2}b$. 易知存在有理数 s :

$0 < s < \sqrt{2}b$. 由此知 $\sqrt{2}a < s < \sqrt{2}b$, 即 $a < \frac{s}{\sqrt{2}} < b$. $\frac{s}{\sqrt{2}}$ 是 a 与 b 之间的无理数.

* **例 1.1.7** 试证明下列命题:

(1) 对任一实数 x , 任一正整数 n , 存在 $r_n \in \mathbf{Q}$, 使得 $|x - r_n| \leq 1/n (n \in \mathbf{N})$.

(2) 设 $a > 0, b > 0$, 则 $\sqrt{2}$ 位于 $(a + 2b)/(a + b)$ 与 a/b 之间.

(3) 若 m, n 取遍一切正整数, 则数列 $\{m^2/n^2\}$ 在 $(0, \infty)$ 上稠密.

(4) 若 $\{a_n\}$ 是递增无上界列, 且 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 则数集 $\{a_m/a_n; m \geq n \geq 1\}$ 在 $(1, +\infty)$ 中

稠密.

证明 (1) 作 $r_n = [nx]/n$ 即可.

(2) 若 $a/b \geq \sqrt{2}$, 则我们有

$$\frac{a+2b}{a+b} = 1 + \frac{b}{a+b} = 1 + \frac{1}{a/b+1} \leq 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

由此即可得证.

(3) 对任一实数 $x > 0$, 以及 $\epsilon > 0$, 取 n, m 使得

$$\frac{2\sqrt{x}}{n} + \frac{1}{n^2} < \epsilon, \quad \frac{m^2}{n^2} \leq x < \frac{(m+1)^2}{n^2}.$$

从而可知 $0 \leq x - \frac{m^2}{n^2} < \frac{2m+1}{n^2} \leq \frac{2\sqrt{x}}{n} + \frac{1}{n^2} < \epsilon$. 即得所证.

(4) 反证法. 假定存在 $x_0 > 1$ 以及 $\epsilon_0 > 0$, 使得 $\left| \frac{a_m}{a_n} - x_0 \right| \geq \epsilon_0, 1 \leq n < m$. 因为 $a_n/a_{n+1} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 所以对充分大的 k , 存在 $n_k > k$, 使得

$$\frac{a_m}{a_k} < x_0 \quad (m < n_k), \quad \frac{a_m}{a_k} > x_0 \quad (m > n_k).$$

特别,对每个 k ,我们有

$$\frac{a_{n_k+1}}{a_k} - \frac{a_{n_k}}{a_k} \geq 2\epsilon_0, \quad \frac{a_{n_k+1}}{a_{n_k}} - 1 \geq 2\epsilon_0 \frac{a_k}{a_{n_k}} > \frac{2\epsilon_0}{x_0} > 0.$$

但后一式左端在 $k \rightarrow +\infty$ 时为 0,这与 $\epsilon_0 > 0$ 矛盾.

例 1.1.8 试证明下列命题:

(1) 对任给的实数 x 以及正整数 $N: N > 1$,必存在整数 $p, q: 0 < q < N$,使得

$$|qx - p| < 1/N.$$

(2) 若 x 为无理数,则存在无穷多个有理数 $\frac{p}{q} (q > 0)$,使得 $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

(3) 若 α 是无理数,则点集 $E = \{m + n\alpha : m, n \in \mathbf{Z}\}$ 在 $\mathbf{R}$ 中稠密.

证明 (1) 考察 $N+1$ 个实数 $mx - [mx] (m=1, 2, \dots, N, N+1)$. 由于有 $0 \leq mx - [mx] < 1$,故在 $N+1$ 个数 $\{mx - [mx]\}$ 中必有两个数,其差的绝对值小于 $\frac{1}{N}$,不妨设为

$$|m_2x - [m_2x] - (m_1x - [m_1x])| < \frac{1}{N}, \quad 0 < m_1 < m_2 \leq N.$$

令 $q = m_2 - m_1, p = [m_2x] - [m_1x]$,则 $0 < q < N$,且 $|qx - p| < \frac{1}{N}$.

(2) 反证法. 假定只有有限个有理数满足上述不等式,即

$$\left|x - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

令 $\delta = \min \left\{ \left|x - \frac{p_i}{q_i}\right| : i = 1, 2, \dots, m \right\}$,取 $N: N > \frac{1}{\delta}$,且作整数 $p, q (0 < q < N)$,使得

$$|qx - p| < \frac{1}{N}, \quad \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN} < \frac{1}{q^2}.$$

但因 q 是正整数,故又有 $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN} < \frac{\delta}{q} < \delta$. 根据 δ 之定义, $\frac{p}{q} \neq \frac{p_i}{q_i} (i = 1, 2, \dots, m)$,这与原假设矛盾,证毕.

(3) 对实数 $p, q: q - p = \epsilon > 0$,由于存在 $p_n, q_n \in \mathbf{Q} (q_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty)$,使得

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}, \quad |q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_n} < \epsilon.$$

因此可令 $a = |q_n\alpha - p_n|$,而至少有一个数 $ma (m \in \mathbf{Z})$,使得

$$mq_n\alpha - mp_n \text{ (或 } -mq_n\alpha + mp_n) \in (p, q).$$

注 1 对 $x \in (-\infty, \infty)$,若存在既约分式 p_k/q_k (有理数, $p_k \in \mathbf{Z}, q_k \in \mathbf{N}$ 且 $q_k \rightarrow +\infty, k \rightarrow$

∞), 使得 $x - p_k/q_k = o(1/q_k) (k \rightarrow \infty)$, 则 $x \in \mathbf{Q}$. 为此, 采用反证法: 假定 $x = p/q (p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N})$, 则知 $pq_k - qp_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$. 因为 $pq_k - qp_k \in \mathbf{Z}$, 所以 $pq_k - qp_k = 0$. 即对充分大的 k , 有 $p/q = p_k/q_k$, 矛盾.

注2 若 α 是无理数, 且是 n 次整系数代数方程的根, 则存在 $C_\alpha > 0$, 使得 $|\alpha - p/q| < C_\alpha/q^n (p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N})$.

注3 (Kronecker-Чебыщев 定理) 对任意的无理数 α 以及数 β , 存在无限个整数 $p, q (p > 0)$, 使得 $|p\alpha - q + \beta| < 3/p$. 由此结果可以证明: 对任意实数 β , 均存在整数列 $\{n_k\}$, 使得 $\sin n_k \rightarrow \sin \beta (k \rightarrow \infty)$. 实际上, 取 $\alpha = 2\pi$, 以及 $p_k, q_k (p_k \rightarrow +\infty)$, 使得 $2p_k\pi - q_k + \beta = o(1) (k \rightarrow \infty)$, $q_k = 2p_k\pi + \beta + o(1) (k \rightarrow \infty)$.

1.1.3 常用公式

$$1. \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}. \quad 2. \sum_{k=1}^n k^3 = (1+2+\cdots+n)^2.$$

$$3. (\text{Newton 二项式}) (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n a^{n-k} b^k, C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$4. \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (a_i > 0, i=1, 2, \cdots, n).$$

证明 后一不等式称为几何-算术不等式, 可用数学归纳法证之; 而前一不等式可直接由下述不等式推出:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

$$5. (\text{Cauchy 不等式}) \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

证明 引进变量 t , 展开不等式

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (a_i t + b_i)^2 = t^2 \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2t \cdot \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2,$$

由此立即可得结论为真.

6. 三角求和公式

$$(1) \sum_{k=0}^n \cos(x + k\alpha) = \sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{n\alpha}{2} \right) / \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$(2) \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x = \frac{(\sin nx)^2}{\sin x}.$$

$$(3) \sum_{k=1}^n \sin^2 kx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{2\sin x}.$$

1.2 函 数

1.2.1 函数的构成和表示手段简介

(一) 就一元函数而言, $y=f(x)$ 表示从一个实数集 E 到实数集 $R(f)$ (值域) 的一种对应关系, 而 E 主要是指区间 I . 从已知函数出发, 还可以构成多种函数, 其基本方法有: 四则运算 (如 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \times g(x)$ 等); 复合运算 (如 $f[g(x)]$); 在对应是一一对应时, 又可出现反函数; 在许多课题中, 函数关系 f 不是一下子就能用明显的形式表示出来, 而是通过它所具有的性质, 或者与其他事物的联系中暗示出来 (如通过函数方程). 在未用显式表示时, 我们称其为隐函数. 许多隐函数是无法用显式表示的, 此时可通过其他手段来研究其性质, 有时也采用“无穷形式”的表示手法 (如无穷级数、积分等).

例 1.2.1 设在 $[0, 1]$ 上定义了函数

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 是无理数}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ (既约分式)}, \end{cases}$$

则 g 对 h 的复合函数为定义在 $[0, 1]$ 上的 $f(x)$:

$$f(x) = g[h(x)] = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}. \end{cases}$$

例 1.2.2 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 n 次复合函数为

$$(f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

证明 当 $n=1$ 时, 即 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 满足该结论.

现在假定 $n=k$ 时, k 次复合函数满足 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, 则对 $n=k+1$ 时, 其 $(k+1)$ 次复合函数为

$$\begin{aligned} (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_k \circ f)(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \bigg/ \sqrt{1+k\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \bigg/ \sqrt{\frac{1+x^2+kx^2}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}. \end{aligned}$$

根据数学归纳法即得所证.

例 1.2.3 解答下列问题:

- (1) 设 n 是奇数, 且 $p > 0, q \in \mathbf{R}$, 试证明 $y = x^n + px + q$ 存在反函数.
- (2) 试问 a, b 取何值, 使 $f(x) = \ln(a + be^x)$ 是自反函数?

证明 (1) 只需指出:若有 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $x_1^n + px_1 + q = x_2^n + px_2 + q$, 则必有 $x_1 = x_2$. 实际上, 由上等式可得 $x_1^n - x_2^n + p(x_1 - x_2) = 0$, 而 n 是奇数且 $p > 0$, 故必有 $x_1 = x_2$.

(2) 由题设知 $f(x) = f^{-1}(x)$, 再注意到 $f[f^{-1}(x)] = x$ 可得 $f[f(x)] = x$, 从而有 $\ln(a + be^{\ln(a+be^x)}) = x$, 即 $a + ab + b^2 e^x = e^x$. 从而有 (i) $a > 0, b = -1$; (ii) $a = 0, b = 1$.

例 1.2.4 求满足下列函数方程中的 $f(x)$:

$$(1) f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x \quad (x \neq 0, 1).$$

(2) 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, \infty)$ 上的正值函数, 且有 $f[f(x)] = 6x - f(x)$.

(3) $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y), x, y \in (-\infty, \infty)$.

解 (1) 以变量 $(t-1)/t$ 代 x , 可得

$$f((t-1)/t) + f(-1/(t-1)) = (2t-1)/t.$$

另以 $-1/(t-1)$ 代 x , 又知

$$f(-1/(t-1)) + f(t) = (t-2)/(t-1).$$

从原式加第三式减第二式, 我们有 $f(x) = (x^3 - x^2 - 1)/2x(x-1)$.

(2) 对任给实数 $x > 0$, 记 $a_0 = x$, 以及

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

则代入方程可得 $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$. 解其特征方程 $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, 即 $(\lambda+3)(\lambda-2) = 0$, 可知 $a_n = (-3)^n c + 2^n d$. 根据 $f(a_n) > 0$, 又得 $c = 0$, 从而有 $a_n = 2^n d$. 易知 $d = a_0$, 我们有 $f(a_0) = a_1 = 2a_0$, 即 $f(x) = 2x$. 显然, 此解是唯一的.

(3) 取 $x = y = 1$, 则由题式知 $f(1) = 0$ 或 1 :

(i) 若 $f(1) = 0$, 则令 $y = 1$, 可知 $f(x) \equiv 0$.

(ii) 若 $f(1) = 1$, 则有 $f(x) + x = (x+1)f(x), x \in (-\infty, \infty)$. 从而可得

$$f(x) = 1 (x \neq 0), \quad f(0) = a (-\infty < a < \infty).$$

例 1.2.5 试证明下列命题:

(1) 设定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) \leq x, \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y),$$

则 $f(x) \equiv x (-\infty < x < \infty)$.

(2) 若 $f(x)$ 是从 $(-\infty, \infty)$ 到 $(-\infty, \infty)$ 上的一一对应函数, 则

$$f(x^2) - f^2(x) < 1/4 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

证明 (1) (i) 易知 $f(0) \leq 0$. 又当 $x = y = 0$ 时有 $f(0) \leq 2f(0)$, 即得 $f(0) \geq 0$. 故 $f(0) = 0$.

(ii) 由 $f(x) \geq f(x+(-x)) - f(-x) = -f(-x) \geq x$, 结合 $f(x) \leq x$, 我们有 $f(x) = x (x \in \mathbf{R})$.

(2) 反证法. 假定对一切 $x \in (-\infty, \infty)$ 有

$$f(x^2) - f^2(x) \geq 1/4,$$

则取 $x=0$ 可得 $f(0) - f^2(0) \geq 1/4$, 即 $[f(0) - 1/2]^2 \leq 0$. 由此知 $f(0) = 1/2$, 取 $x=1$, 又易得 $f(1) = 1/2$. 这与 f 是一一对应矛盾. 证毕.

例 1.2.6 试问 a, b 取何值, 使得函数 $y = \frac{x^3 + ax^2 + bx + 2b}{x^2 + x + 1}$ 是线性函数?

解 因为我们有 $y = x + \frac{(a-1)x^2 + (b-1)x + 2b}{x^2 + x + 1}$, 且由于上式右端分子为

$$(a-1)(x^2 + x + 1) + (b-1-a+1)x + 2b - a + 1,$$

故知 $a = -1, b = -1$ 时 y 为线性函数.

例 1.2.7 试求 a, b 之值, 使方程 $\log_a x = x^b$ 有正解 x .

解 将原式写为 $a^{x^b} = x$ 或 $\ln x / x^b = \ln a$, 可知原方程有正解 x 当且仅当 $\ln a$ 是在函数 $f(x) = \ln x / x^b$ 的值域中, 易知 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 1/be)$, 从而原方程有正解 x 当且仅当 $\ln a \leq 1/be$, 即 $1 < a \leq e^{1/be}$.

(二) 就一元函数而言, $y = f(x)$ 是笛卡儿直角坐标系中的表示方式, 它的优越性是显然的, 然而在许多情形中, 用参数式 $x = x(t), y = y(t)$ 的表示法却有着不可替代的作用 (特别是在方程 $F(x, y) = 0$ 中 y 有多值以及描述平面运动时).

例 1.2.8 设从高 y_0 处以速度 v_0 在水平方向 (x 轴正向) 投掷一物, 若不计空气阻力, 记时间为 t , 则其运动轨迹为

$$\begin{cases} y = y_0 - \frac{gt^2}{2}, \\ x = v_0 t, \end{cases} \quad \text{或} \quad y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

例 1.2.9 椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

也可用参数方程表示. 实际上, 令 $x = acost$, 则代入原方程后, 立即得到 $y = bsint$. 故其参数方程为

$$\begin{cases} x = acost, \\ y = bsint, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

其中, 参数 t 的几何意义如下: 作出两个圆心位于原点 O 的同心圆, 半径各为 a 与 b (图 1.2). 设 $M(x, y)$ 是椭圆上一点, B 是大圆上的点, 其横坐标也为 x , 记 OB 与 x 轴的夹角为 t , 由图示可知,

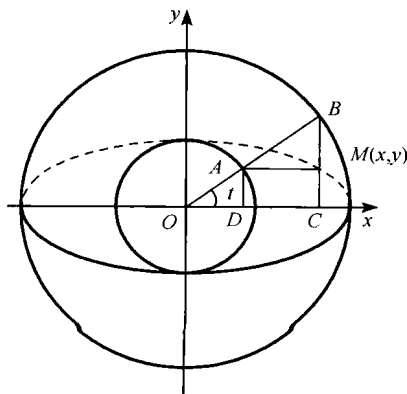


图 1.2

$$\begin{cases} x = OC = acost, \\ y = MC = AD = bsint. \end{cases}$$

例 1.2.10(Cycloid 旋轮线或摆线) 设有半径为 a 的圆, 置于一直线上并沿直线作无滑动之滚动, 则其圆周上一点之运动轨迹曲线称为旋轮线.

现在, 取直线为 x 轴, 并在圆周上取定一点 P (图 1.3). 假定运动开始时, P 点位于原点 O , 并取过原点之 x 轴垂线为 y 轴.

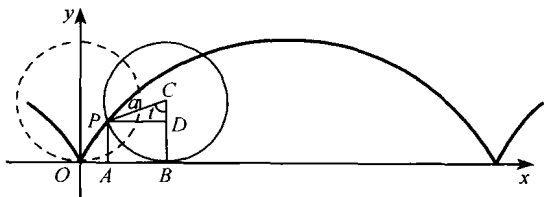


图 1.3

假定滚动开始且设该点到达自转角度为 t 的位置, 易知点 P 的 x, y 坐标各为

$$\begin{cases} x = OA = OB - AB = at - asint, \\ y = PA = DB = CB - CD = a - acost, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

注 1 如果我们想从旋轮线的参数表达式中直接得到 x 与 y 之间的函数关系, 那么可以得到 $x = \varphi(y)$ 如下: 在区间 $[0, \pi]$ 上, 函数 $y = a(1 - \cos t)$ 有反函数 $t = \arccos \frac{a-y}{a}$, 代入 $x = a(t - \sin t)$, 可得 $x = a \arccos \frac{a-y}{a} - a \sin \left(\arccos \frac{a-y}{a} \right)$, 或在 $0 \leq x \leq \pi a$ 时有

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

而在 $\pi a \leq x \leq 2\pi a$ 时, 由图形易知 $x = 2\pi a - \left(a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \right)$.

注意, 函数 $x = a(t - \sin t)$ 存在反函数, 但它不能用初等函数来表示. 也就是说, 函数 $y = f(x)$ 是不能用初等函数表出的. 由此可知, 在许多情况下, 在函数的研究中, 用参数方程表示法比直接用直角坐标表示要恰当和简便得多.

注 2 为了补充数学理论的完整性和概念的确定性, 以及表达上的清晰性和运算的简便性, 常需要人为地定义一些函数, 如下所示:

符号函数(signum function):

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Dirichlet 函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}. \end{cases}$$