数学分析的内容与方法

许忠勤

贵州人民出版社

数学分析的内容和方法

许 忠 勤

贵 州 [illegible] 版 社

数学分析的内容和方法

许 忠 勤

贵州人民出版社出版发行

（贵阳市延安中路9号）

贵州新华印刷厂印刷 贵州省新华书店经销

787×1092毫米 32开本 8.25印张 170千字

1983年1月第1版 1983年1月第1次印刷

印数1—3,030

书号：7115.1260 定价：1.25元

ISBN 7-221-00079-4/G·10

前　言

本书是针对已学完"数学分析"的学生而写的，目的是为了帮助学生站在全局用更高的观点认识数学分析这门课所阐明的理论和方法。

§1 指出了数学分析研究的对象是反映变量之间相互关系的函数，说明了函数概念的实质，函数的各种表示形式，构成函数的要素，指出了容易被混淆的函数关系和函数值之间的区别。

§2 概括地罗列出数学分析的主要内容。

§3 阐明了数学分析中的主要概念和相互关系，对容易混淆的概念作了分析和比较，并举出各种反例加以说明。

§4 比较系统地总结了求极限的方法，求导数、微分、偏导数、方向导数、全微分以及高阶导数、高阶微分的方法，求不定积分、定积分、广义积分、重积分、曲线积分和曲面积分的方法。

§5 和§6 对数学分析中的理论和方法作了较全面的总结和论述，指出了极限理论、微分学的理论和积分学的理论在数学分析中的作用和地位。把数学分析的主要方法概括为极限的方法、转化的方法和反证法，进而把掌握和运用这些方法作为对学生进行能力培养、世界观和方法论教育的基本训练。

§7 指出了数学分析的主要应用范围和领域，使学生明确数学分析这门课作为数学专业的一门主要基础课，不仅

在理论上、方法上有很重要的地位，而且在物理、力学、几何等各个学科，乃至于在国民经济的许多领域都有直接的应用。

§8 主要说明数学分析尽管是一门已有几百年发展史的古典学科，虽然它的体系和结构非常严谨，内容也非常丰富成熟，但它仍然需要不断发展。以黎曼积分为例，说明黎曼积分对微积分基本公式的应用，对在积分号下进行极限运算、求导运算、求积运算都要受到很大的限制，而且黎曼可积的函数空间对距离是不完备的。这都说明必须建立新的积分概念和理论，使数学分析进一步得到发展。

本书的结构打乱了一般数学分析教科书的顺序，按照数学分析的内容和方法分别进行了总结和概括，因此，它不可能叙述得很全面细致。为了使不同程度的学生都能读懂，本书力求叙述得通俗、简明、扼要。我希望本书作为一本教学参考书，对提高数学分析课的教学质量能起一定的促进作用。

本书在编写过程中得到了数学界的前辈、著名的函数论专家、北京大学数学研究所所长程民德教授和原北京大学数学系廖可人副教授的热情支持和帮助。程先生亲自审阅了书稿的全文，并对不妥之处作了修改。廖先生曾就书稿的内容多次同我讨论，成书以后又对书稿的内容进行了细心的审阅和修改。本书编写时还参考了北京大学数学系李正元副教授在北大数学系讲授数学分析课时的讲稿，并得到李正元同志不少帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢。

由于本人教学经验和水平都有限，书中难免有错误或不妥之处，欢迎读者批评和指正。

编者

1986.元.28

目　录

§1　数学分析的研究对象

恩格斯曾经指出："数学中的转折点是笛卡尔变数，有了变数运动进入了数学，有了变数辩证法进入了数学"．数学分析作为数学专业的一门主要基础课，正是研究变量的一门学科，它研究的对象是反映变量与变量之间相互关系的函数．

一、函数概念是数学分析中最基本的一个概念，它的实质是反映量与量之间或者说是欧氏空间中的点与点之间确定的对应关系．实数与实数之间的对应关系为一元函数，记为

$$y=f(x),\ x\in X\subset R^1,\ y\in Y\subset R^1$$

R^m 空间的点即向量与实数之间的对应关系为多元数值函数，也记为

$$y=f(x),\ x\in X\subset R^m,\ y\in Y\subset R^1$$

R^m 空间的向量与 R^l 空间的向量之间的对应关系为向量函数，也可记为

$$y=f(x),\ x\in X\subset R^m,\ y\in Y\subset R^l$$

它表示 l 个 m 元函数的函数方程组．前两者可作为第三者的特殊情形，因而也可以说数学分析研究的对象是向量函数．而一元函数则是研究的基础．

二、确定一个函数有两个要素，一个是变量之间的对应关系（它可以用多种方式表示）；第二个是表示自变量变化范

围的定义域。而表示因变量变化范围的值域则是派生的，对应关系和定义域给定以后，函数及其值域也就完全被确定了，要判断两个及两个以上的函数是否相同，只要看它们各自的对应关系和定义域是否都相同。

例 1 给定函数

$$f(x)=\sqrt{x^2},\ g(x)=|x|,\ h(x)=x$$

显然 $f(x)\equiv g(x)$，而 $f(x)\not\equiv h(x)$，因而 f 和 h 反映的对应关系不同。

例 2 给定函数

$$f(x)=2\lg x,\ g(x)=\lg x^2$$

显然它们不是一个函数，因为它们的定义域各不相同。

读者可以举出例子说明：对应关系和值域或者定义域都不能作为确定函数关系的基本要素。

三、变量之间是否有函数关系，要看是否存在一个对应规则，使得其中一个量（或欧氏空间的一个向量）给定以后，另一个量（或欧氏空间的一个向量）就能唯一被确定。我们常常是对某种具体形式的函数进行研究。在数学分析中最常见的函数表达式有下面几种：

1．初等函数，即由常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数这六种基本初等函数，经过加、减、乘、除以及复合等五种运算所得到的函数。

初等函数是数学分析中研究得最多的也是最重要的一类函数。读者应对上述基本初等函数的形式、特征、几何图形非常熟悉。

2．用下列函数方程或函数方程组

$$F(x,y)=0,\ x\in X\subset R^m, y\in Y\subset R^l$$

或 $F_i(x,y)=0$，$x\in X\subset R^m$，$y\in Y\subset R^l$

$(i=1,2,\cdots,l)$

表示的隐函数。

3．用函数级数

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x),\ x\in X\subset R^m$$

表示的函数。

4．用参变量积分

$$F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)dy,\ x\in X\subset R^m$$

表示的函数。

5．用分块表达式定义的函数

$$F(x)=f_k(x),\ x\in X_k\subset R^m$$

$k=1,2,\cdots,N$，它的定义域为：$X=\bigcup_{k=1}^{N}X_k$。

函数还可以有其他的表示形式，例如，一阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases}y'=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}\qquad (x,y)\in D\subset R^2$$

当方程右侧函数满足一定条件时，它的解在存在区间表示一个函数。一切常或偏微分方程的定解问题，若解存在，都表示一个函数。可见，函数的表达形式是多种多样的，我们不要把自己的视线仅仅局限在函数的某一表现形式上，更不要

只局限于初等函数。例如，变上限积分$\int_0^x e^{-x^2}dx$表示一个x的函数，又如微积分的创立者之一莱布尼兹（Leibniz）在1686年曾经提出求解微分方程

$$y' = x^2 + y^2$$

的问题，他说这个方程他不会解。从形式上看这个方程很简单，因此，它曾经吸引了许多数学工作者，他们都试图来解决这个大数学家不会解的问题。大约过了一个半世纪，到1838年，柳维尔（Liouville）从理论上证明了这个方程的解是存在的，但解不能用初等函数来表示。

四、函数概念是反映变量之间相互关系的概念，一个简单而重要的事实是：一个量在某一个过程中扮演的是常量的角色，而在另一过程中扮演的是变量的角色；在某个过程中扮演自变量的角色，而在另一过程中又扮演因变量的角色，它们之间在一定条件下可以互相转化。例如函数$u=f(x,y)$，考虑它对x的积分：$\int_a^b f(x, y)dx$，在对x积分的过程中，x是变量，而y被看成是固定不变的常量，但是，若要研究这个积分的结果，即由此参变积分所确定的函数的性质，y又是变量了。又例如，在研究函数$u=f(x)$（$x\in X\subset R'$）和$x=\varphi(t)$（$t\in T\subset R'$）的复合函数时，在前一关系式中x为自变量，后一关系式中x为因变量，复合过程中x成为中间变量了。明确了这个事实以后，就可以正确地认识和把握在数学分析中某些量变与不变的规律，就可以学会在变化的过程中研究某些正在变化的量，或者处在相对不变状态下的量。在运动、变化的过程中掌握事物的本质。

五、数学分析这门课的任务就是要研究初等函数和上述各种形式表示的函数的某些性质，如极限的存在性、连续性、可导性、可积性等；研究函数的各种运算，如极限的运算（包括求和运算）、微分学的运算、积分学的运算等等。

§2 数学分析的基本内容

“数学分析”这个名称是由旧名称“无穷小分析”演变而来的，而无穷小分析的理论和方法也就是极限的理论和方法．由此，可以导出两种基本运算，即微分运算和积分运算，形成两大基本理论体系，即微分学和积分学。这样，现在数学分析的基本内容包括如下三部分：极限的理论和方法，微分学的理论和方法，积分学的理论和方法．具体归纳如下：

一、极限和级数

1．极限论初步（包括连续函数及其性质）．
2．极限再论（包括实数理论）．
3．数值级数．
4．函数级数（包括幂级数和傅立叶级数）．

二、微 分 学

1．一元函数的微分学

（1）导数与微分（概念和计算）．

（2）微分学的基本定理。

（3）微分学的应用（用导数研究函数，函数作图；用导数求极限；罗必达（Hospitale）法规；用导数解决实际问题：极值问题）。

（4）泰勒（Taylor）公式

2．多元函数的微分学

（1）偏导数、全导数、方向导数和全微分。

（2）多元函数的微分法（包括隐函数的微分法）。

（3）多元微分学的应用（包括几何应用和极限问题）。

（4）多元泰勒公式。

三、积　分　学

1．一元函数的积分学

（1）不定积分。

（2）定积分（包括定积分的概念和性质、定积分的计算和微积分基本公式、定积分的应用）。

（3）广义积分（包括无穷积分和瑕积分）。

2．多元函数的积分学

（1）重积分。

（2）曲线积分。

（3）曲面积分和场论。

（4）参变量积分。

§3 数学分析的基本概念和相互关系

在数学分析中，最基本的概念是函数概念、极限概念、连续和一致连续概念、导数和微分概念、积分概念、收敛和一致收敛概念。函数概念在§1中已经说明，下面来说明其他概念及它们之间的相互关系。

一、极限概念

这里指的极限包括序列的极限和一元与多元函数的极限，我们可以从下面几个方面去理解它。

1.极限概念是数学分析中最重要的基本概念。因为在分析中，其他许多重要的概念都是用极限定义的，例如函数的连续和一致连续性、序列和级数的敛散性和一致收敛性、函数的可（偏）导性和可积性等都是直接用某种极限的存在性来定义的，函数的可微性实质上也是用极限来定义，它的等价定义是：函数 $f(x)$ 在 x 可微的充分必要条件是存在常数 A，使得

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)-A\triangle x}{\triangle x}=0$$

如果 $f(x)$ 表示一个 m 元函数，A 表示一个 m 维的常向量，

$\triangle x$表示自变量的全增量，它也是m维的向量，那么，这个多元函数在x处的全微分存在性也可用下面极限定义：

$$\lim_{|\triangle x|\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)-A\cdot\triangle x}{|\triangle x|}=0$$

其中$A\cdot\triangle x$表示两个向量的内积，$|\triangle x|$表示向量$\triangle x$的模，极限式表示一个m元的全面极限，可见，在数学分析中，几乎所有重要概念的定义都离不开极限。

另一方面，从极限概念出发所形成的极限理论是整个数学分析的基础，从极限概念出发产生的极限方法是数学分析的基本方法和基本训练，这些将在后面专门阐明。

2.所谓极限，简单明了地讲是指一个序列（或函数）当序号（或自变量）按一定规律变化时，序列值（或函数值）变化的趋势，若它的变化趋势是无限趋近于一个常量，则称极限存在；若它的变化趋势是其绝对值无限变大，或者它本身没有一个确定的趋势，不趋于任何一个常量，则称极限不存在。

序列极限　$\lim x_n=a$的几何特征是：在以a为中心的任何一个邻域$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$内，都包含$\{x_n\}$中无穷多个元素，而在邻域的外面，仅含有$\{x_n\}$中有穷多个元素。

函数极限　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的几何特征是：任给一个以直线$y=A$为中心，$2\varepsilon$为宽的带子，都存在一个以$x_0$为中心的邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，当自变量$x$进入此邻域，曲线$f(x)$进入上述带子里。

3.极限概念从朴素的直观描述发展到数量上的精确刻划，即用“ε-δ”或“ε-N”语言来描述极限，经过了漫长的历史过程。从十七世纪牛顿（Newton）和莱布尼兹创立微积分，

到十九世纪柯西（Cauchy）完成它，才对极限概念作了精确的描述，中间大约经过了两个世纪。实践证明这是对极限实质最确切最科学的描述。把各种情形归结起来，可按下面六种情形描述序列和函数的极限。

（1）用“ε-N”语言描述序列的极限：$\lim x_n = a$。

（2）用“E-N”语言描述序列趋于无穷：$\lim x_n = \infty$，$\lim x_n = +\infty$，$\lim x_n = -\infty$。共有三种情形。

（3）用“ε-δ”语言描述连续变量 x 趋于定数时，函数的极限：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，以及单侧左右极限：$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$。共有三种情形。

（4）用“E-δ”语言描述连续变量 x 趋于定数时，函数趋于无穷：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$和趋于正负无穷：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$，还有相应的单侧左右极限：$\lim\limits_{x \to x_0\pm 0} f(x) = \infty$，以及趋于正负无穷：$\lim\limits_{x \to x_0\pm 0} f(x) = \pm\infty$。共有九种情形。

（5）用“ε-Δ”语言描述连续变量 x 趋于无穷时，函数的极限：$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，以及单侧极限：$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$。共有三种情形。

（6）用“E-Δ”语言描述连续变量 x 趋于无穷时，函数趋于无穷：$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$，还有单侧无穷极限：$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$ 和 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$。共有九种情形。

这里统一用 ε 作为序列值或函数值与极限值任意接近的标准，用 E 作为它们任意大或它们的绝对值（模）任意大的

标准，而用N或Δ作为序号n或连续变量x充分大的标志，用δ作为连续变量x和它的趋近值充分接近的标志。这样描述极限，无论是用它论证极限的存在（这时ε或E必须预先任给），还是要利用极限存在去论证其他命题（这时ε或E可以根据需要取定），都有很大的方便和自由。

例1 证明：当$x_n \neq 0$时，x_n是无穷小量的充分必要条件是$1/x_n$是无穷大量。

证明 证"必要性"：

已知x_n是无穷小量，所以对$\forall E>0$，可取$\varepsilon=1/E$，则$\exists N>0$，使当$n>N$时，有$|x_n|<\dfrac{1}{E}$，$\Rightarrow |1/x_n|>E$，这说明$1/x_n$是无穷大量。

证"充分性"：

已知$1/x_n$是无穷大量，所以对$\forall \varepsilon>0$，可取$E=1/\varepsilon$，则$\exists N>0$，使当$n>N$时，有$|1/x_n|>1/\varepsilon$，$\Rightarrow |x_n|<\varepsilon$，这说明$x_n$是无穷小量。

4.对于l维点列和m元函数的极限，在形式上有与序列和一元函数的极限相同的描述法。

即当$x_n \in R^l$，$A \in R^l$时，

（1）可用"ε-N"语言描述点列的极限：$\lim x_n = A$。应该注意的是，这里$|x_n - a|<\varepsilon$表示l维点列x_n和l维固定点A的差的模小于ε，当$l=1$时，模就是绝对值，它们都表示动点x_n和定点A的距离可以任意小。

（2）可用"E-N"语言描述点列趋于无穷：$\lim x_n = \infty$。这里$|x_n|>E$表示点列x_n的模大于E。与一维情形相同，它们都表示动点x_n和原点的距离可以任意大。