

XIAOBO BIANHUAN YU TUXIANG CHULI 小波变换与图像处理

倪林 编著

中国科学技术大学出版社

中国科学技术大学研究生教材

ZHONGGUO KEXUE JISHU DAXUE YANJIUSHENG JIAOCAI





中国科学技术大学研究生教材



小波变换与图像处理

倪 林 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书的内容分为基础理论、演进发展和典型应用三个部分. 其中在基础理论部分, 通过分析 Fourier 变换和 Gabor 变换的特点, 说明小波变换的起源和发展, 给出连续和离散小波变换的定义, 介绍多分辨率分析的概念以及小波变换的快速算法; 给出正交小波基、紧支集正交小波基和双正交小波基的构造方法. 在演进发展部分, 分别介绍小波包、第二代小波变换、多小波变换、球面小波和多尺度几何分析等理论和方法. 在典型应用部分, 给出基于小波变换的图像压缩方法, 包括高效的小波图像压缩算法, 另外, 介绍基于小波变换的数字水印、指纹处理识别等典型应用.

本书适合高年级本科生、研究生、教师和相关科研人员阅读使用.

图书在版编目(CIP)数据

小波变换与图像处理/倪林编著. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2010. 6
ISBN 978-7-312-02733-8

I. 小… II. 倪… III. 小波分析—应用—图像处理 IV. TP391-41

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 151098 号

出版 中国科学技术大学出版社
地址:安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026
网址: <http://press.ustc.edu.cn>
印刷 合肥学苑印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 13.5
字数 260 千
版次 2010 年 6 月第 1 版
印次 2010 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—3000 册
定价 28.00 元

前 言

小波变换自出现以来,经过若干年的发展,从多分辨率分析到小波基构造以至于相关的小波滤波器等业已形成系统化的基础理论;可以说小波从一度“弱小”的幼苗已逐渐长成了枝叶繁茂的参天大树,其深厚的根基,使得小波的相关理论在未来的发展中,有可能催生出更加新颖的数据表示方法;小波的应用也已广泛地渗入到信号与信息处理、模式识别与人工智能、物理和工程应用等领域,并取得显著的应用效果.

本书是作者在十多年的小波教学和科研实践的基础上,总结、整理教学讲义和科研成果而成的.其基础理论部分,帮助读者轻松入门;而发展部分,则为感兴趣的读者进一步探索更加新颖的数据表示方法提供启发,这也是和众多的小波书籍相比,本书的特点所在;最后的应用部分则介绍小波在图像处理中的典型应用,帮助读者进一步提高对小波的感性认识.

需要说明的是,小波的理论、应用和发展涵盖诸多领域的广泛内容,本书只是揭开小波浩瀚知识海洋中的冰山一角,希望本书的管窥之见,能起到抛砖引玉的作用.

在本书的撰写过程中,相关的研究生做了大量的编辑整理工作,这些同学包括冷宏超、钱功伟、吴巧玲和方超等,在此表示谢意.

由于作者水平有限,尽管做了大量、细致的工作,但书中错误在所难免,望广大师生和读者不吝指正.

作 者

2010年3月

常用数学符号

$\arg \max_x f(x)$	使 $f(x)$ 取最大值的 x 的值
$\arg \min_x f(x)$	使 $f(x)$ 取最小值的 x 的值
$\lceil x \rceil$	向上取整, 即取不小于 x 的最小整数 (如 $\lceil 3.5 \rceil = 4$)
$\lfloor x \rfloor$	向下取整, 即取不大于 x 的最大整数 (如 $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$)
$\ln x$	以 e 为底的 x 的对数或 x 的自然对数
$\log x$	以 10 为底的 x 的对数
$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$	函数 f 关于 x 的偏导数
clos	求闭包
$\text{diag}(a_1, \dots, a_d)$	对角矩阵
$\mathbf{A}^{-1}$	矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵
$\sup_x f(x)$	$f(x)$ 的上确界, 也就是 $f(x)$ 的最小上界或全局最大值
$\inf_x f(x)$	$f(x)$ 的下确界, 也就是 $f(x)$ 的最大下界或全局最小值

目 次

前言	(I)
常用数学符号	(III)

第 1 篇 基础理论

第 1 章 从 Fourier 变换到小波变换	(2)
1.1 Fourier 变换及其特点	(2)
1.2 短时 Fourier 变换及其特点	(5)
1.3 Heisenberg 测不准原理	(9)
1.4 小波框架理论	(11)
1.4.1 框架的泛函理论基础	(11)
1.4.2 框架的定义	(11)
1.4.3 小波框架	(12)
1.5 小波变换和 STFT 的比较分析	(12)
1.5.1 变换核在时域和频域的特性比较	(13)
1.5.2 状态空间特性分析	(13)
第 2 章 小波变换及多分辨率分析	(15)
2.1 小波变换	(15)
2.2 连续小波变换	(17)
2.3 离散小波变换	(19)
2.4 二维小波变换	(21)
2.5 多分辨率分析	(22)
2.6 离散快速正交小波变换——Mallat 算法	(24)
第 3 章 小波基的构造	(29)
3.1 正交小波基的构造	(29)
3.1.1 双尺度差分方程	(29)
3.1.2 正交小波基的构造	(29)

3.2 紧支集正交小波基的构造	(36)
3.2.1 由双尺度差分方程得到尺度函数的方法	(36)
3.2.2 紧支正交小波的构造方法	(38)
3.3 双正交小波基的构造	(41)
3.4 基于局部正弦和余弦基的光滑小波构造方法	(48)
第1篇参考文献	(51)

第2篇 演进发展

第4章 小波包	(54)
4.1 小波包分解	(54)
4.1.1 小波包的定义	(55)
4.1.2 小波包的性质	(55)
4.1.3 小波包正交分解	(58)
4.1.4 小波包算法	(60)
4.2 代价函数	(63)
第5章 第二代小波变换	(66)
5.1 Harr 小波	(66)
5.2 基于提升方案的小波变换	(68)
5.2.1 提升小波变换概述	(68)
5.2.2 提升小波变换	(68)
5.2.3 提升小波逆变换	(71)
5.2.4 提升小波变换举例	(72)
5.2.5 提升算法	(73)
5.3 线性小波变换	(75)
第6章 多小波	(80)
6.1 多小波基本理论	(80)
6.1.1 多小波的多分辨分析	(80)
6.1.2 多小波的性质	(81)
6.1.3 多小波的分解与重构	(82)
6.2 多小波的构造	(83)
6.2.1 GHM 多小波的构造	(83)
6.2.2 Chui 多小波的构造	(84)
6.2.3 Hermite 三次 B 样条多小波的构造	(86)

6.3 多小波的应用	(88)
第 7 章 复小波	(89)
7.1 复小波和滤波器组	(89)
7.2 对称复小波的条件	(90)
7.3 几种复小波	(92)
第 8 章 球面小波	(94)
8.1 球面小波多分辨分析理论	(94)
8.2 球面上的小波	(94)
8.2.1 球面上的逼近算子	(94)
8.2.2 球面上的小波	(95)
8.3 球面小波算法及实现	(100)
8.3.1 直接算法	(101)
8.3.2 半快速算法	(101)
8.3.3 快速方向性算法	(101)
8.4 球面小波的应用	(102)
第 9 章 多尺度几何分析	(104)
9.1 多尺度边缘检测介绍	(104)
9.1.1 边缘的定义	(104)
9.1.2 不连续点	(105)
9.2 Curvelet 变换	(107)
9.3 分析和总结	(110)
第 2 篇参考文献	(112)

第 3 篇 典型应用

第 10 章 指纹与小波	(116)
10.1 指纹	(116)
10.2 小波变换	(120)
10.3 用小波变换进行指纹识别	(124)
10.4 指纹技术	(127)
第 11 章 小波域的数字水印	(129)
11.1 什么是水印	(129)
11.2 数字水印的难点	(129)
11.3 当前的数字水印方法	(129)

11.3.1 DCT 域水印	(130)
11.3.2 DWT 域水印	(131)
11.4 小波域内的数字水印	(132)
11.4.1 Delaware 大学提出的方法	(132)
11.4.2 Toronto 大学提出的方法	(134)
11.4.3 WaveMark	(135)
第 12 章 小波去噪	(140)
12.1 传统去噪与小波去噪	(140)
12.2 小波去噪	(142)
12.2.1 小波去噪原理	(142)
12.2.2 阈值化方法	(144)
12.2.3 常用阈值	(146)
12.3 比例萎缩去噪方法	(153)
12.4 相关法去噪	(155)
第 13 章 压缩技术	(158)
13.1 研究课题的意义	(158)
13.2 二维离散小波变换	(158)
13.2.1 二维小波的构造	(158)
13.2.2 二维小波变换的实现	(161)
13.2.3 二维图像小波变换的分解和重构	(164)
13.3 小波变换编码	(167)
13.3.1 图像编码简介	(167)
13.3.2 嵌入式零树小波编码算法(EZW)	(169)
13.3.3 EZW 解码	(177)
13.3.3 多级树集合分裂算法(SPIHT)	(179)
第 3 篇参考文献	(184)
附录 1 数学知识补充	(185)
附录 2 小波分析工具箱函数	(199)



第一篇

基础理论

第1章

从Fourier变换到小波变换

第2章

小波变换及多分辨率分析

第3章

小波基的构造

第 1 章 从 Fourier 变换到小波变换

1.1 Fourier 变换及其特点

自 1822 年 Fourier 发表《热传导解析理论》以来, Fourier 变换在信号处理领域一直起着重要的作用, 在信号处理中收到了良好的效果, 受到普遍欢迎, 是一种大众化的信号分析工具. Fourier 变换之所以如此受欢迎, 是因为它首创性地为人们提供了一个观察、了解时(空)域信号的新视角——频域分析法. 在时(空)域无法观察到的信号特性, 往往在频域会变得清晰可辨; 在时(空)域难以处理的问题, 在频域处理会变得简单易行. 信号 $f(t)$ 的 Fourier 变换和逆变换分别为

$$F(\omega) = \int_{t \in \mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.1.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \mathbb{R}} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.1.2)$$

在离散情况下, Fourier 变换可理解为将时域的信号分解为不同频率的等幅振荡的波形, 如图 1.1 所示, 而原始信号可看作是这些具有不同相位和振幅的波形的叠加. 这种频率分量表示法, 使 Fourier 变换在信号处理中具有重要的作用. 例如, 在实现信噪分离时, 如果能确定信号和噪声分别是哪些频率分量, 就可以在频域方便地实现去噪; 在数据压缩中, 如果信号数据变化平稳, 则采用 Fourier 变换会具有良好的能量集中效果, 从而达到减小数据熵值的目的.

Fourier 变换中的每一个频率分量在频域对应一个频点, 如图 1.2 所示. 可见 Fourier 变换在频域具有很好的定位效果. 与此相反的是, 每一个频率分量在时域则覆盖整个时间轴, 因此, Fourier 变换无法反映出某个频率分量发生在时域的哪个时刻, 也就是说, Fourier 变换无任何时域定位性能. 再看一个具体的例子, 式(1.1.3)为 4 个余弦波形的叠加(如图 1.3 所示):

$$\begin{aligned} x(t) = & \cos(2\pi * 10t) + \cos(2\pi * 25t) \\ & + \cos(2\pi * 50t) + \cos(2\pi * 100t) \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

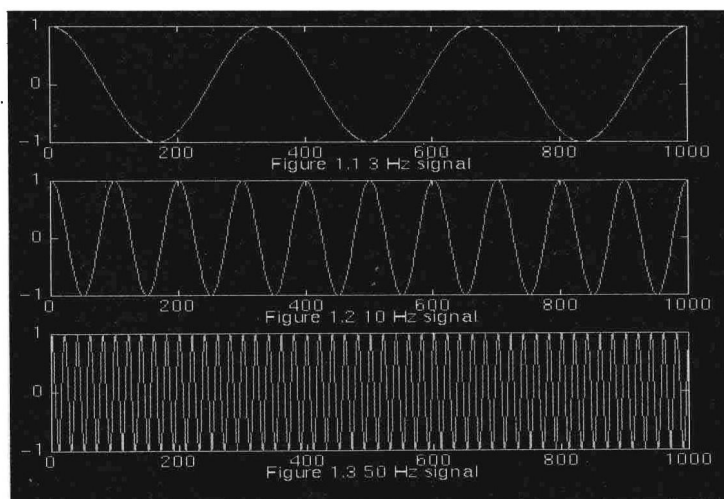


图 1.1 Fourier 变换的不同频率分量

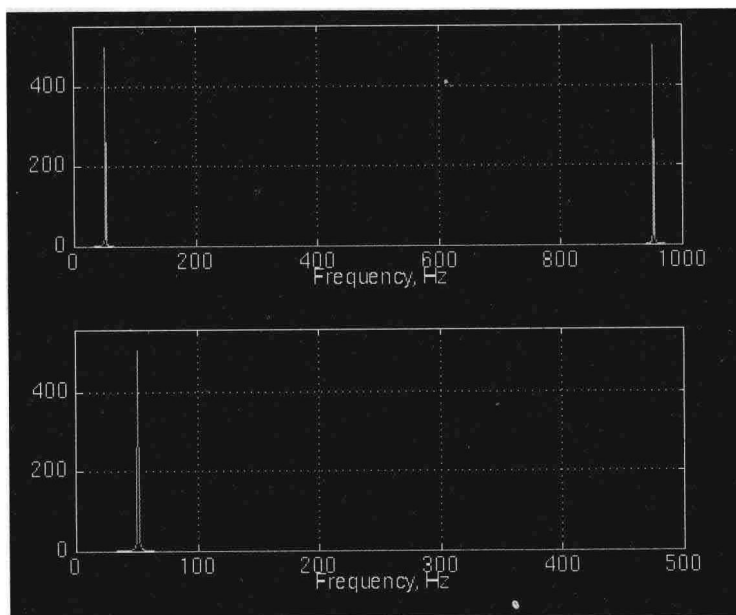


图 1.2 Fourier 变换的一个分量在频域的位置

图 1.4 为图 1.3 波形的 Fourier 变换, 从图中可以清晰可辨 4 个频率分量. 而图 1.5 是由 4 个频率分量的分段正弦信号连接而成的, 显然是非平稳信号. 其中, $0 \sim 300$ ms 为 100 Hz, $300 \sim 600$ ms 为 50 Hz, $600 \sim 800$ ms 为 25 Hz, $800 \sim 1000$ ms 为 10 Hz. 图 1.6 为分段信号的 Fourier 变换, 从图中可见 4 段正弦信号所对应的 4 个频

率分量,其中不同的振幅反映出4段波形的不同长度所带来的能量差别.图1.6和1.4相比,只是在各个频率峰值间多了一些小的“波浪”,这是由正弦信号的分段引起的,而其他方面都很接近.但从图1.3和1.5可以看出,它们是两个完全不同的信号,这种在时域的差别,在 Fourier 变换域却无法反映出来,可见 Fourier 变换无任何时间分辨率.也就是说,Fourier 变换可以确切地告诉人们某个信号是否包含特定的频率分量,却无法说明该频率分量究竟发生在哪个时间段,它只适合处理平稳信号而不适合非平稳信号.但在很多实际应用中,信号是非平稳的,而且信号的局部时间信息具有重要的意义.如语音信号、地震信号以及 ECG、EEG、EMG 信号等,此时用 Fourier 变换仅仅告诉人们是否包含某种频率成分是永远不够的,还需要最重要的时间信息,因此这些信号还需要进行分段处理,这时采用 Fourier 变换就难以取得令人满意的效果.于是,在这种实际应用需求的推动下,Gabor 于 1946 年提出了 Gabor 变换,进而又发展成为短时 Fourier 变换(STFT).

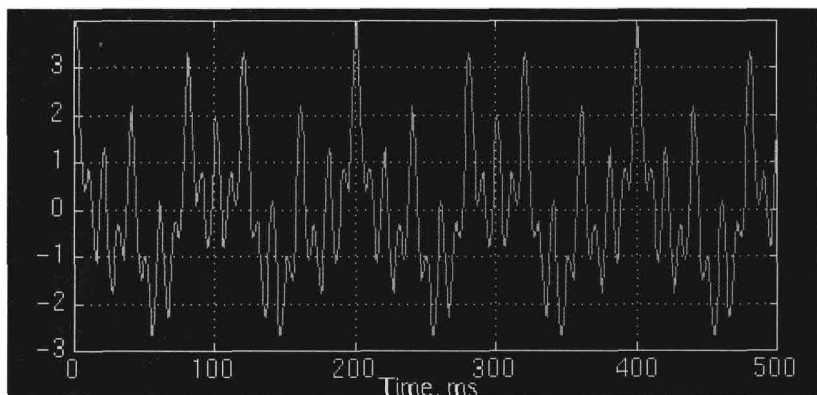


图 1.3 4 个余弦波形叠加形成的复合信号

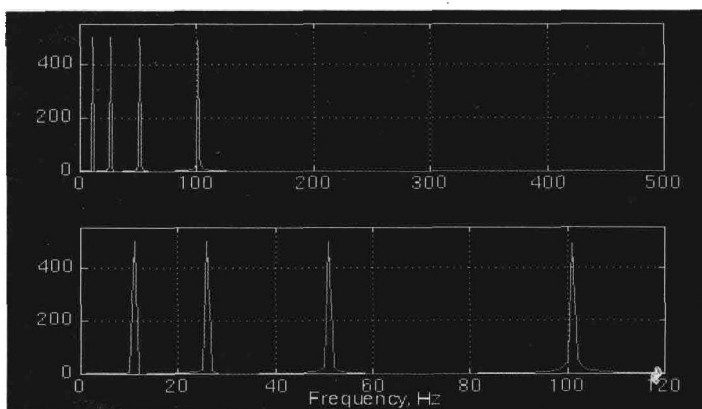


图 1.4 $x(t)$ 的 4 个频率分量

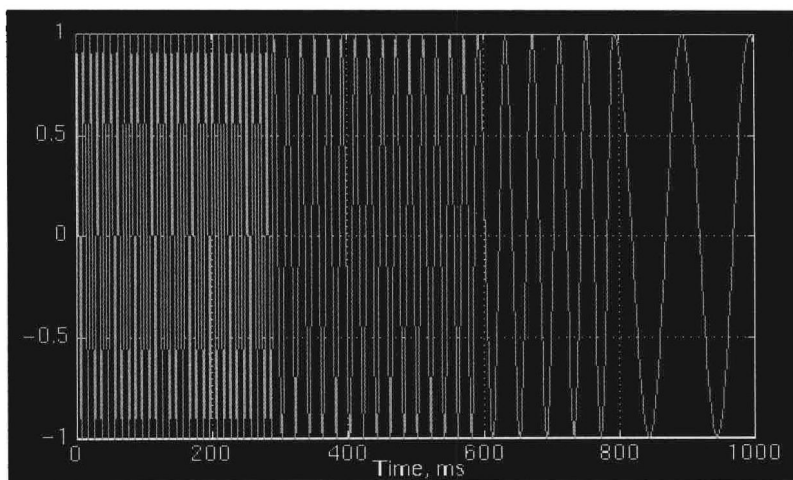


图 1.5 4 段不同频率正弦波形连接成的信号

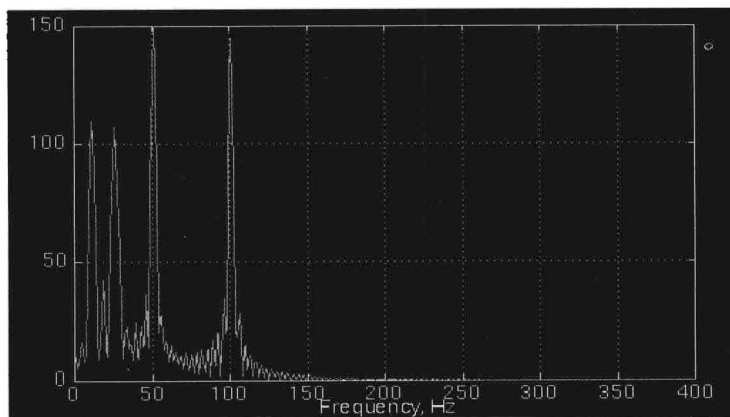


图 1.6 分段信号的 Fourier 变换

1.2 短时 Fourier 变换及其特点

由上一节的分析可知, Fourier 变换只适用于处理平稳信号. 但对于非平稳信号, 如果将其中的某些局部区间看作平稳的, 则在这些局部区间仍然可以采用 Fourier 变换. 这就是我们所知的短时 Fourier 变换, 也叫加窗 Fourier 变换, 如图 1.7 所示. 其中 $f(t)$ 为非平稳信号, $g(t)$ 为窗口函数, 则短时 Fourier 变换可表示为

$$F(\omega, \tau) = \int_{t \in \mathbb{R}} f(t) g^*(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \quad (1.2.1)$$

其中 $g^*(t - \tau)$ 表示对 $g(t - \tau)$ 取共轭。

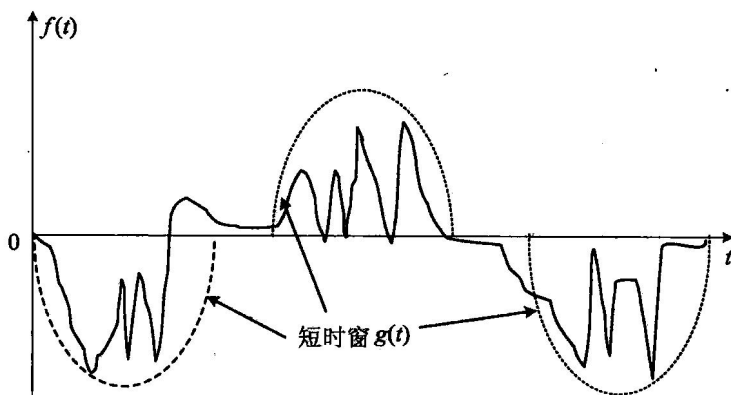


图 1.7 非平稳信号的加窗处理

从变换结果中可以看出,其中不仅包含频率信息 ω ,同时还包含时间信息 τ .可见,STFT 既有 Fourier 变换的频率分辨率又有一定的时间分辨率.它从一定程度上克服了 Fourier 变换的缺陷,可以告诉人们某个特定的频率分量发生在原始信号的哪个时间段.图 1.8 为一个非平稳信号,它由 300 Hz、200 Hz、100 Hz 和 50 Hz 共 4 段信号组成,其 STFT 如图 1.9 所示.

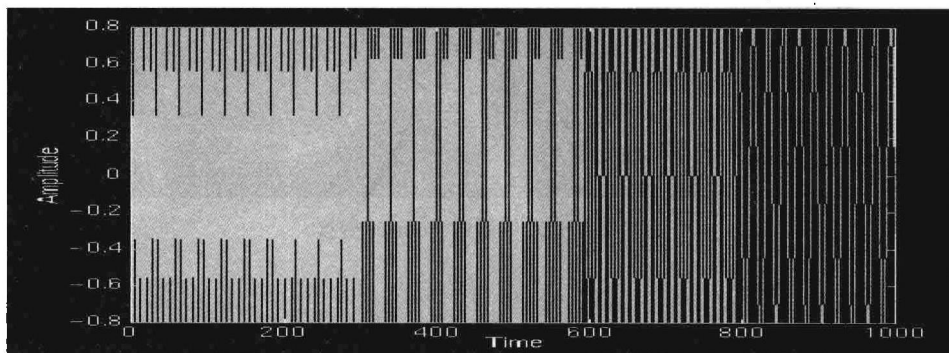


图 1.8 非平稳的分段合成信号

从图 1.9 可见 4 个峰值,它们对应着图 1.8 中的 4 个频率的分段信号,并且较精确地反映出原始分段信号在时间轴上的位置,这就体现出 STFT 的时间分辨率.可见,STFT 的时间分辨率完全由窗口 $g(t)$ 的支撑(support)长度决定. $g(t)$ 的支撑长度越短,STFT 的时间分辨率就越高;反之, $g(t)$ 的支撑越长,其时间分辨率越低,当其支撑集覆盖整个时间轴时,STFT 即蜕变为 FT. 窗口支撑长度对 STFT 的影响可

用如下的例子说明. 我们对图 1.8 的非平稳信号作短时 Fourier 变换, 并采用 Gaussian 窗口函数

$$w(t) = e^{-at^2/2} \quad (1.2.2)$$

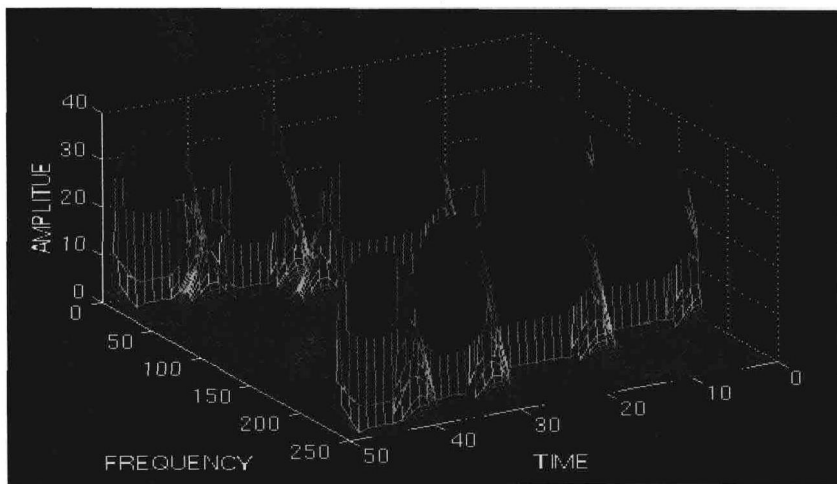


图 1.9 图 1.8 所示信号的 STFT

当 a 取不同值时, 对应的 4 个窗口函数如图 1.10 所示. 图 1.11 为第 1 个窗口对应的 STFT, 第 2 个窗口对应的 STFT 如图 1.9 所示, 图 1.12 和 1.13 分别是第 3、第 4 个窗口对应的 STFT. 由于第 1 个窗口较窄, 具有较高的时间分辨率, 因此, 图 1.11 的 4 个峰值在时间轴上基本无交叠, 但在频率轴上, 每个峰值均占据一定的频率宽度. 而第 3、第 4 个窗口越来越宽, 则其对应的 STFT 的 4 个峰值在时间轴上的交叠越来越多, 也即时间分辨率不断下降, 但在频率轴上, 每个峰值的宽度越来越窄, 即频率分辨率越来越高. 可见, 在选择 STFT 窗口的宽度时, 要同时考虑时间和频率分辨率, 要提高时间分辨率就要以牺牲频率分辨率为代价, 反之亦然. 在数学上, 这种时间和频率分辨率的矛盾可用定量的关系来描述, 这就是 Heisenberg 测不准原理.

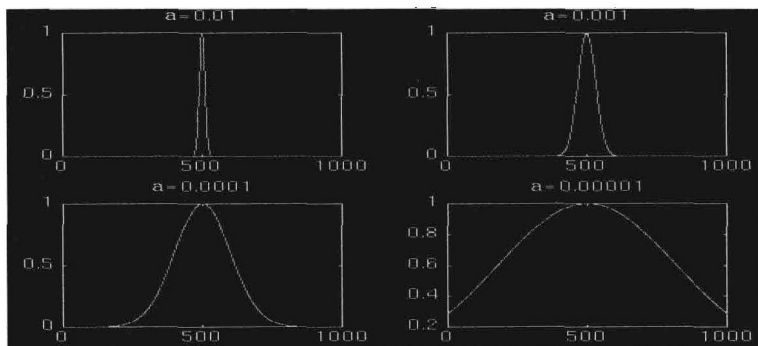


图 1.10 不同支撑长度的窗口函数

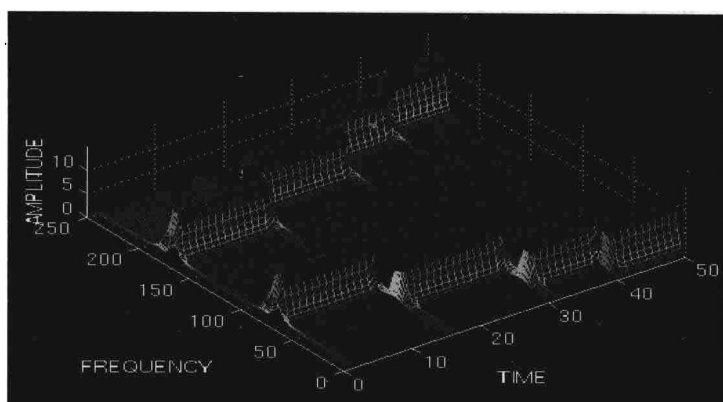


图 1.11 图 1.8 所示的 $\text{STFT}(a=0.01)$

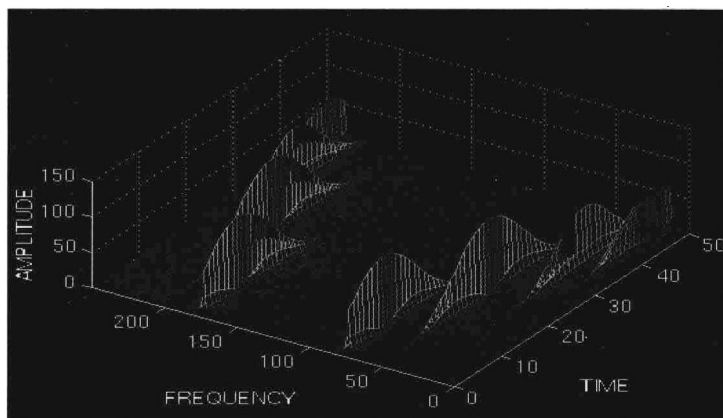


图 1.12 图 1.8 所示的 $\text{STFT}(a=0.0001)$

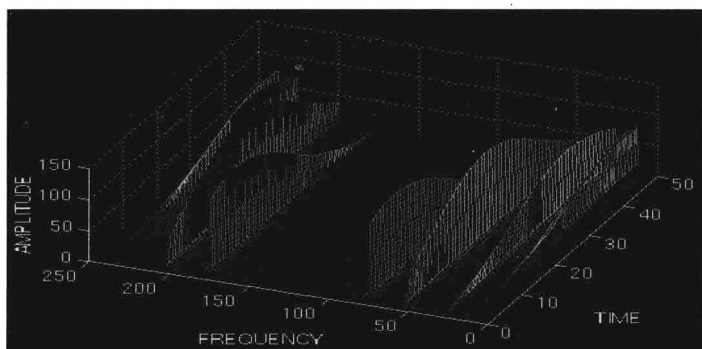


图 1.13 图 1.8 所示的 $\text{STFT}(a=0.00001)$