■ 全国高等农林院校“十一五”规划教材辅导丛书

概率论与数理统计

学习指导

张海燕　孙国红　编著

南开大学出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材　辅导丛书

概率论与数理统计学习指导

张海燕　孙国红　编著

南开大学出版社
天　津

内容简介

本书是大学生学习概率论与数理统计的指导书和报考研究生的必备参考书，更是有志于掌握概率论与数理统计方法的读者一本极好的指导书.

本书内容为随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与一元线性回归分析、多元线性回归分析.采用以章节为序的方法，对各章每一节内容进行了归纳提高、释难解惑，选编了大量经典例题，并设计了许多新颖题目.实用性、应试性强是本书的最大特点.书末附有四套综合模拟试题(含答案与提示)，便于读者自测.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导 / 张海燕，孙国红编著.
—天津：南开大学出版社，2010.2 (2010.8重印)
ISBN 978-7-310-03353-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①张…②孙… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 016566 号

南开大学出版社出版发行
出版人：肖占鹏
地址：天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码：300071
营销部电话：(022)23508339 23500755
营销部传真：(022)23508542 邮购部电话：(022)23502200
*
天津泰宇印务有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
2010 年 2 月第 1 版 2010 年 8 月第 2 次印刷
787×1092 毫米 16 开本 19 印张 482 千字
定价：30.00 元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换，电话：(022)23507125

前　言

概率论与数理统计是专门研究随机现象及其数量规律的一个数学分支，在生物、医学、经济管理、农林以及其他高新技术领域有着广泛的应用. 这门课程被列入高等院校各专业最重要的基础课程之一. 学好这门课程的关键是将基本概念、定理及方法和实际例子联系起来，掌握用概率统计的语言来描述实际问题，然后选择合适的概率统计模型及正确的定理、公式解决问题，最终达到提高分析问题和解决问题的能力.

本书采用以章节为序的方法，归纳了这门课程中几乎所有题型，精心选编和分析了大量的经典例题，并设计了许多新颖的例题、习题. 最后还提供了四套完整的模拟试题. 各章节具体体系如下：

重要概念、公式及结论　列出基本概念、重要定理和主要内容，突出必须掌握或考试出现频率高的核心内容.

释难解惑　对重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，使读者掌握问题的本质.

典型例题分析　尽可能全面归纳这门课程所涉及的题型，逐一进行分析并给出了解题方法和规律. 同时，借助于许多重要的经典例题的评注，帮助读者更好地把握典型例题的典型处理方法和可能的各种延伸，从而取得举一反三、触类旁通的功效.

考研真题精选　精选历年研究生入学考试试题中具有代表性的例题进行详尽的分析和解析，使读者更好地从中了解考研的要求、考点与动向.

习题精选精解　对主流教材的重要习题做出解答，以便读者对照和分析. 值得提醒的是，解题能力的提高需要亲自动手，通过本身的实践，才能真正得到锻炼，从而不断提高解题能力.

模拟试题　通过自测旨在进一步强化解题训练，反映考试的重点、难点，培训综合能力和应变能力，巩固和提高复习效果.

本书不仅是广大学生的指导书、教师教学的参考书，而且也是硕士研究生入学考试必备的一本复习用书，实用性、应试性强是本书的特点.

参加本书编写的有张海燕（第一、二、三章）、孙国红（第四、七、八章）、金惠兰（第五、六章），张振荣（第九、十章及所有综合模拟测试题）.

本书在编写、出版过程中，得到张孝义老师以及南开大学出版社的热心支持与帮助，在此表示衷心的感谢.

编写本书时参阅了许多书籍，引用了许多经典的例子和解题思路，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢.

限于编者水平，书中难免有不妥之处，欢迎广大读者、专家和同行批评指正.

编　者
2009 年 12 月于天津农学院

目 录

第一章　随机事件及其概率

第一节　随机事件及其运算

重要概念、公式及结论

一、随机事件及其运算

1. 随机试验

具有以下三个特点的试验称为随机试验：

(1)可以在相同的条件下重复进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3)进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.通常将随机试验用 E 表示.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 Ω，样本空间中的每个元素称为样本点.

3. 随机事件

随机试验 E 的每一个可能结果称为随机事件，简称事件.

4. 事件的关系和运算

(1)若事件 A 的发生必导致事件 B 的发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

(2)事件 A 与事件 B 中至少有一个发生，称为事件 A 与 B 的并，记作 $A\cup B$；$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots$ 称为可列个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的和事件.

(3)事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为事件 A 与 B 的交(或积)，记作 $A\cap B$ 或 AB；$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件；$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k=A_1\cap A_2\cap A_3\cdots$ 称为可列个事件 $A_1,A_2,A_3\cdots$ 的积事件.

(4)事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

(5)若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的或互斥的.

(6)若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，又称事件 A 与事件 B 互为对立事件，A 的对立事件记为 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=\Omega-A$. 显然，$A\overline{B}=A-B=A-AB$.

(7)事件 A,B,C 满足以下运算规律：

(i)　交换律　$A\cup B=B\cup A$；　$A\cap B=B\cap A$.

(ii)　结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(iii)　分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(iv) 对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

释难解惑

【问 1.1】怎样区分互逆事件和互斥事件？

【答】事件 A 与事件 B 互斥指的是两者不可能同时发生，而事件 A 与事件 B 互逆指的是 A 与 B 不但不能同时发生，还需 A 与 B 中有一个事件必发生. 即

A 与 B 互斥$\Leftrightarrow AB=\varnothing$；

A 与 B 互逆$\Leftrightarrow AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega$.

【问 1.2】样本空间的选取是否唯一？

【答】样本空间的选取一般不唯一. 在解题的过程中，选取恰当的样本空间，可简化计算，参见第三节例 1.10 方法二.

典型例题分析

题型Ⅰ　用简单事件通过运算表示复合事件

【解题提示】 *方法一　将复合事件通过运算用其等价事件表示.*

方法二　利用差化积、对偶律、分配律等运算求复合事件表示式.

【例 1.1】设 A,B,C 为三事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件.

(1) A 发生，B 与 C 不发生.

(2) A 与 B 都发生，而 C 不发生.

(3) A,B,C 中至少有一个发生.

(4) A,B,C 都发生.

(5) A,B,C 都不发生.

(6) A,B,C 中不多于一个发生.

(7) A,B,C 中不多于两个发生.

(8) A,B,C 中至少有两个发生.

【解】(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B+C)$.

(2) $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$.

(3) $A\cup B\cup C$.

(4) ABC.

(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$.

(6) $\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{C}\,\overline{A}$.

(7) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$.

(8) $AB+BC+CA$ 或 $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$.

【例 1.2】设 A,B,C 为任意三个随机事件，则以下命题正确的是(　　).

(A) $(A\cup B)-B=A-B$　　　(B) $(A-B)\cup B=A$

(C) $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$　　　(D) $A\cup B=A\overline{B}\cup B\overline{A}$

【解】由于 $(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}=A-B$，故应选 (A)，其余三个为错，原因在于

$(A-B)\cup B=(A\overline{B})\cup B=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=A\cup B$,

$(A\cup B)-C=(A\cup B)\overline{C}=A\overline{C}\cup B\overline{C}=(A-C)\cup(B-C)$,

$A\cup B=A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup AB.$

第二节　随机事件的概率及性质

重要概念、公式及结论

一、随机事件的概率的公理化定义

设 E 为随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(*)$满足下列条件：

(1)对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2)$P(\Omega)=1$；

(3)设 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容事件，即对 $i\neq j$，有 $A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i,j=1,2,\cdots)$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

二、随机事件概率的性质

1. $P(\varnothing)=0.$

2. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

3. $P(\overline{A})=1-P(A).$

4. 对于任意事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

特别地，当 A 与 B 互不相容时，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

对于三事件 A,B,C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

5. 对于任意事件 A,B 有

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB),$$

特别地，当 $B\subset A$ 时，有

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

三、古典概型

如果随机试验 E 具有下列特点：

(1)试验 E 只产生有限个基本事件；

(2)试验 E 中每个基本事件发生的可能性相同，

则称这种随机试验为古典概型. 对于古典概型，事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 中包含的基本事件总数}}$$

释难解惑

【问 1.3】如何理解概率的公理化定义？

【答】苏联大数学家柯尔莫哥洛夫于 1933 年成功地将概率论实现公理化. 前面我们曾指出：事件与试验相连，试验的每个结果称为事件，与此相应，在柯氏的公理化体系中引进一个抽象的集合 Ω，其元素 ω 称为基本事件；一个事件是由若干个基本事件构成的，与此相应，在柯氏公理体系中考虑由 Ω 的子集构成的一个集类 $\mathscr{F}$，$\mathscr{F}$ 中的每个成员就称为“事件”. 事件有概率，其大小随事件而异，换言之，概率是事件的函数，与此相应，在柯式公理体系中，引进一个定义在 $\mathscr{F}$ 上的函数 P，对 $\mathscr{F}$ 中任一成员 A，$P(A)$ 之值理解为概率. 柯氏公理体系对此函数 P 加上几条要求(即公理)：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) $P(\varnothing)=0$；

(4) 加法法则，即对 $i\neq j$，有 $A_i\cap A_j=\varnothing\ (i,j=1,2,\cdots)$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

我们举一简例说明概率的公理化定义的实现：掷一颗质地均匀的骰子，观察出现的点数. 集合 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 由 6 个元素构成，反映掷骰子试验的 6 个基本结果. 作为 $\mathscr{F}$，在本例中包括 Ω 的所有可能子集，故 $\mathscr{F}$ 有 $2^6=64$ 个成员，即该随机试验产生 64 个事件，此时概率函数 P 定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含点数}}{6},$$

如 $A=\{1,2,3\}$，即表示出现的点数小于 4 这一随机事件，则

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

典型例题分析

题型Ⅰ　由已知事件的概率求出另外一些与之有关系的事件的概率

【例 1.3】设 A,B 互斥，且 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，求 $P(AB)$，$P(A\overline{B})$，$P(A\cup\overline{B})$，$P(\overline{A}-B)$.

【解】(1) $P(AB)=P(\varnothing)=0$.

(2) 由 $A=AB+A\overline{B}$ 得到 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$，故

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{3}.$$

(3) $P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

(4) $P(\overline{A}-B)=P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}})=1-P(\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}})=1-P(A\cup B)$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

【例 1.4】设 A,B 满足 $A\subset B$，且 $P(A)=0.1$，$P(B)=0.5$，求 $P(AB)$，$P(A+B)$，$P(\overline{A}\,\overline{B})$，$P(A\overline{B})$.

【解】因 $A\subset B$，故 $AB=A$，$A+B=B$，从而

$$P(AB)=P(A)=0.1;\quad P(A+B)=P(B)=0.5.$$

又由 $A\subset B$ 得到 $\overline{A}\supset\overline{B}$，故 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{B})=1-P(B)=0.5$.

因 $A\subset B$，$B\overline{B}=\varnothing$，故 $A\overline{B}=\varnothing$，从而 $P(A\overline{B})=0$.

题型Ⅱ　古典概型

【例 1.5】两封信随机地投入四个邮筒，求前两个邮筒内没有信及第一个邮筒内只有一封信的概率.

【解题提示】*在投信问题中，一个邮筒可以同时投入几封信，这是相异元素允许重复的问题.将 m 封信随机地投入 n 个邮筒内，共有 n^m 种不同的投法，即基本事件总数为 n^m.*

【解】将两封信随机地投入四个邮筒，共有 4^2 种投法，即基本事件总数为 4^2.

(1)设事件 $A=\{$前两个邮筒内没有信$\}$，两封信只能投入后两个邮筒，共有 2^2 种投法，故 A 所包含的基本事件数为 $2^2=4$，于是

$$P(A)=\frac{4}{4^2}=0.25.$$

(2)设事件 $B=\{$第一个邮筒只有一封信$\}$，这封信的选法有 2 种，另一封信可投入其余三个邮筒，有 3 种投法，故 B 包含的基本事件数为 $2\cdot 3=6$，于是

$$P(B)=\frac{6}{4^2}=\frac{3}{8}=0.375.$$

【例 1.6】n 双相异的鞋共 $2n$ 只，随机地分为 n 堆，每堆 2 只，求“各堆都自成一双鞋”这个事件 A 的概率.

【解】把这 $2n$ 只鞋自左至右排成一列(排法有 $(2n)!$ 种)，然后，把处在 1、2 位置的作为一堆，3、4 位置的作为一堆，等等.为计算使事件 A 发生的排列法，注意第 1 位置可以是这 $2n$ 只鞋中的任一只，其取法有 $2n$ 种.第 1 位置取定后，第 2 位置只有一种取法，即必然取与第 1 位置的鞋配成一双的那一只.依此类推，可知奇数位置依次有 $2n$，$2n-2$，$2n-4$，…，2 种取法；而偶数位置则都只有 1 种取法，所以，事件 A 包含的基本事件数为 $2n(2n-2)\cdots 2=2^n n!$，故

$$P(A)=\frac{2^n n!}{(2n)!}.$$

【例 1.7】从 1，2，…，10 共 10 个数中任取一数，设每个数以 1/10 的概率取中，取后放回，先后取 7 个数，求下列事件的概率：

(1)$A_1=\{$7 个数全不相同$\}$；

(2)$A_2=\{$不含 10 和 1$\}$；

(3)$A_3=\{$10 恰好出现两次$\}$；

(4)$A_4=\{$10 至少出现两次$\}$.

【解】样本空间的样本点总数(基本事件总数)为 10^7.

(1)A_1 所包含的样本点总数为 10 个相异元素里每次取出 7 个相异元素的排列，因此 A_1 所包含的样本点总数为 A_{10}^7，故

$$P(A_1)=\frac{A_{10}^7}{10^7}=0.06048.$$

(2)A_2 所包含的样本点总数为从 8 个相异元素里作允许重复的 7 元排列，因此 A_2 所包含的样本点总数为 8^7，故

$$P(A_2)=\frac{8^7}{10^7}\approx 0.2097.$$

(3)10 恰好出现两次，可以是 7 次取数中的任意两次，有 C_7^2 种取法；其余的 5 次，每次可

以剩下的 9 个数中任取，共有 9^5 种取法，故

$$P(A_3)=\frac{C_7^2\cdot 9^5}{10^7}\approx 0.1240.$$

(4)A_4 的逆事件为 $\overline{A}_4=\{10$ 仅出现一次或一次也不出现$\}$，显然有利于 $\overline{A}_4$ 的基本事件数为 $9^6C_7^1+9^7$，故

$$P(\overline{A}_4)=\frac{9^6C_7^1+9^7}{10^7}\approx 0.8503,$$

所以 $$P(A_4)=1-P(\overline{A}_4)=0.1497.$$

【例 1.8】一部 4 卷文集随便放在书架上，问各卷自左向右的卷号恰好为 1、2、3、4 的概率是多少？

【解】基本事件总数为 $A_4^4=4!$，设 A 表示事件"各卷自左向右的卷号为 1、2、3、4"，则 A 包含的基本事件数只有 1 个，故

$$P(A)=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}.$$

题型Ⅲ 几何概型的有关计算

【解题提示】解答几何概型问题，一般包含四个步骤：(一)明确问题的性质．几何概型的特征：(1)样本空间包含无穷多个样本点；(2)各样本点的发生为等可能的．(二)明确具有等可能性的几何元素是什么．(三)用几何区域(如区间、平面区域、空间区域等)表示其基本事件的总和．(四)求出几何区域(用字母 G 表示)及表示随机事件 A 的几何区域(用字母 G_A 表示)的测度(即区间求长度、区域求面积、空间区域求体积等)．(五)求出 A 的概率为 $P(A)=\dfrac{L(G_A)}{L(G)}$.

【例 1.9】甲、乙两人相约 7 点到 8 点在某地会面．先到者等候另一人 20 分钟，过时即离去．试求两人能会面的概率．

【解】以 7 点作原点，分钟为单位，把甲、乙到达时间 x,y 构成的点 (x,y) 标在直角坐标系上，则图 1.1 中的正方形 $OABC$ 为全部可能的结果之集．甲、乙两人在 7 点到 8 点间的某时刻到达可以理解为 (x,y) 落入该正方形内任一点都是等可能的．只有点 (x,y) 落在图中的多边形 $OFGBHI$ 内时，两人才能会面，即 $|x-y|\leqslant 20$.

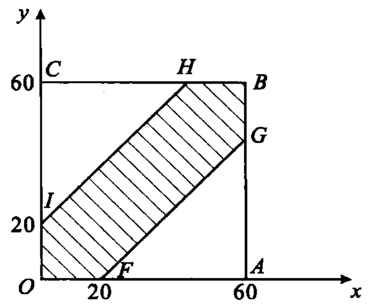

图 1.1

于是 $G=$ 正方形 $OABC$，$G_A=$ 平面区域 $OFGBHI$，$L(G)=60^2$，$L(G_A)=60^2-40^2$，故

$$P(A)=\frac{L(G_A)}{L(G)}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

第三节 条件概率与乘法公式

重要概念、公式及结论

一、条件概率

设 A,B 为两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

二、乘法公式

1. 设 $P(A)>0,P(B)>0$,则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

2. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geqslant 2$,且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

释难解惑

【问 1.4】$P(B|A)$与 $P(AB)$有何区别?

【答】$P(AB)$表示事件 A 与 B 同时发生的概率,$P(B|A)$表示在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.它们的计算方法如下:

$$P(AB)=\frac{AB\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{样本空间所含基本事件总数}};$$

$$P(B|A)\xlongequal{\text{方法一}}\frac{P(AB)}{P(A)}\quad(\text{当 }P(A)>0\text{ 时}),$$

$$\xlongequal{\text{方法二}}\frac{\text{事件 }B\text{ 在 }\Omega_A\text{ 中所含的基本事件数}}{\text{缩减的样本空间 }\Omega_A\text{ 中所含基本事件总数}}.$$

典型例题分析

题型Ⅰ　求条件概率

【解题提示】求条件概率的方法有以下几种:(1)先求 $P(A),P(AB)$,再求 $P(B|A)$;(2)根据条件概率的直观意义求解;(3)缩减样本空间法;(4)利用条件概率的性质求解.

【例 1.10】掷两颗骰子,在第一颗骰子出现的点数被 3 整除的条件下,求两颗骰子出现的点数之和大于 9 的概率.

【解】方法一　设 A 表示"第一颗骰子出现的点数被 3 整除",B 表示"两颗骰子出现的点数之和大于 9",则 AB 所含的样本点为$(6,4),(6,5),(6,6)$,从而有

$$P(A)=\frac{C_2^1\times C_6^1}{6^2}=\frac{1}{3},\quad P(AB)=\frac{3}{6^2}=\frac{1}{12},$$

故

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{4}.$$

方法二　用缩减样本空间法求 $P(B|A)$,因事件 A 已发生,故缩减的样本空间为

$$\Omega_A=\{(3,1),(3,2),\cdots,(3,6),(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)\},$$

共 12 个样本点,其中事件 B 含有 3 个样本点,故

$$P(B|A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

【例 1.11】已知 $P(B)=0.4,P(A+B)=0.5$,求 $P(A|\overline{B})$.

【解】方法一　$P(A|\overline{B})=1-P(\overline{A}|\overline{B})=1-\dfrac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}$,而

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=0.5,P(\overline{B})=1-P(B)=0.6,$$

故
$$P(A|\overline{B})=1-\frac{0.5}{0.6}=\frac{1}{6}.$$

方法二 $P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\frac{P(A+B)-P(B)}{1-P(B)}$,

故
$$P(A|\overline{B})=\frac{0.5-0.4}{1-0.4}=\frac{1}{6}.$$

题型Ⅱ 利用乘法公式计算事件的概率

【解题提示】利用乘法公式解题的步骤:先用恰当字母表示题中有关事件,根据题设条件,分析事件间的关系,把需要计算概率的事件表为所设事件的乘积,最后利用乘法公式求解.

【例 1.12】制造一种零件可采用两种工艺,第一种工艺有两道工序,每道工序的废品率都是 0.3;第二种工艺有三道工序,每道工序的废品率分别为 0.1,0.2,0.3.如果用第一种工艺,在合格零件中,一级品率为 0.8;而用第二种工艺,合格品中的一级品率为 0.9;试问哪一种工艺能保证得到一级品的概率较大?

【解】设第 i 种工艺得到的合格品为 A_i $(i=1,2)$,第 i 种工艺的合格品中得到的一级品为 B_i $(i=1,2)$,由题设有

$$P(A_1)=(1-0.3)(1-0.3)=0.49,P(B_1|A_1)=0.8.$$

又显然有 $A_1B_1=B_1$(因 $B_1\subset A_1$),故

$$P(B_1)=P(A_1B_1)=P(A_1)\cdot P(B_1|A_1)=0.392.$$

同理可求得

$$P(B_2)=P(A_2B_2)=P(A_2)\cdot P(B_2|A_2)=(1-0.1)(1-0.2)(1-0.3)\cdot 0.9=0.4536.$$

故第二种工艺得到的一级品的概率较大.

第四节 全概率公式与贝叶斯公式

重要概念、公式及结论

一、全概率公式和贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 Ω,B 为 E 的事件,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个剖分(即 $A_iA_j=\varnothing$,当 $i\neq j$ 时;且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$),且 $P(A_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i);$$

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

释难解惑

【问 1.5】全概率公式和贝叶斯公式适用于哪些问题?

【答】全概率公式适用问题的一般特征是:试验可以分为两个层次,第一层次的所有可能结果构成样本空间的一个剖分,它们通常是第二层次事件发生的基础或原因,而需要求概率的事件是第二层次中的事件,找到样本空间的一个剖分是运用全概率公式的关键.

贝叶斯公式适用问题的特征与全概率公式相同,只是所求概率问题是全概率公式的逆问

题：已知第二个层次中的事件 B 发生了，求它是由于第一层次中事件 A_j 的发生而引起的条件概率 $P(A_j|B)$.

总之，全概率公式描述的是“由因求果”，贝叶斯公式描述的是“知果寻因”.

典型例题分析

题型Ⅰ　全概率公式和贝叶斯公式的应用

【解题提示】使用全概率公式和贝叶斯公式的关键是寻找样本空间的一个剖分. 寻找方法有两种：(1)从第一个试验入手，分解其样本空间，找出剖分；(2)从导致事件 A 发生的两两互不相容的诸原因中找出剖分.

【例 1.13】设有三箱同类产品各由三家工厂所生产. 已知第一、第二家工厂产品的废品率都是 2%，第三家工厂的废品率是 4%. 现任取一箱，从箱中任取一件产品，试求：(1)所取产品是废品的概率；(2)若已知取出的产品是废品，则它是由第一家工厂生产的概率为多少？

【解】本题的试验为先从三箱中任取一箱，再从该箱中任取一件产品，故可先设 A_i $(i=1,2,3)$表示“取到第 i 家工厂生产的一箱产品”，此时 A_1,A_2,A_3 反映了先抽取的所有可能情况，故它们构成样本空间的一个剖分；再设 B 表示“取到废品”，又由题设知

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},\quad P(B|A_1)=P(B|A_2)=0.02,\quad P(B|A_3)=0.04,$$

故由全概率公式和贝叶斯公式分别得到

$$(1)P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{3}\times0.02+\frac{1}{3}\times0.02+\frac{1}{3}\times0.04\approx0.0267.$$

$$(2)P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times0.02}{\frac{1}{3}\times0.02+\frac{1}{3}\times0.02+\frac{1}{3}\times0.04}=0.25.$$

第五节　事件的独立性

重要概念、公式及结论

一、事件的独立性

设 A,B 为两个事件，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A,B 为相互独立的事件.

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，如果对于任意的 i_k $(i_k\leqslant n)$，$1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n$，具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(A_i)].$$

二、伯努利概型

称具有下述特征的 n 次随机试验为 n 重伯努利概型(或 n 重伯努利试验)：

(1)每次试验只有两种可能结果，记为 A 与 $\overline{A}$；

(2)n 次试验相互独立，即各项试验的结果相互独立；

(3)事件 $A,\overline{A}$ 在各次试验中出现的概率相同.

在 n 重伯努利概型中,事件 A 在 n 次试验中出现 k 次的概率为 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$,其中 $P(A)=p,P(\overline{A})=1-p$.

释难解惑

【问 1.6】事件 A 与 B 相互独立,与 A,B 互斥(或互不相容)的区别和联系是什么?

【答】A 与 B 互斥即 $AB=\varnothing$,描述的是两事件的关系,即两者不能同时发生.

A 与 B 独立指 A 的发生与 B 的发生无关,即 $P(AB)=P(A)P(B)$ 或 $P(B)=P(B|A)$.

当 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$ 时,(1)若 A 与 B 独立,则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$,故 $AB\neq\varnothing$,即 A,B 相容;(2)若 A 与 B 互斥,即 $P(AB)=P(\varnothing)=0$,而 $P(A)\cdot P(B)>0$,则 $P(AB)\neq P(A)P(B)$,即 A 与 B 不相互独立.

典型例题分析

【例 1.14】对某一目标进行三次独立的射击,设三次射击命中目标的概率分别为 0.4,0.5 和 0.7,试求:

(1)三次射击中恰好有一次命中的概率;

(2)三次射击中至少有一次命中的概率.

【解】设事件 A_i 表示第 i 次命中目标,由题设知 $P(A_1)=0.4,P(A_2)=0.5,P(A_3)=0.7$,又由独立性得到:

(1)$P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$

$=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)$

$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36.$

(2)$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-\overline{P(A_1\cup A_2\cup A_3)}=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2)][1-P(A_3)]$

$=1-0.6\times0.5\times0.3=0.91.$

【例 1.15】设在一次试验中事件 A 发生的概率为 p,现进行 n 次独立重复试验,则 A 至少发生一次的概率为________;而事件 A 最多发生一次的概率为________.

【解】该试验为 n 重伯努利试验,故 A 至少发生一次的概率为

$$P(k\geqslant1)=1-P(k=0)=1-(1-p)^n;$$

A 至多发生一次的概率为

$$P(k\leqslant1)=P(k=0)+P(k=1)=(1-p)^n+C_n^1p(1-p)^{n-1}.$$

考研真题精选

【考试要求】理解随机事件的概念,了解样本空间的概念,掌握事件之间的关系与运算.

1.(2009 年数学三)　设事件 A 与事件 B 互不相容,则(　　).

(A) $P(\overline{AB})=0$　　　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A)=1-P(B)$　　　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

【解】因为 A、B 互不相容,即 $AB=\varnothing$,故 $P(AB)=0$,所以答案(A)不正确,而当 $P(A)$,$P(B)$不为 0 时,答案(B)不成立,故排除之.答案(C)只有当事件 A,事件 B 互为对立事件时才成立,故也排除.因此选择(D).事实上,显然有

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1.$$

【考试要求】理解概率的古典定义，会计算古典概率.

2.（1990 年数学四、五）　从 0，1，…，9 等十个数字中任意选出三个不同的数字，试求下列事件的概率：

（1）A_1＝{三个数字中不含 0 和 5}；

（2）A_2＝{三个数字中不含 0 或 5}.

【解】设 B_1＝{三个数字中不含 0}；B_2＝{三个数字中不含 5}，则 $A_1=B_1B_2$，$A_2=B_1\cup B_2$. 于是 $\overline{A_2}=\overline{B_1\cup B_2}=\overline{B_1}\ \overline{B_2}$＝{三个数字中既含 0 又含 5}，因而

$$P(A_1)=P(B_1B_2)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15},$$

$$P(A_2)=1-P(\overline{A_2})=1-\frac{C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}.$$

【考试要求】掌握概率的基本性质及概率的加法定理.

3.（1992 年数学一）　已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，则事件 A,B,C 全不发生的概率为________.

【解】因 $ABC\subset AB$，故 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，从而 $P(ABC)=0$，故所求事件的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)]\\&=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

【考试要求】掌握条件概率、概率的乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式.

4.（1996 年数学五）　一实习生用一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率为 $p_i=\frac{1}{i+1}$ $(i=1,2,3)$. 以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，则 $P(X=2)=$________.

【解】令 A_i＝{第 i 个零件合格} $(i=1,2,3)$，B_i＝{第 i 个零件不合格，其余两个合格} $(i=1,2,3)$，由题设可知 $P(\overline{A_i})=\frac{1}{i+1}$ $(i=1,2,3)$，则

$$P(B_1)=P(\overline{A_1}\,A_2\,A_3)=P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4};$$

$$P(B_2)=P(A_1\overline{A_2}\,A_3)=P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8};$$

$$P(B_3)=P(A_1\,A_2\overline{A_3})=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

因 B_1,B_2,B_3 两两互斥，故

$$P(X=2)=P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=\frac{11}{24}.$$

5.（1998 年数学三）　设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出 2 份.

（1）求先抽到的一份是女生表的概率 p；