

全国高职高专教育土建类专业新理念教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学

◎ 严宗元 主编

◎ 金 均 主审



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

全国高职高专教育土建类专业新理念教材

高等数学

严宗元 主编

金 均 主审



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

为了适应当前高职高专土建类专业教学改革的需要,本书以较少的篇幅涵盖了函数和极限、导数和微分及其应用、不定积分和定积分及其应用、简易的微分方程、向量与空间解析几何初步和多元函数微分法及其应用等基础理论的主要内容,共 10 章,每章均配有练习题和复习题(皆附有答案)。

本书选材适当,主次分明,重点突出基础性、系统性、应用性和工具性,且行文力求简明通晓,以达到易教易学、学以致用目的。

本书可作为高职高专教育土建类专业的高等数学课程的教学用书,亦可供同层次的其他专业和各类成人高校或参加高等教育自学考试的考生作为教学和参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/严宗元主编. —上海:同济大学出版社,

2009.8

全国高职高专教育土建类专业新理念教材

ISBN 978-7-5608-4078-9

I. 高… II. 严… III. 高等数学—高等学校:
技术学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 081902 号

全国高职高专教育土建类专业新理念教材

高等数学

严宗元 主编 金 均 主审

责任编辑 高晓辉 责任校对 杨江淮 封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 江苏句容排印厂

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 18

印 数 1—5100

字 数 449 000

版 次 2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4078-9

定 价 30.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前言

本书作为高职高专教育土建类专业适用的系列教材之一,旨在针对该专业的培养目标和当前教学现状以及教育改革的需求,在偏低的有限学时数内,编写出一本便于教学的教材,这是当务之急.本书便是在这样的背景下出台的.

本书在建构全书框架的过程中,着力于体现内容的基础性、系统性、应用性和工具性,并在适度、够用的前提下,重墨缕述为本专业后续课程服务的接口性内容以及今后在工程岗位上常遇到的一些扩展性的内容.尤其在应用性方面,考虑到学生在工程实践中面对建筑施工工地场景、实际操作和全程监理等具体要求,在从事三通一平、清理场地、测量定位、排水挖沟、建筑施工设计和组织、各方交底沟通、建筑机械进场、开挖基坑、打桩、结构节点翻样、立柱架梁乃至封顶验收等等全过程中,本书从一开始就配置了较多的与此类操作相关的例题和习题,旨在理论联系实际的同时,引发学生在实践中的思考和创新.

本书在内容论述上力求以简胜繁,由浅入深,重在由生活和工程实践中提出问题,阐释基本概念、基本定理等,避免抽象的推导和不必要的赘文滞句,冀求易教易学.其次,为了让学生在课堂教学中边学边练,在每节内容中穿插了若干习题,以便在教师指导下弄懂学会;每章之末皆列有复习题,供教师选题,留作学生的课外作业.习题和复习题皆附有答案,仅供参考.这两类题目的题材和题量,基本上涵盖了本书的主要内容,同时,也较多地汲取了生活和土建工程实践中的实例,且难易适中,以期达到强化基本训练和学以致用目的.

本书可供 90 学时的高等数学课程教学使用,也可供部分少学时(如 60 学时)的院校使用.

本书在编写过程中,除了撷取编者历年来在教学实践中所累积的讲稿和有关资料外,还借鉴了国内外同类教材,从中获益良多.

本书叨蒙上海师范大学金均教授主审,金教授对全书内容逐字逐句作了精详的审阅,并对全书体系和某些内容提出了切中肯綮的建议,深受启迪,谨表由衷谢意.

最后,本书的编写和出版,受到了全国高职高专教育土建施工类专业教学指导委员会主任杜国城教授和同济大学职业技术教育学院副院长张建荣教授的支持和垂注,在此一并表示深切的敬意和谢忱.

限于编者水平,书中恐多错漏和不当之处,期盼读者不吝赐正.

编者

2009 年 3 月 23 日

目 录

前 言

第 1 章 函数	(1)
1.1 常量和变量	(1)
1.2 函数	(2)
1.3 关于函数的几点说明	(4)
1.4 函数的表示方法	(8)
1.5 函数关系的建立	(10)
1.6 函数的特性及初等函数	(14)
复习题 1	(17)
第 2 章 数列、函数的极限 函数的连续性	(19)
2.1 数列的极限	(19)
2.2 函数的极限	(20)
2.3 极限运算法则	(24)
2.4 无穷小量和无穷大量	(30)
2.5 连续函数	(34)
复习题 2	(41)
第 3 章 导数与微分	(43)
3.1 函数的变化率	(43)
3.2 导数的概念	(47)
3.3 函数的和、差、积、商的求导法则	(54)
3.4 复合函数求导法则	(58)
3.5 指数函数和对数函数的求导公式	(62)
3.6 求导法则小结	(66)
3.7 高阶导数	(68)
3.8 函数的微分	(70)
3.9 微分在近似计算中的应用	(75)

复习题 3	(81)
第 4 章 导数的应用	(85)
4.1 微分中值定理	(85)
4.2 函数的单调性的判定	(87)
4.3 函数的最大值与最小值	(90)
4.4 曲线的凹凸	(96)
4.5 函数图形的描绘	(98)
4.6 曲线的曲率	(101)
复习题 4	(106)
第 5 章 不定积分	(109)
5.1 原函数与不定积分	(109)
5.2 不定积分的基本公式和运算性质	(112)
5.3 换元积分法	(117)
5.4 分部积分法	(125)
复习题 5	(129)
第 6 章 定积分	(130)
6.1 定积分的概念	(130)
6.2 定积分的计算公式	(136)
6.3 定积分的基本性质 积分中值定理	(138)
6.4 定积分的换元法与分部积分法	(141)
复习题 6	(144)
第 7 章 定积分的应用	(145)
7.1 平面图形的面积	(146)
7.2 旋转体的体积	(148)
7.3 平面曲线的弧长	(150)
7.4 平面图形的形心	(152)
7.5 平面图形的惯性矩	(161)
7.6 变力所做的功	(166)
7.7 平均值	(169)
复习题 7	(172)

第 8 章 简单微分方程	(174)
8.1 微分方程的基本概念	(174)
8.2 一阶微分方程的解法	(178)
8.3 几种特殊类型的高阶微分方程的解法	(187)
复习题 8	(191)
第 9 章 向量与空间解析几何初步	(192)
9.1 空间直角坐标系	(192)
9.2 向量的概念及其运算	(193)
9.3 数量积	(198)
9.4 向量积	(201)
9.5 空间的平面方程	(203)
9.6 空间的直线方程	(207)
9.7 空间的曲面与曲线方程	(212)
复习题 9	(217)
第 10 章 多元函数的微分及其应用	(220)
10.1 二元函数的基本概念	(220)
10.2 偏导数	(224)
10.3 全微分及其应用	(230)
10.4 复合函数及隐函数的求导法则	(235)
10.5 多元函数的极限	(239)
10.6 条件极值	(243)
10.7 多元函数微分的几何应用	(247)
复习题 10	(249)
数学实习 I 用最小二乘法建立经验公式	(251)
数学实习 II 定积分的近似计算	(254)
II.1 矩形法	(254)
II.2 梯形法	(255)
III.3 抛物线法	(256)
复习题 II	(260)
习题、复习题答案	(261)

第 1 章

函 数

高等数学的一个主要部分是微积分. 微积分的研究对象是函数, 它的任务是通过
对函数的研究来认识事物的变化和运动, 从而为解决生产实践中的问题提供有力的
工具.

本章首先通过实例引入变量和函数的概念, 并重点阐述函数概念所包含的三个
内容, 即函数的定义域、对应规律和函数值; 其次, 介绍建立函数关系的基本方法.

学习微积分应运用“运动变化”、“相互联系”的观点去理解函数概念的实质和学
会函数关系式的建立, 这在以后各章中, 对学习导数、微分、积分等内容都是很重
要的.

1.1 常量和变量

我们知道, 客观世界的一切事物, 总是处于不断地变化、运动和发展过程中. 我们
要认识某一事物, 只能从它的量和质的变化中去考察. 因此, 通过事物的量的变化来
帮助人们认识事物的质的变化不仅是可能的, 而且是必要的. 例如, 在化学中, 一氧化
碳 CO 和二氧化碳 CO_2 , 虽然都是由 C 和 O 两种元素合成, 但它们所含的 O 的个数
不同, 即存在量的差别, 因此, 它们是完全不同的东西, CO 有毒, CO_2 无毒. 又如, 在
研究二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$

的根时, 如果它的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 发生量的变化, 由正变为负, 则方程的两个根就
要发生质的变化, 由实根变为虚根.

在生产实践中, 我们时常遇到各种各样的量, 例如, 河道中的水位, 输水管道中的
水流的速度, 输电线中的电流, 等等, 这些量在一般情况下都在不断地变化着. 为了从
数量上描述事物的运动和变化, 我们引入变量的概念: 如果有一个量, 它在某一个过
程中, 可以取不同的值, 这个量就叫做变量. 例如, 某地区一天 24h 的温度 T 随时间

变化, T 是一个变量.

与此相反, 当我们在某些具体场合下研究问题时, 把某些量看作相对静止的、不变的, 即在一个过程中, 始终保持同一数值的量叫做常量. 例如, 自由落体过程中, 物体下落的距离 s 与时间 t 的关系为 $s = \frac{1}{2}gt^2$, 其中 $g = 9.8\text{m/s}^2$ 是重力加速度, 它在某一个地区是一个常量.

一个量是常量还是变量, 是由讨论的问题确定的. 同一个量在某些情况下是常量, 而在另一种情况下就可能成为变量; 有时, 如果有些量的变化微不足道, 对所考察的问题影响很小, 那么, 我们往往把这些量也看作常量. 这对简化问题或问题的解决来说, 都是有益的. 所以一个量看成是常量还是变量, 要根据具体情况作具体分析.

习 题 1.1

什么叫变量? 什么叫常量? 试回答下面问题.

(1) 火车在直线行驶过程中, 可以近似看成匀加速运动. 在这一过程中, 火车驶过的路程 s 、其速度 v 和加速度 a 哪些是常量? 哪些是变量?

(2) 在建筑工地上, 从自来水管中流出的水注入一底面为正方形的棱柱形水箱中(图 1-1). 在水流注入过程中, 箱中水的体积 V 、水深 h 和底面积 A 哪些是常量? 哪些是变量?

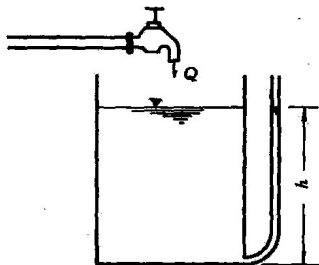


图 1-1

1.2 函 数

反映客观事物变化的量——变量, 它的变化并不是孤立的, 它总是和另一些变量的变化相互联系、相互制约的. 在数量上, 就是用函数关系来表达变量与变量之间的依赖关系.

例 1-1 打桩机的桩锤从高处自由下落过程中, 下落的距离 s 与时间 t 都是变量, 这两个变量的变化并不是孤立的, 而是相互依赖的. 自由落体从高处下落的距离 s 随着下落的时间 t 而变化, 其变化规律是

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

式中, g 为重力加速度, $g = 9.8\text{m/s}^2$.

根据这个规律, 对于下落过程中每一个确定的时刻 t , 就能算出相应的下落的距离 s . 例如, 当 $t = 0.5\text{s}$ 时, $s = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.5)^2 = 1.225\text{m}$; 当 $t = 1\text{s}$ 时, $s = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (1)^2 = 4.9\text{m}$.

例 1-2 一天中的气温 T 和时间 t 都是变量,而气温 T 随时间 t 一起变化,它们的变化规律可由温度自动记录仪记录下来. 图 1-2 就是气象站用温度自动记录仪记录的一昼夜温度变化曲线,它形象地表示了气温 T 随时间 t 的变化规律:对每一个确定的时刻 t ,就有一个确定的温度 T 与它对应. 例如,当 $t=13\text{h}$ 时,气温 $T=22^\circ\text{C}$.

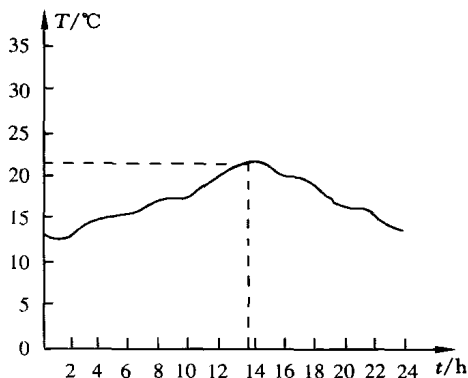


图 1-2

现在,我们来考察上述两个例子. 在例 1-1 中,距离 s 与时间 t 都是变量,它们之间存在着一个用公式表达的对应关系,当 t 取定一个确定的时刻,依照这个公式, s 的值随之确定;在例 1-2 中,温度 T 和时间 t 都是变量,它们之间存在着一个用图形表达的对应关系,当时间 t 取定一个确定的时刻,从图形上可以得到温度 T 的对应值.

类似上述关于变量之间的相互依赖关系的例子很多,尽管它们所包含的具体意义及变量之间的相互依赖关系及其表达形式各不相同,但通过上述例子,不难概括出这样的一些共同特征:

(1) 在某一变化过程中都包含两个变量和确定的对应关系. 尽管这个对应关系的表达形式各有不同,但它明确指出这两个变量相互联系、相互制约的具体内容. 也就是说,当其中一个变量取定了一个确定的值时,另一个变量按照一定规律(即对应关系),总是有确定的值和它对应. 我们把前一个变量叫做**自变量**;另一个通过对应关系而确定的变量,叫做**因变量**.

必须注意,某一现象中,哪个变量是自变量或因变量并不是绝对的. 例如在圆面积公式

$$A = \pi R^2$$

中指出了当圆的半径改变时,圆面积 A 与半径 R 之间的依赖关系. 这里半径 R 和圆面积 A 都是变量,半径 R 是自变量,圆面积 A 是因变量. 但如果我们把圆面积 A 作为自变量,那么圆的半径 R 就是因变量,此时

$$R = \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

(2) 我们还发现,自变量与因变量之间的相互依赖关系中,自变量只能在一定范围内变化,否则两者之间的相互依赖关系不再成立,或者自变量本身是没有实际意义的. 例如,圆面积 $A = \pi R^2$ 中的半径 R 改变时就不允许取负值,因为负的半径是没有实际意义的. 又如,在例 1-1 中,打桩机的桩锤自由下落时间 t ,也只有对桩锤抵达桩

顶以前这一段时间而言, $s = \frac{1}{2}gt^2$ 才能成立, 否则如果桩锤已与桩顶接触, 此后, 桩锤的状态已不是由自由落体运动的规律所能描述的了. 概括以上所述的这种变量之间的相互依赖关系, 就可以抽象出如下的函数定义.

定义 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y , 如果对于在某个范围内变化的变量 x 取得的每一个值, 按照一定规律, 变量 y 总有确定的对应值, 这时就称变量 y 是变量 x 的函数. 并可表达如下:

$$y = f(x). \quad (1-1)$$

其中, x 叫做自变量, y 叫做因变量(或函数), f 是表达函数关系(对应规律)的一种符号; 自变量 x 所能取得值的全体(即变化范围)称为这个函数的定义域; 而函数相应于其定义域所能取得值的全体, 称为这个函数的值域.

反之, 若将 y 当作自变量, x 当作函数, 则由上述关系确定的函数

$$x = \varphi(y) \quad (1-2)$$

叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数, $y = f(x)$ 叫做直接函数.

在同一坐标系中, 式(1-1)和式(1-2)表示同一图形; 在式(1-1)中, x 是自变量, y 是函数; 在式(1-2)中, y 是自变量, x 是函数. 但习惯上把 x 当作自变量, y 当作函数, 因此在式(1-2)中将 x 改写为 y , 将 y 改写为 x , 则式(1-1)的反函数的形式为

$$y = \varphi(x).$$

这时, x 是自变量, y 是函数. 反函数的定义域与值域分别是直接函数的值域和定义域.

1.3 关于函数的几点说明

在上节最后概括出来的函数定义中, 包含三个内容: 一是函数的定义域, 即自变量 x 的变化范围; 二是对应规律, 即因变量依赖自变量的变化规律; 三是函数值, 即自变量取得的每一个值, 因变量有确定的对应值. 下面我们再分别对它们作进一步说明.

1.3.1 函数的定义域

前面已经说过, 在表达因变量 y 与自变量 x 之间对应规律的函数关系中, 自变量 x 的变化有它的取值范围. 所谓函数的定义域, 就是函数有意义的自变量的取值范围. 也就是说, 只有当自变量在函数的定义域中取值时, 因变量才有确定的对应值,

即函数才有意义. 例 1-1 中打桩机的桩锤自由下落到桩顶时间为 10s, 则函数的定义域就是 $0 \leq t \leq 10\text{s}$; 如果时间 t 在这个范围以外取值, 例如, $t = 12\text{s}$, 这时桩锤早已在桩顶上甚至静止不动了, 此时若用桩锤自由下落规律 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 去计算下落距离(因变量) s 的对应值是无意义的.

所以在实际问题中, 函数的定义域是根据函数关系所反映的客观事物的实际意义来确定的.

但是数学上, 我们讨论的函数仅写出它的数学算式, 而不考虑它的实际意义. 这时, 我们约定, 函数的定义域就是使数学算式有意义的自变量的变化范围. 于是函数的定义域便可直接从表达函数的数学算式本身来确定, 如函数

$$y = \frac{5}{x-3}$$

的定义域是使分母不为零的全体 x , 即 $x-3 \neq 0$ 或 $x \neq 3$, 即除了 $x=3$ 以外的一切实数, 记作 $-\infty < x < 3$ 和 $3 < x < +\infty$ ($+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作正无穷和负无穷, 它们不是数, 仅仅是记号).

为了简便起见, 通常还用“区间”来表示函数的定义域. 如果变量 x 的变化范围是 $a \leq x \leq b$, 我们就说变量 x 的变化范围是闭区间, 记作 $[a, b]$; 如果变量 x 的变化范围是 $a < x < b$, 我们就说变量 x 的变化范围是开区间, 记作 (a, b) . 闭区间和开区间的区别是闭区间包含区间的两个端点, 而开区间不包含端点. 还有一种区间叫无穷区间: 如果 x 的变化范围是 $a \leq x < +\infty$, 就说变量 x 的变化范围是无穷区间 $[a, +\infty)$; 如果 x 的变化范围是 $-\infty < x < b$, 就说变量 x 的变化范围是无穷区间 $(-\infty, b)$; 如果 x 的变化范围是任何实数, 即 $-\infty < x < +\infty$, 就说变量 x 的变化范围是无穷区间 $(-\infty, +\infty)$. 上面前四种区间可以在数轴上表示出来, 如图 1-3 所示. 把区间 $(-\infty, +\infty)$ 在数轴上表示出来, 就是整个数轴. 例如, 在例 1-2 中, $T = f(t)$ 的定义域为 $[0, 24]$; $y = \frac{5}{x-3}$ 的定义域为两个无穷区间 $(-\infty, 3)$ 和 $(3, +\infty)$.

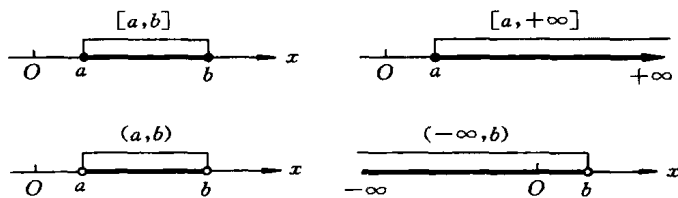


图 1-3

例 1-3 半径为 r 、圆心为原点 O 的圆方程是 $x^2 + y^2 = r^2$, 或写为 $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, 它表示圆上的点的横坐标 x 与纵坐标 y 之间的依赖关系. 当 $x^2 \leq r^2$ 时, y 有一个或

两个数值与之对应,所以 y 是变量 x 的函数,它的定义域是闭区间 $[-r, r]$.

例 1-4 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}; \quad (2) y = \sqrt{1 - x^2}; \quad (3) y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x}.$$

解 (1) 对于函数 $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$, 只有当 $x = 1$ 时, 分母为零, y 才没有确定的对应值, 即函数没有意义. 因此, 函数的定义域为 $x \neq 1$ 的所有实数, 或记作 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$.

(2) 函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$, 在实数范围内, 只有当 $1 - x^2 \geq 0$ 时, 根式才有意义, 即函数的定义域为 $-1 \leq x \leq 1$, 或记作 $[-1, 1]$.

(3) 函数 $y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x}$ 的定义域为两个函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 和 $y = \sqrt{x}$ 定义域的公共部分. $y = \sqrt{1 - x^2}$ 和 $y = \sqrt{x}$ 的定义域分别是 $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq x \leq +\infty$. 所以函数的定义域为 $0 \leq x \leq 1$, 或记作 $[0, 1]$.

1.3.2 对应规律和函数值

对应规律是因变量 y 和自变量 x 依赖关系(即函数关系)的具体表现, 它是函数定义中最本质的要素.

函数 $y = f(x)$ 中的记号 f , 代表变量 y 和变量 x 的对应规律. $f(x)$ 是一个完整记号, 不可误解为相乘, 正如 $\sin x$ 不可看作 $\sin$ 乘 x 一样. 至于这种对应规律究竟是一种什么具体关系, 则完全由问题所决定. 如例 1-1 中下落距离 s 是时间 t 的函数, 用 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 所规定的对应关系: 自变量 t 取桩锤自由下落过程中的某一时刻时, 就可用公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 求得相应下落距离. 又如例 1-2 中气温 T 是 t 的函数, 记为 $T = f(t)$, 这里的记号 f 代表图 1-2 中曲线所规定的对应关系, 自变量 t 作为横坐标, 由此便可找到曲线上对应点的纵坐标, 即气温 T .

当自变量 x 取一定值 x_0 时, 对应的函数所取的值, 叫做**函数值**. 例如, 函数 $y = 2x^2 + 5x + 1$, 用记号 $y = f(x)$ 表示时, 有 $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$, 这时, 记号 f 表示对应的函数值 y 是由括号内自变量 x 经过 $2(\quad)^2 + 5(\quad) + 1$ 运算得到的.

当自变量 x 取一定值 x_0 时, 对应的函数值用 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 表示. 例如, 对函数 $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ 来说, 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 2(0)^2 + 5(0) + 1 = 1$; 当 $x = 1$ 时, $f(x) = 2(1)^2 + 5(1) + 1 = 8$; 当 $x = -2$ 时, $f(x) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 1 = -1$; 当 $x = x_0$ 时, $f(x) = 2(x_0)^2 + 5(x_0) + 1$. 由此看来, 在定义域中取 x_0 代替 $f(x)$ 中的 x , 就得到 $y = f(x)$ 在一点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$.

例 1-5 求函数 $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$ 在 $x=0, x=-1, x=x_0, x=x_0+h$ 各点的函数值.

解 $f(0) = \frac{2 \times 0 - 1}{0^2 + 1} = -1;$

$$f(-1) = \frac{2 \times (-1) - 1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{3}{2};$$

$$f(x_0) = \frac{2x_0 - 1}{x_0^2 + 1};$$

$$f(x_0+h) = \frac{2(x_0+h) - 1}{(x_0+h)^2 + 1} = \frac{2x_0 + 2h - 1}{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 + 1}.$$

在同一个问题中,如果要同时讨论几个不同的函数,为了避免混淆,要用不同的函数记号来表示.例如,如果我们要同时讨论两个不同的函数 $y=x^3$ 和 $y=\frac{1}{x+1}$ 时,

不妨分别记为 $f(x)=x^3$ 和 $\varphi(x)=\frac{1}{x+1}$.

有时为了方便起见,也用记号 $y=y(x), u=u(x), v=v(x)$ 来表示函数,这里, $y=y(\quad), u=u(\quad), v=v(\quad)$ 表示对应规律.

顺便指出,在上述函数的定义中,并不要求自变量变动时,函数的对应值也一定要变动,重要的一点是:当自变量 x 在函数的定义域取得一个任意数值时,函数有确定的对应值.因此,完全不变的量,我们可以把它当作函数看待.换句话说,常量也看作函数,即常量是这样的一个函数:对于自变量的一切值来说,这个函数的值都是相等的.

习 题 1.3

1. 在例 1-1 中,打桩机的桩锤自由下落规律是 $s = \frac{1}{2}gt^2$, 如果桩锤从高度 H 处落到桩顶,问函数的定义域是什么?

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \frac{1}{x-1};$

(2) $y = \sqrt{3x+2};$

(3) $y = \frac{1}{x^2-1};$

(4) $y = \sqrt{x^2-4};$

(5) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2};$

(6) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2};$

(7) $y = \ln(x+1).$

3. 指出下列各式哪些不是函数关系,为什么?

(1) $y = x+1;$

(2) $y = 3;$

(3) $x^2 + y + 1 = 0;$

(4) $x^2 + y^2 + 1 = 0.$

4. 若 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

5. 设 $y = \frac{1}{2x}f(t-x)$, 当 $x=1$ 时, $y = \frac{1}{2}t^2 - t + 5$, 求 $f(x)$.

6. 设函数 $y = \sqrt{x^2 + 4}$, 求下列函数值: $y|_{x=0}$; $y|_{x=-1}$; $y|_{x=x_0+1}$.
7. (1) 已知 $\Phi(x) = \log_a x$, 证明 $\Phi(x) + \Phi(x+1) = \Phi[x(x+1)]$.
 (2) 已知 $F(z) = a^z$, 证明 $F(x) \cdot F(y) = F(x+y)$.
8. 已知交流电的电压 u 随时间 t 的规律为 $u(t) = U_0 \sin \omega t$ (U_0, ω 为常量), 求 $t=0$, $t=\frac{\pi}{2\omega}$, $t=\frac{\pi}{\omega}$, $t=\frac{3\pi}{2\omega}$, $t=\frac{2\pi}{\omega}$ 时的电压 u .

1.4 函数的表示方法

1.4.1 函数的三种表示方法

表达函数的方法通常有公式法、列表法和图示法三种.

(1) 公式法. 例 1-1、例 1-4 等都是用数学式的形式来表达自变量和因变量之间对应关系, 这种方法称为公式法. 其优点是简单准确, 便于分析与计算, 但不够直观. 有些实际问题遇到的函数关系, 很难用公式法表示, 往往采用列表法或图示法表示.

(2) 列表法. 工程实践中, 变量之间的函数关系有时是以列表的形式表示出来的, 平时所用的三角函数表、对数表等, 都是列表法表示函数的例子. 列表法的优点是给定了自变量的数值后, 可以直接查到因变量的对应值(即函数值), 但表中的数据往往不完全, 同时也不便于理论分析.

(3) 图示法. 工程上也常常用几何图形——平面直角坐标系上的一条曲线, 表示两个变量之间的函数关系, 这种表示方法称为图示法, 如例 1-2. 图示法的优点是鲜明直观, 能看出函数变化趋势, 可启发我们推断出函数的某些性质, 是研究函数时的重要辅助工具.

今后我们主要用公式法表示函数, 并借助其他两种方法对函数进行分析研究. 例如, 函数 $y = \sqrt{x}$ 是用公式法表示的, 我们可以在其定义域内作出表 1-1 所示的函数表, 然后依次在平面直角坐标系 xOy 上描出相应的点 (x, y) , 再将所得各点连成一条曲线, 就得到函数 $y = \sqrt{x}$ 的图像(图 1-4). 这个图像帮助我们直观地了解函数 $y = \sqrt{x}$ 变化情况.

表 1-1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\sqrt{x}$	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	...

一般地, 对于函数 $y = f(x)$, 在其定义域内, 每取一个 x 值时就可得到确定的对应值 y , 以这一对 x, y 值为坐标, 在平面直角坐标系 xOy 中定出一个点 $M(x, y)$, 当 x, y 变化时, M 点就在平面上移动, 并描出一条曲线(图 1-5), 这条曲线即为函数

$y=f(x)$ 的图形.

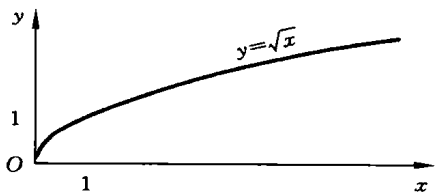


图 1-4

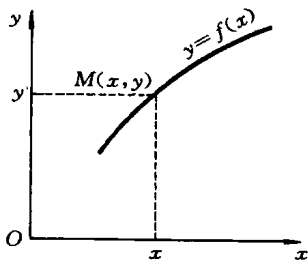


图 1-5

1.4.2 分段函数

但是,在工程实践中有些问题,当用公式法表示函数时,对于自变量的一切值不一定用一个关系式就可以把它们表示出来的,可能会遇到这种情况:对于自变量的某一部分数值,用一个关系式来表示;对于自变量的另一部分数值,用另一个关系式来表示.也就是说,在自变量的不同变化范围内,它指明了因变量与自变量之间的不同变化规律,即函数用不同的式子分段表示出来,这样的函数叫做分段函数.

分段函数的定义域是各个定义域的并集.

例如,函数 $y=f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & 0\leq x\leq 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$ 及函数 $y=g(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ 都是分段函数,它们的定义域分别是 $[0,1]\cup(1,+\infty)=[0,+\infty)$ 和 $(-\infty,+\infty)$.

分段函数的函数值按不同区间的对应关系求得,例如在上面的函数中, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$, $f(e)=e+1$, $g(-\pi)=\pi$,……

习 题 1.4

1. 列表绘制函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 的图形.
2. 绘制函数 $|x|+|y|=1$ 的图形.
3. 图 1-6 是自动水位记录仪在坐标纸上记录的某城市河道一天内潮水水位变化的曲线图,其中横坐标为时刻 t ,纵坐标为水位 H . 试从图上查取表 1-2 所列各时刻的潮水位和最高、最低潮水位,并记录在表 1-2 中.

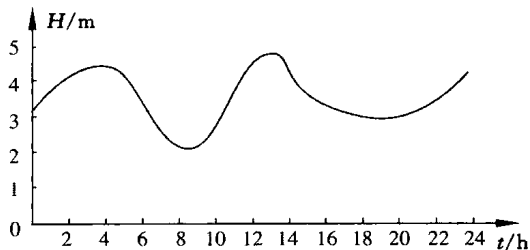


图 1-6

表 1-2

时刻 t	0	4	8	12	16	20	24	最高潮水位	最低潮水位
水位 H									

1.5 函数关系的建立

运用数学工具解决实际问题时,通常要找出问题中变量之间的函数关系,用数学公式把它表示出来,然后进行分析与计算.由于实际问题各不相同,所以建立函数关系也没有一个统一的方法.我们必须遵循对具体的事物进行具体分析的原则,分析实际问题中的数量关系,确定自变量和因变量,并用字母表示出来;再根据问题中给出的条件,运用数学、物理和力学等方面的知识,列出函数关系式.下面通过若干实例,说明建立函数关系的过程.

例 1-6 图 1-7 所示为一长度 l 的供水管道,每单位长度连续泄出流量 q ,设管道进口处流入的流量为 Q_0 ,求距管道进口处为 x 的管道横断面上通过的流量.

解 设距管道进口处为 x 的管道横断面上通过的流量为 Q_T ,则

$$Q_T = Q_0 - qx$$

就是 Q_T 与距离 x 之间的函数关系,其定义域为 $0 \leq x \leq l$.

例 1-7 设有质量为 m 的物体,以初速度 v_0 铅直向上抛出(图 1-8).如果忽略空气阻力,试将物体动能表示成时间的函数.

解 设物体的质量为 m 、速度为 v ,由物理学可知,物体的动能 E 为

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad (a)$$

即上抛过程中物体的动能 E 是速度 v 的函数.

因为在忽略空气阻力假定下,物体竖直上抛过程中的速度 v 又是时间 t 的函数,即

$$v = v_0 - gt. \quad (b)$$

式中, g 为重力加速度.

将式(b)代入式(a),便得到物体动能和时间 t 的函数关系为

$$E = \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2. \quad (c)$$

由于上抛到最高点时,物体的速度 v 变为零.因此,上抛过程所需的全部时间可由 $v=0$ 求出,即式(b)变为 $0 = v_0 - gt$,得 $t = \frac{v_0}{g}$.从而确定函数的定义域为 $0 \leq t \leq \frac{v_0}{g}$.

在本例中,将动能 E 是速度为 v 的函数记作 $E = f(v)$,将速度 v 是时间 t 的函数